Indice del capitolo 4:

4. Moti della Terra come corpo esteso. Si scrivono e si risolvono le equazioni che descrivono il moto dei poli della Terra (precessione libera, precessione lunisolare e loro effetti astronomici).

- **La Terra come sferoide oblato**
- **Il potenziale gravitazionale (di quadrupolo) di un corpo a simmetria assiale**
- **Corpo rigido ed equazioni di Eulero**
- **Precessione libera della Terra rigida**
- **Precessione lunisolare dell'asse di rotazione della Terra**

==========

LA TERRA COME SFEROIDE OBLATO (Relazione m, ε, J_2)

Newton dimostrò nei *Principia* (Libro III, Proposizioni XVIII-XX) che a causa della sua rotazione la Terra deve essere uno sferoide oblato

$$m = \frac{\text{accelerazione centrifuga all'equatore}}{\text{accelerazione gravitaz. all'equatore}} =$$

$$= \frac{\omega_\oplus^2 a}{GM/a^2} = \frac{\omega_\oplus^2 a^3}{GM} = \frac{(7.29)^2 \times 10^{-10} \times (6.378)^3 \times 10^{24}}{6.67 \times 10^{-8} \times 5.98 \times 10^{27}} \simeq 3.46 \times 10^{-3} \quad (1)$$

m misura l'entità della causa che produce lo schiacciamento (con un numero adimensionale)

$$\varepsilon = \frac{a-b}{a} \quad (2)$$

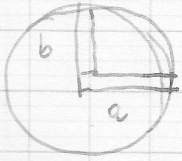
a raggio equatoriale

b raggio polare

ε l'effetto, cioè l'entità (relativa) dello schiacciamento.

Qual'è la relazione tra m ed ε? CASO $\rho_\oplus$ = costante o lo stesso

Newton:



colonne di fluido perfetto; sono in equilibrio $\Rightarrow$ i loro pesi sono gli stessi

Lungo l'equatore il peso è diminuito dal termine centrifugo:

$$|a_c(r)| = \omega_\oplus^2 r \qquad 0 \le r \le a$$

$$|a_g(r)| = \frac{G\,m(r)}{r^2} = \left(G\,\rho_\oplus \frac{4}{3}\pi\right) r \qquad (3)$$

($\rho_\oplus$ = cost.) ⇓ entrambe sono proporzionali ad r ⇓

Il fattore di diminuzione della accelerazione è di quanto è lungo l'equatore è sempre lo stesso ⇒ posso considerare l'accelerazione alla superficie:

$$\text{peso colonna equatoriale} \propto a\left(g_{eq} - \omega_\oplus^2 a\right) = a\,g_{eq}\left(1 - m\right) \qquad (4)$$

$$\text{peso colonna polare} \propto b\,g_{polo} \qquad (5)$$

Poiché si ha equilibrio, si devono uguagliare:

$$a\,g_{eq}\left(1-m\right) = b\,g_{polo} \qquad (6)$$

$$\frac{g_{polo}}{g_{eq}} = \frac{a}{b}\left(1-m\right) \simeq \left(1+\varepsilon\right)\left(1-m\right) \qquad (7)$$

$$\varepsilon = \frac{a-b}{a}$$

$$\frac{b}{a} = 1-\varepsilon$$

$$\frac{a}{b} \simeq 1+\varepsilon$$

Ora si tratta di calcolare quanto vale g_{polo}/g_{eq} per una terra sferoide oblato con $\rho_\oplus$ = costante

Riprendo da pagina 10 il potenziale di uno sferoide oblato:

$$U = \frac{GM}{r}\left(1 - J_2\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\sin\phi)\right) \qquad (8)$$

lat.

$$J_2 = \frac{C-A}{Ma^2}$$

$$P_2(\sin\phi) = \frac{3\sin^2\phi - 1}{2}$$

Però era $r \gg a$ ---

$$g = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{GM}{r^2} + \frac{3GM}{r^4} J_2 a^2 P_2(\sin\phi) \qquad (9)$$

Adesso prendo il caso particolare di uno sferoide oblato di densità costanti $\Rightarrow$

$$C = \frac{2}{5} M a^2 \qquad (10)$$

$$A = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2) \qquad (11)$$

$$\Downarrow$$

$$J_2 = \frac{C-A}{Ma^2} = \frac{1}{5}\frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \simeq \frac{1}{5}\left(1 - (1-2\varepsilon)\right) = \frac{2}{5}\varepsilon$$

$$\boxed{J_2 \simeq \frac{2}{5}\varepsilon} \qquad (12)$$

← relazione tra J_2 ed ε per il caso omogeneo

Quindi:

$$g_{polo} \simeq -\frac{GM}{b^2}\left(1 - \frac{6}{5}\varepsilon\right) \qquad (13)$$

Nota

$$g_{eq} \simeq -\frac{GM}{a^2}\left(1 + \frac{3}{5}\varepsilon\right)$$

$$\frac{g_{polo}}{g_{eq}} \simeq \frac{\frac{GM}{b^2}\left(1-\frac{6}{5}\varepsilon\right)}{\frac{GM}{a^2}\left(1+\frac{3}{5}\varepsilon\right)} \simeq \frac{a^2}{b^2}\left(1-\frac{6}{5}\varepsilon\right)\left(1-\frac{3}{5}\varepsilon\right) \simeq$$

$$\simeq \left(1+2\varepsilon\right)\left(1-\frac{6}{5}\varepsilon\right)\left(1+\frac{3}{5}\varepsilon\right) \simeq 1+\frac{1}{5}\varepsilon \qquad (14)$$

Usando ora la (7) ho:

$$\left(1+\frac{1}{5}\varepsilon\right) = (1+\varepsilon)(1-m)$$

$$1-m = \left(1+\frac{1}{5}\varepsilon\right)(1-\varepsilon) \simeq 1-\frac{4}{5}\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{5}{4}m} \qquad \left(J_2 \simeq \frac{2}{3}\varepsilon\right) \qquad (15)$$

↑ relazione tra m ed ε ("causa" ed "effetto") per un corpo omogeneo

Adesso invece voglio ricavare la relazione tra J_2, ε ed m nel caso generale

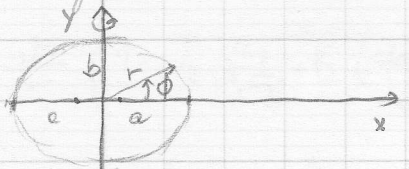
La superficie deve essere una superficie equipotenziale del potenziale totale (gravitazionale + centrifugo): cioè, la funzione

$$U' = U + \underbrace{\frac{1}{2}\omega_\oplus^2 r^2 \cos^2\phi}_{\text{per la Terra è piccolo rispetto ad } U} = \frac{GM}{r} - \frac{G(C-A)}{2r^3}\left(3\sin^2\phi - 1\right) + \frac{1}{2}\omega_\oplus^2 r^2 \cos^2\phi \equiv U'(r,\phi) \equiv \text{costante} \qquad (16)$$

(ϕ ↑ latitudine; ↓ latitudine; ↙ può valere per $r \gg a$!)

deve essere costante sulla superficie della Terra (trascuro tutti i termini superiori al J_2)

D'altro canto posso scrivere (in termini di r e ϕ), l'equazione per una sferoide oblata:



Faccio il caso di una ellisse per semplificare il calcolo (siccome c'è simmetria di rotazione le coordinate nel piano $\perp$ all'asse si comportano allo stesso modo)

e eccentricità
$b = a\sqrt{1-e^2}$

In coordinate cartesiane ho:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{b^2}{\sin^2\phi + \frac{b^2}{a^2}\cos^2\phi}$$

$$r^2 = \frac{a^2(1-e^2)}{\sin^2\phi + (1-e^2)\cos^2\phi}$$

Eq. sferoide oblato in coordinate polari (17)

Invece dell'eccentricità posso usare ε

$$\varepsilon = \frac{a-b}{a} \qquad \frac{b^2}{a^2} = \boxed{(1-\varepsilon)^2 = 1-e^2} \qquad (18)$$

$$\Downarrow$$

$$r^2 = \frac{a^2(1-\varepsilon)^2}{\sin^2\phi + (1-\varepsilon)^2\cos^2\phi} \qquad (19)$$

Se l'ellitticità è piccola, posso sviluppare fermandomi all'ordine ε:

$$r = \frac{a(1-\varepsilon)}{\sqrt{\sin^2\phi + (1-\varepsilon)^2\cos^2\phi}} = a(1-\varepsilon)\left(\sin^2\phi + (1-2\varepsilon+\varepsilon^2)\cos^2\phi\right)^{-1/2} =$$

$$= a(1-\varepsilon)\left(1-2\varepsilon\cos^2\phi\right)^{-1/2} \simeq a(1-\varepsilon)(1+\varepsilon\cos^2\phi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad r \simeq a\left(1-\varepsilon \sin^2\phi\right) \qquad (20)$$

↑ eq. di uno sferoide oblato al primo ordine in ε

che posso scrivere come

$$r = a(1-\eta) \qquad \eta \equiv \varepsilon \sin^2\phi \qquad (21)$$

$\eta \ll 1$; trascuro η^2 ma anche $\eta \cdot$ potenziale centrifugo, poiché il potenziale centrifugo è una piccola perturbazione di quello gravitazionale ($m \simeq 10^{-3}$), e anche $\eta \cdot (C-A)$ .. poiché anche $C-A$ è piccolo

Quindi riscrivo la (21) nella (16):

$$\frac{GM}{a(1-\eta)} - \frac{G(C-A)}{2a^3(1-\eta)^3}\left(3\sin^2\phi - 1\right) + \frac{1}{2}\omega_\oplus^2 a^2 (1-\eta)^2 \cos^2\phi = \text{costante}$$

$$\frac{GM}{a}(1+\eta) - \frac{G(C-A)}{2a^3}\left(1+3\eta\right)\left(3\sin^2\phi - 1\right) + \frac{1}{2}\omega_\oplus^2 a^2 (1-2\eta)\cos^2\phi = \text{costante} \qquad (22)$$

↑ ↑ sono moltiplicati per termini "piccoli"

Tenendo conto che il potenziale è sempre definito a meno di una costante, dalla (22) ricavo una relazione tra η e $\sin^2\phi$:

$$\eta = \left[\frac{3(C-A)}{2Ma^2} + \frac{\omega_\oplus^2 a^3}{2GM}\right]\sin^2\phi \qquad (23)$$

e siccome $\eta \equiv \varepsilon \sin^2\phi$ dall'equazione dello sferoide oblato (vedi la (20)), ottengo:

$$\varepsilon = \frac{3}{2}\underbrace{\frac{C-A}{Ma^2}}_{\text{“}J_2} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\omega_\oplus^2 a^3}{GM}}_{\text{“}m} \qquad (24)$$

i.e.:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} m} \qquad (25)$$

↖ relazione generale che lega ε, J_2 ed m
(vale in tutti i casi in cui il potenziale centrifugo sia una piccola perturbazione rispetto a quello gravitazionale)

Nel caso particolare in cui il corpo sia omogeneo dalla (25) ricavo la (15) cioè $\varepsilon = \frac{5}{4} m$, perché per un sferoide oblato omogeneo vale $J_2 = \frac{2}{5}\varepsilon$ (vedi la (12)).

Dati numerici:

$\varepsilon = 1/298.2$

$m = 3.46 \times 10^{-3}$

$J_2 = \frac{C-A}{Ma^2} = 1.08 \times 10^{-3}$

($a = 6.378 \times 10^8$ cm
raggio equatoriale)

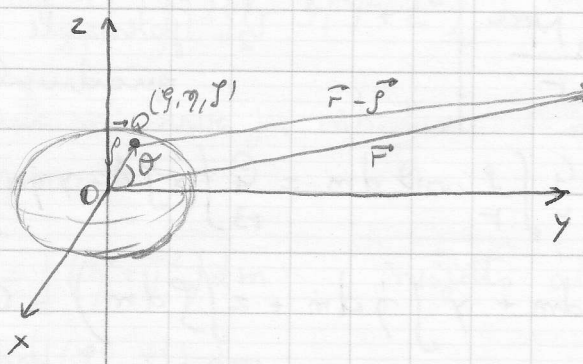
NOTA $\frac{C-A}{A} \simeq 3.27 \times 10^{-3}$ si ricava dalla osservazione della precessione luni-solare
(MUNK - MACDONALD

MECCANICA CELESTE I MOD.

Anna Nobil

IL POTENZIALE GRAVITAZIONALE DI UN CORPO A SIMMETRIA ASSIALE

(Calcolo del termine di quadrupolo) (eq. sferoide oblato)



$$U(x,y,z) = G\int \frac{dm}{|\vec{r}-\vec{\rho}|} \qquad (1)$$

$$|\vec{r}-\vec{\rho}| = \left[(\vec{r}-\vec{\rho})\cdot(\vec{r}-\vec{\rho})\right]^{1/2} = \left(r^2+\rho^2-2\vec{r}\cdot\vec{\rho}\right)^{1/2}$$

$$U = G\int \frac{dm}{r\left(1+\frac{\rho^2}{r^2}-2\frac{\vec{r}\cdot\vec{\rho}}{r^2}\right)^{1/2}}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2\vec{r}\cdot\vec{\rho}}{r^2}\right)^{1/2}} \equiv \frac{1}{(1+\varepsilon)^{1/2}} \simeq 1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{3}{8}\varepsilon^2 = \qquad (2)$$

$$\varepsilon = -2\frac{\rho}{r}\cos\theta + \frac{\rho^2}{r^2}$$

$$= 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho^2}{r^2}-2\frac{\rho}{r}\cos\theta\right)+\frac{3}{8}\cdot 4\frac{\rho^2}{r^2}\cos^2\theta =$$

$$= 1+\frac{\rho}{r}\cos\theta+\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)\frac{\rho^2}{r^2}+\dots \qquad (3)$$

$$U = \frac{G}{r}\int dm + \frac{G}{r}\int \frac{\rho}{r}\cos\theta\, dm + \frac{G}{r}\int \frac{\rho^2}{r^2}\cdot\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\, dm + \dots \quad (4)$$

↑ pot. di monopolo: $U_0 = \frac{GM}{r}$ ↑ U_2 potenziale di quadrupolo

pot. di dipolo $U_1 = \frac{G}{r}\int \frac{\rho}{r}\cos\theta\, dm = \frac{G}{r^3}\int (x\xi + y\eta + z\zeta)\, dm =$

$$= \frac{G}{r^3}\left(x\int \xi\, dm + y\int \eta\, dm + z\int \zeta\, dm\right) = 0 \quad (5)$$

perché l'origine del sistema è nel centro di massa del corpo:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\left(\int \vec{\rho}\, dm\right)$$

↑ ciascuna delle sue 3 coordinate è nulla

$\vec{\rho} \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ vettore posizione dell'elemento di massa dm

⇓

IL CAMPO GRAV. NON HA POTENZIALE DI DIPOLO

Calcoliamo il potenziale di quadrupolo:

$$U_2 = \frac{G}{2r^3}\int \rho^2\left(3\cos^2\theta - 1\right) dm = \quad (6)$$

$$= \frac{G}{2r^3}\left(-\int \rho^2 dm + 3\int \rho^2\cos^2\theta\, dm\right)$$

$\rho\cos\theta = X$ proiezione di $\vec{\rho}$ lungo $O\vec{P}$

$$\rho^2 = x^2+y^2+z^2$$

$$U_2 = \frac{G}{2r^3}\left(3\int x^2 dm - \int \rho^2 dm\right) = \frac{G}{2r^3}\left(\int (3x^2-\rho^2)dm + 2\int \rho^2 dm\right) =$$

$$= \frac{G}{2r^3}\int [2\rho^2 - 3(y^2+z^2)]\,dm \qquad (7)$$

Questo mi serve per introdurre i momenti principali di inerzia:

$$A = \int (\eta^2+\rho^2)\,dm \qquad \text{rispetto all'asse } x \qquad (8)$$

$$B = \int (\xi^2+\rho^2)\,dm \qquad y$$

$$C = \int (\xi^2+\eta^2)\,dm \qquad z$$

$$\Rightarrow A+B+C = \int 2\rho^2 dm$$

$$I = \int (y^2+z^2)\,dm \qquad \text{rispetto all'asse } OP \qquad (9)$$

$\uparrow$ distanza^2 dell'elemento dm dall'asse OP

Quindi, in generale ho:

$$U_2 = \frac{G}{2r^3}(A+B+C-3I) \qquad (10)$$

U_2: potenziale di quadrupolo nel punto P

I: momento di inerzia rispetto all'asse OP

* Si nota che se x,y,z sono gli assi di simmetria dello sferoide, allora $\int \xi\eta\,dm = \int \eta\rho\,dm = \int \xi\rho\,dm = 0$

Questo è vero in generale se x,y,z sono gli assi principali di inerzia del corpo

Nella (10) le coordinate del punto P in cui si calcola il potenziale sono in I (e nella dipendenza $1/r^3$).
Uso per P coordinate polari: r, λ, ϕ ← latitudine
↑ longitudine

$$\vec{r} = (x, y, z) = (r\cos\lambda\cos\phi,\ r\sin\lambda\cos\phi,\ r\sin\phi) \qquad (11)$$

$$I = \int (y^2 + z^2)\, dm = \frac{1}{r^2} \int |\vec{\rho} \times \vec{r}|^2 dm$$

↑ lo svolgo tenendo conto che gli assi x, y, z sono gli assi principali di inerzia del corpo ⇒ gli elementi del tensore di inerzia fuori dalla diagonale sono nulli. Trovo:

* → vedi nota

$$U_2^{(r,\lambda,\phi)} = \frac{G}{r^3}\left[\left(C - \frac{A+B}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sin^2\phi\right) - \frac{3}{4}(A-B)\cos^2\phi\cos 2\lambda\right] \qquad (12)$$

↑ potenziale di quadrupolo (nel riferimento dei suoi assi principali di inerzia) di un corpo scritto in coordinate polari

Se adesso prendo il caso dello SFEROIDE

⇓

$A = B$ (scompare ovviamente la dipendenza da λ)

$$U_2(r, \phi) = -\frac{G}{r^3}(C - A)\,\frac{3\sin^2\phi - 1}{2} \qquad (13)$$

↑

$$P_2(\sin\phi) = \frac{3\sin^2\phi - 1}{2}$$

è il polinomio di Legendre di grado 2 in $\sin\phi$

$\rightarrow *$ $I = \frac{1}{r^2} \int |\vec{\rho} \times \vec{r}|^2 \, dm$ $\qquad \vec{\rho} \equiv (\xi, \eta, \zeta)$

$\vec{r} \equiv (r \cos\phi \cos\lambda,\ r \cos\phi \sin\lambda,\ r \sin\phi)$

$(\vec{\rho} \times \vec{r})_x = r\eta \sin\phi - r\zeta \cos\phi \sin\lambda$

$(\vec{\rho} \times \vec{r})_y = r\xi \cos\phi \cos\lambda - r\zeta \sin\phi$

$(\vec{\rho} \times \vec{r})_z = r\xi \cos\phi \sin\lambda - r\eta \cos\phi \cos\lambda$

$I = \frac{1}{r^2} \int |\vec{\rho} \times \vec{r}|^2 dm = \int (\eta^2 + \zeta^2) \sin^2\phi \, dm + \int (\xi^2 + \zeta^2) \cos^2\phi \, dm$

$+ \int (\eta^2 - \xi^2) \cos^2\phi \cos^2\lambda \, dm = \sin^2\phi \int (\eta^2 + \zeta^2) dm +$

$+ \cos^2\phi \int (\xi^2 + \zeta^2) dm + \cos^2\phi \cos^2\lambda \int (\eta^2 - \xi^2) dm =$

$= C \sin^2\phi + B \cos^2\phi + (A - B) \cos^2\phi \cos^2\lambda$

Tutti gli integrali $\int \xi\eta \, dm = \int \eta\zeta \, dm = \int \xi\zeta \, dm = 0$

perché gli assi scelti sono gli assi principali d. inerzia del corpo

Allora:

$U_2(r, \lambda, \phi) = \frac{G}{2r^3} \left(A + B + C - 3C \sin^2\phi - 3B + 3B \sin^2\phi \right.$

$\left. - 3(A - B) \cos^2\phi \cos^2\lambda \right)$

$\cos^2\lambda = \frac{\cos 2\lambda + 1}{2}$

$$U_2 = \frac{q}{r^3}\left(\frac{C}{2} - C\frac{3\sin^2\phi}{2} - \frac{1}{2}\frac{(A+B)}{2} + \frac{1}{2}(A+B)\frac{3\sin^2\phi}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{3}{4}(A-B)\cos^2\phi\cos 2\lambda\right)$$
$$= \frac{q}{r^3}\left[\left(C - \frac{A+B}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sin^2\phi\right) - \frac{3}{4}(A-B)\cos^2\phi\cos 2\lambda\right]$$

$$= \frac{q}{r^3}\left[\left(\frac{A+B}{2} - C\right)P_2(\sin\phi) - \frac{3}{4}(A-B)\cos^2\phi\cos 2\lambda\right]$$

$$P_2(\sin\phi) = \frac{3\sin^2\phi - 1}{2}$$

$$U_2(r,\phi) = -\frac{G}{r^3}(C-A)\,P_2(\sin\phi) \qquad (14)$$

In genere si scrive come:

$$U_2(r,\phi) = -\frac{GM}{r}\left(\frac{C-A}{Ma^2}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\sin\phi)$$

$a \equiv$ raggio equatoriale del corpo

$$J_2 \equiv \frac{C-A}{Ma^2} \qquad (15)$$

$$= -\frac{GM}{r} J_2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\sin\phi) \qquad (16)$$

E in generale, per il potenziale di un corpo sviluppato fino al quadrupolo: (↓ assialsimmetrico)

$$U = \frac{GM}{r}\left[1 - J_2\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\sin\phi)\right] \qquad (17)$$

Più in generale (sempre considerando solo le anomalie di distribuzione di massa a simmetria assiale):

$$U = \frac{GM}{r}\left[1 - \sum_{\ell=2}^{+\infty} J_\ell \left(\frac{a}{r}\right)^\ell P_\ell(\sin\phi)\right]$$

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left[(x^2-1)^\ell\right] \qquad \text{Polinomi di Legendre}$$

es: $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$

⋮

MECCANICA CELESTE A. Nobile

MOTI DELLA TERRA COME CORPO RIGIDO

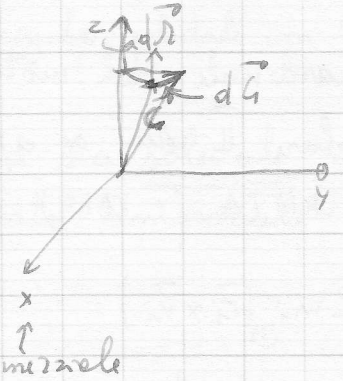
- Corpo rigido: riferimento inerziale e riferimento "body-fixed"

$$\left(d\vec{\zeta}\right)_{iner} = \left(d\vec{\zeta}\right)_{bf} + d\vec{\mathcal{R}} \times \vec{\zeta}$$

($\left(d\vec{\zeta}\right)_{bf}$: nullo se $\vec{\zeta}$ è solidale col corpo)

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{d\vec{\zeta}}{dt}\right)_{iner} = \left(\frac{d\vec{\zeta}}{dt}\right)_{bf} + \vec{\omega} \times \vec{\zeta}$$



$\vec{\zeta}$ vettore solidale al corpo

$d\vec{\mathcal{R}}$: rotazione infinitesima

$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\mathcal{R}}}{dt}$ velocità angolare di rotazione del corpo

In generale, varrà l'equazione ha operatori:

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\right)_{iner} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{bf} + \vec{\omega}\times}$$

(1)

ORIGINE NEL C.M.

che si può applicare ad un qualunque vettore. E.g., per il vettore posizione $\vec{r}_i$ della i-esima particella di un corpo rigido abbiamo:

$$\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)_{iner} = \vec{0} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$\boxed{\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i}$$ ← velocità di un generico elemento del corpo rigido rispetto al riferimento inerziale.

• Eq. di moto della Terra come corpo rigido (Vedi NOTA * →)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \qquad (3)$$

eq. cardinale del moto di un corpo rigido di momento angolare $\vec{L}$ cui si applica un torque $\vec{N}$. La (3) E' SCRITTA (e VALE) NEL RIFERIMENTO INERZIALE.

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \qquad (4)$$

(nel caso continuo si passa all'integrale)

$$\vec{L} = \sum_i m_i \left(\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \right) = \sum_i m_i \left(\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \right)$$

$$\begin{cases} L_x = \omega_x \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i \\ L_y = -\omega_x \sum_i m_i y_i x_i + \omega_y \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) - \omega_z \sum_i m_i y_i z_i \\ L_z = -\omega_x \sum_i m_i z_i x_i - \omega_y \sum_i m_i z_i y_i + \omega_z \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{cases} \qquad (5)$$

La (5) la scrivo come:

$$\vec{L} = \mathbb{I} \cdot \vec{\omega} \qquad (6)$$

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{tensore d'inerzia del corpo} \qquad (7)$$

EQUAZIONI DI EULERO PER IL MOTO DI UN CORPO RIGIDO

Rif. B.F. ("body-fixed"): Origine nel centro di massa del corpo, solidale con il corpo rigido che ruota a velocità angolare $\vec{\omega}$ rispetto al R.I. (riferimento inerziale)

R.I: Origine nel C.M. del corpo rigido; solidale con le stelle fisse (Riferimento Inerziale)

Un qualunque vettore $\vec{G}$ che sia solidale con il corpo rigido ha una derivata temporale rispetto al R.I. data da:

$$(\dot{\vec{G}})_{R.I.} = \vec{\omega} \times \vec{G} \qquad (1)$$

Se invece $\vec{G}$ non è solidale con il corpo, ma varia rispetto ad esso con $(\dot{\vec{G}})_{B.F.} \neq 0$, allora

$$(\dot{\vec{G}})_{R.I} = (\dot{\vec{G}})_{B.F.} + \vec{\omega} \times \vec{G} \qquad (2)$$

la (2) vale per qualunque vettore, compreso $\vec{\omega}$, quindi:

$$(\dot{\vec{\omega}})_{R.I.} = (\dot{\vec{\omega}})_{B.F.} \qquad (3)$$

Considero il momento angolare di rotazione proprio del corpo (rispetto al R.I.) $\vec{L}$ che si scrive: (partendo dalle definizioni di m.a. di rotazione)

$$\vec{L} = \mathbb{I}\,\vec{\omega} \qquad (4)$$

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

tensore d'inerzia

$$I_{xx} = \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2)$$

$$I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i$$

Se la (4) la scrivo nel riferimento B.F. il tensore d'inerzia è costante e quindi:

$$(\dot{\vec{L}})_{B.F.} = \mathbb{I}\,(\dot{\vec{\omega}})_{B.F.} \qquad (5)$$

D'altro canto, la legge fondamentale della dinamica del corpo rigido mi dice che:

$$\left(\dot{\vec{L}}\right)_{R.I.} = \vec{N}^{(e)} \qquad (6)$$

dove $\vec{N}^{(e)}$ è la risultante dei momenti di tutte le forze esterne applicate al corpo rigido. Quindi la (2), nel caso del vettore $\vec{L}$, diventa:

$$\vec{N}^{(e)} = \left(\mathbb{I}\,\dot{\vec{\omega}}\right)_{B.F.} + \vec{\omega} \times \underbrace{\left(\vec{L}\right)}_{\mathbb{I}\vec{\omega}} \qquad (7)$$

- Notate che se $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ (i.e. il tensore d'inerzia è diagonale e i 3 momenti principali di inerzia sono uguali; oppure, il vettore $\vec{\omega}$ coincide con uno degli assi principali di inerzia del corpo), allora $\vec{\omega} \times \vec{L} = 0$ e il momento delle forze può solo accelerare o rallentare la rotazione ω se ha una componente lungo $\vec{\omega}$
- Se il riferimento B.F. è anche quello degli assi principali di inerzia del corpo, in essi il tensore $\mathbb{I}$ è diagonale. E se inoltre esprimo tutti i vettori della (7) in questo riferimento ottengo le eq. di Eulero nella solita forma → cioè le scrivo con le loro coordinate nel riferimento BF

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z (I_2 - I_3) &= N_x^{(e)} \\ I_2 \dot{\omega}_y - \omega_z \omega_x (I_3 - I_1) &= N_y^{(e)} \\ I_3 \dot{\omega}_z - \omega_x \omega_y (I_1 - I_2) &= N_z^{(e)} \end{aligned} \qquad (8)$$

dove le coordinate x, y, z sono, per ciascun vettore, quelle del rifer. B.F. coincidente con gli assi principali di inerzia del corpo.

$$I_{xx} = \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) \quad , \quad I_{yy} = \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) \qquad (8)$$

$$I_{zz} = \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2)$$

↑ momenti d'inerzia

$$I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i \qquad I_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i \qquad I_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i \qquad (9)$$

$I_{xy} = I_{yx}$ $\qquad$ $I_{xz} = I_{zx}$ $\qquad$ $I_{yz} = I_{zy}$

↑ prodotti d'inerzia

Nel caso continuo:

$$I_{xx} = \int \rho (r^2 - x^2) dV$$

Nota che è sempre possibile diagonalizzare il tensore d'inerzia, cioè scriverlo in un riferimento x, y, z in cui i suoi elementi fuori dalla diagonale sono nulli. Gli assi x, y, z si diranno allora assi principali di inerzia del corpo e i tre elementi di $\mathbb{I}$ nella diagonale "momenti principali di inerzia".

Per l'energia cinetica T del corpo si ha:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) =$$

$$= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I} \cdot \vec{\omega} =$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 \, \vec{n} \cdot \mathbb{I} \cdot \vec{n} \qquad (9)$$

$\vec{\omega} = \omega \vec{n}$ = versore di rotazione

Si vede che:

$$\vec{n}\cdot\mathbb{I}\cdot\vec{n} = \sum_i m_i\left(r_i^2 - (\vec{r}_i\cdot\vec{n})^2\right) \qquad (10)$$

$\parallel$

I che è il momento d'inerzia attorno all'asse di rotazione $\vec{n}$

Quindi:

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (11)$$

Tornando all'eq. di moto del corpo rigido, usando la (1) di pag. 18:

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{iner} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{bf} + \underbrace{\vec{\omega}\times\vec{L}}_{\vec{\omega}\times\mathbb{I}\vec{\omega}} \qquad (12)$$

$\uparrow$ $\vec{N}$

$\parallel$

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\mathbb{I}\vec{\omega}\right)\right)_{bf} = \mathbb{I}\cdot\dot{\vec{\omega}}$$

$\dot{\vec{\omega}}$ ← variazione della velocità angolare del riferimento body-fixed

$\uparrow$ perché il tensore d'inerzia di un corpo rigido non varia nel tempo

Poiché è sempre possibile diagonalizzare il tensore d'inerzia passando al sistema di riferimento (ben sempre fisso nel corpo) degli assi principali, assumo che il sistema body-fixed sia in effetti quello degli assi principali.

Quindi

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{L} = \mathbb{I}\cdot\vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_1\omega_x \\ I_2\omega_y \\ I_3\omega_z \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Quindi la (12) diventa:

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z (I_2 - I_3) = N_x \\ I_2 \dot{\omega}_y - \omega_z \omega_x (I_3 - I_1) = N_y \\ I_3 \dot{\omega}_z - \omega_x \omega_y (I_1 - I_2) = N_z \end{cases} \quad (14)$$

↙ tutti i vettori sono espressi con le loro coordinate nel riferimento BF degli assi principali di inerzia del corpo

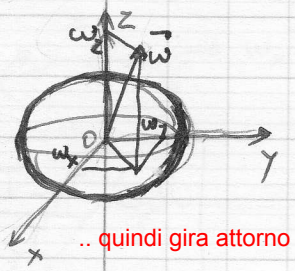
che sono le <u>equazioni di Eulero</u> per il moto di un corpo rigido di momenti principali di inerzia I_1, I_2, I_3 soggetto ad un torque esterno $\vec{N} \equiv (N_x, N_y, N_z)$

• Precessione libera della Terra rigida

Consideriamo la Terra come un corpo <u>rigido</u> nella forma di uno sferoide oblato con momenti principali di inerzia

I_3 rispetto all'asse z $\quad (I_3 > I_1)$

$I_1 = I_2$ rispetto agli assi x, y $\quad (15)$



<u>Oxyz</u>: riferimento (bf) degli assi principali di inerzia del corpo

.. quindi gira attorno all'asse z con la componente z della velocità angolare della Terra

Ora assumiamo anche che questa Terra ruoti con una velocità angolare $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ e che non sia soggetta ad alcun torque esterno, cioè:

$$\vec{N} = \vec{0} \quad (16)$$

Notare che $\vec{\omega}$ ha componenti ω_x, ω_y non nulle, cioè il corpo non ruota esattamente attorno all'asse di simmetria (che è l'asse z).

Le eq. di Eulero (14) ci danno:

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_x = (I_1 - I_3)\,\omega_z \omega_y \\ I_1 \dot{\omega}_y = -(I_1 - I_3)\,\omega_z \omega_x \\ I_3 \dot{\omega}_z = 0 \end{cases} \tag{17}$$

$\Rightarrow \omega_z$ è costante

$$I_1 \ddot{\omega}_x = (I_1 - I_3)\,\omega_z \dot{\omega}_y$$

$$\dot{\omega}_y = -\frac{(I_1 - I_3)}{I_1}\,\omega_z \omega_x$$

$$\boxed{\ddot{\omega}_x = -\left(\frac{I_1 - I_3}{I_1}\,\omega_z\right)^2 \omega_x} \tag{18}$$

e analogamente:

$$\boxed{\ddot{\omega}_y = -\left(\frac{I_1 - I_3}{I_1}\,\omega_z\right)^2 \omega_y} \tag{19}$$

con soluzioni:

$\omega_x = A \sin \Omega t$, $\omega_y = A \cos \Omega t$

$$\boxed{\Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1}\,\omega_z} \tag{20}$$

velocità angolare di precessione

nota che siccome $I_1 - I_3 < 0$ (la Terra è uno sferoide oblato e non prolato), Ω - velocità di precessione - è di SEGNO OPPOSTO ad ω_z

Quindi, nel piano x,y il vettore $\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j}$ ha modulo costante e ruota attorno all'asse z con velocità angolare Ω (di segno opposto ad ω_z), che si chiama velocità angolare di precessione (libera in questo caso perché abbiamo assunto che non ci fosse alcun momento esterno.)

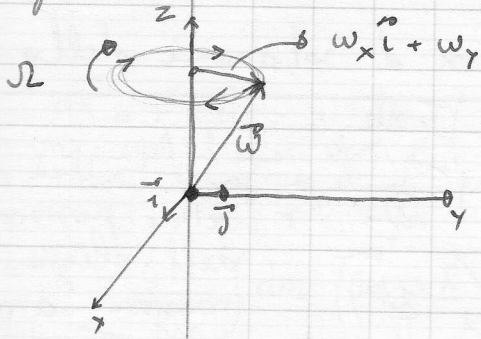
Potevo arrivare a questo risultato in altro modo. Sempre dalle (17):

$$\dot{\omega}_x = \Omega\, \omega_y$$
$$\dot{\omega}_y = -\Omega\, \omega_x$$

cioè, con $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$ ($\hat{z}$: versore dell'asse z)

$$\boxed{\dot{\vec{\omega}} = \vec{\omega} \times \vec{\Omega}} \qquad (21)$$

che esprime estremamente, in forma vettoriale, la precessione del vettore $\vec{\omega}$ intorno ad $\vec{\Omega}$



(notare che, in questo caso in cui $\omega_z > 0$ la precessione avviene in verso orario, cioè negativo, e il vettore $\vec{\Omega}$ è diretto lungo le z negative)

È evidente che se il vettore di rotazione $\vec{\omega}$ fosse diretto lungo

l'asse di simmetria del corpo non ci sarebbe alcuna precessione libera ($\Omega = 0$).

Per la Terra, invece

$$\frac{I_3 - I_1}{I_1} \simeq 3{,}3 \times 10^{-3} \Rightarrow \Omega \simeq \frac{\omega_z}{300} \qquad (22)$$

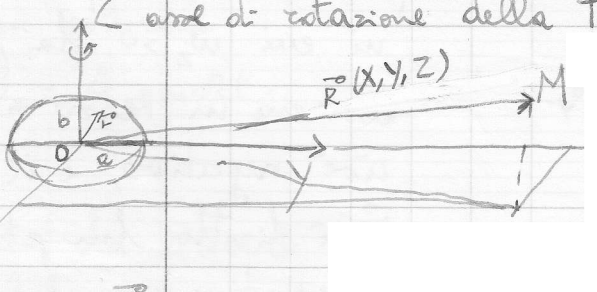
(più il corpo è vicino ad una sfera, più la precessione libera è lenta).

Quindi, il periodo di precessione libera dovrebbe essere di $\simeq 300$ giorni. Quello che si osserva è il Chandler wobble, e il periodo di Chandler è $\simeq 427$ giorni. Questa differenza è dovuta all'elasticità della Terra (mentre noi abbiamo assunto una Terra perfettamente rigida).

Comunque, perché il periodo di Chandler non si smorza? Problema aperto.

Poichè abbiamo visto che x,y,z è il riferimento degli assi principali di inerzia della Terra solidale con la sua rotazione omega_z se ne decuce che in esso (cioè "dentro" la Terra) le omponenti omega_x e omega_y ruotano come mostrato

- Precessione luni-solare dell'asse di rotazione della Terra



$\vec{r}$: vettore posizione dell'elemento di massa dm della Terra

Sistema degli assi principali di inerzia della Terra

$\vec{R}$: vettore posizione del Sole (poi considereremo anche la Luna)

NOTA: il punto cruciale è che il Sole non giace nel piano equatoriale della Terra; ovvero, l'asse di spin della Terra non è esattamente $\perp$ al piano della sua orbita attorno al Sole (piano dell'eclittica)

$$d\vec{F} = GM\,dm\,\frac{(\vec{R}-\vec{r})}{|\vec{R}-\vec{r}|^3}$$ ← forza elementare da parte del Sole sull'elemento di massa dm (23)

$$|\vec{R}-\vec{r}|^{-3} = \left(R^2+r^2-2\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right)^{-3/2} = R^{-3}\left(1+\frac{r^2}{R^2}-2\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right)^{-3/2}$$

$$= R^{-3}\underbrace{\left(1-2\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right)}_{\varepsilon}{}^{-3/2} \simeq R^{-3}\left(1+3\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right)$$

$$(1+\varepsilon)^{-3/2} \simeq 1-\frac{3}{2}\varepsilon$$

Se la densità della Terra è costante (o comuqnue simmetrica attorno all'asse Z) il momento esercitato dal Sole sulla Terra non dipende dalla sua rotazione diurna. Per questo lo possiamo calcolare come se la Terra non stesse ruotando.

$$d\vec{F} \simeq \frac{GM\,dm}{R^3}\left(1+3\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right)(\vec{R}-\vec{r})$$ (24)

Il momento della forza $d\vec{F}$ rispetto al punto O (↑ C.M. della Terra e origine del riferimento) sarà:

$$d\vec{K} = \vec{r}\times d\vec{F} \simeq \frac{GM\,dm}{R^3}\left(1+3\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right)\vec{r}\times\vec{R}$$

$$\vec{K} \simeq \frac{GM}{R^3}\int dm\left(1+3\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right)\vec{r}\times\vec{R}$$ (25)

$$\int dm\,\vec{r}\times\vec{R} \rightarrow \int y\,dm,\ \int z\,dm,\ \int x\,dm \rightarrow$$

che sono tutti nulli perché il vettore posizione del l'elemento di massa dm si riferisce ad una origine che è il C.M. del corpo:

$$\vec{F}_{CM} = \frac{\int dm\,\vec{r}}{\int dm} = \vec{0}$$

Quindi:

$$\vec{K} \cong \frac{3GM}{R^5} \int (\vec{r}\cdot\vec{R})(\vec{r}\times\vec{R})\,dm \qquad (25)$$

$$K_x \cong \frac{3GM}{R^5} \int (xX + yY + zZ)(yZ - zY)\,dm$$

Ricordo che gli assi X, Y, Z sono gli assi principali di inerzia del corpo ⇓

il tensore d'inerzia è diagonale; gli elementi fuori dalla diagonale sono nulli e quelli sulla diagonale sono i momenti principali di inerzia

$$\begin{cases} A = \int dm\,(y^2 + z^2) \\ B = \int dm\,(z^2 + x^2) \\ C = \int dm\,(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (A = B \text{ perché sferoide oblato})$$

$$\int xy\,dm = \int xz\,dm = \int yz\,dm = 0$$

$$C - A = \int (x^2 - z^2)\,dm$$

$$B - A = \int (x^2 - y^2)\,dm = 0$$

Allora, dalla (26) si ha:

$$\begin{cases} K_x = \dfrac{3GM}{R^5} YZ\,(C-A) \\ K_y = -\dfrac{3GM}{R^5} XZ\,(C-A) \\ K_z = 0 \end{cases} \qquad (27)$$

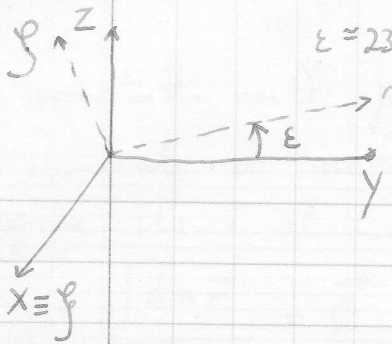
$$K_x = \left[\frac{3GM}{R^5} Z\,(C-A)\right] Y$$

$$K_y = -\left[\frac{3GM}{R^5} Z\,(C-A)\right] X$$

$(\vec{K}\cdot\vec{R} = K_x X + K_y Y + K_z Z = 0)$

$\vec{K} \perp \vec{R}$ $\qquad$ $\vec{K}\cdot\vec{R} = 0$

il momento della forza esercitata dal Sole giace nel piano X, Y ed è in modulo $\propto (C-A)$ - più la Terra è schiacciata più grande è l'effetto. È chiaro che ci sarà una precessione e che il periodo di questa precessione sarà lungo rispetto ad 1 yr ($(C-A)_{\text{annuale}}$) (periodo della Terra intorno al Sole). Allora devo introdurre la longitudine del Sole e mediare su un anno. Poichè il Sole si muove sull'eclittica devo per prima cosa introdurre le coordinate eclittiche e passare al riferimento definito dal piano dell'eclittica (in effetti la Terra) e dal polo dell'eclittica (vettore $\perp$ al piano dell'eclittica)



$\varepsilon \simeq 23°\,1/2$ obliquità dell'eclittica

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \qquad (28)$$

X, Y piano equatoriale Terra
Z asse di spin della Terra

ξ, η piano dell'eclittica ; ζ polo dell'eclittica

Poiché il sole giace sul piano dell'eclittica ξ, η "compiendovi" un giro intorno alla Terra in 1 yr, ed avendo ad un dato istante una longitudine $\lambda_\odot$ (a partire dall'asse $\xi = X$; quindi ξ dà la direzione del punto γ, e siccome la Terra ha simmetria assiale posso benissimo avere l'asse X allineato con l'asse ξ).

Quindi:

$$\vec{R} = (\xi, \eta, \zeta) = (R\cos\lambda_\odot , R\sin\lambda_\odot , 0) \qquad (29)$$

e dalla (28):

$$\vec{R} = (X, Y, Z) = \begin{pmatrix} R\cos\lambda_\odot \\ R\sin\lambda_\odot\cos\varepsilon \\ R\sin\lambda_\odot\sin\varepsilon \end{pmatrix} \qquad (30)$$

Adesso devo scrivere il momento $\vec{\Gamma}$ nel riferimento

ξ, η, ζ e siccome ho K_x, K_y, K_z (vedi le (27)) devo usare la trasformazione inversa alla (28):

$$\begin{pmatrix} K_\xi \\ K_\eta \\ K_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} K_\xi = K_x \\ K_\eta = K_y \cos\varepsilon \\ K_\zeta = -K_y \sin\varepsilon \end{cases} \tag{31}$$

e inoltre, devo scrivere K_x e K_y (vedi le (27)) in termini delle variabili $R, \lambda_\odot, \varepsilon$ attraverso le (30). Ottengo:

$$\begin{cases} K_\xi = \dfrac{3GM}{R^3}(C-A)\cos\varepsilon \sin\varepsilon \sin^2\lambda_\odot \\ K_\eta = -\dfrac{3GM}{R^3}(C-A)\sin\varepsilon \underline{\cos\varepsilon} \underline{\underline{\sin\lambda_\odot \cos\lambda_\odot}} \\ K_\zeta = +\dfrac{3GM}{R^3}(C-A)\sin\varepsilon \underline{\sin\varepsilon} \underline{\underline{\sin\lambda_\odot \cos\lambda_\odot}} \end{cases} \tag{33}$$

$$\begin{cases} \bar{K}_\xi = \frac{3}{2}\frac{GM}{R^3}(C-A)\cos\varepsilon\sin\varepsilon \\ \bar{K}_\eta = \bar{K}_\zeta = 0 \end{cases} \qquad (33)$$

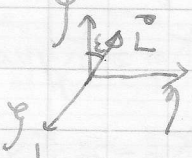
Dato $\vec{L} = C\vec{\omega}_\oplus$ il momento angolare di spin della Terra (rotazione attorno all'asse di massimo momento d'inerzia), si ha:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{K} \qquad (34)$$

la quale appunto che vale in un riferimento inerziale. Usiamo la (1) di pg. (18), cioè:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{inerz} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{bf} + \vec{\Omega}\times$$

$\vec{\Omega}$ sarà la velocità di precessione dovuta al sole (attorno all'asse ξ)



$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{inerz} = 0$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega}\times\vec{L}$$

$\vec{L} = \vec{K}$

$$\Rightarrow \bar{K}_\xi = \left(\vec{\Omega}\times\vec{L}\right)_\xi = \Omega_\zeta L_\xi - \Omega_\xi L_\zeta =$$

$$= -\Omega L_\eta = -\Omega L\sin\varepsilon$$

Il riferimento BF è quello che ha la velocità di rotazione diurna della Terra + quella di precessione ed è solidale con i suoi assi principlai di inerzia.

$$\Rightarrow \Omega = -\frac{K_\xi}{L\sin\varepsilon} \qquad (34)$$

$$\Omega_\odot \simeq -\frac{3}{2}\left(\frac{n_\oplus}{\omega_\oplus}\right) n_\odot \frac{C-A}{C}\cos\varepsilon \qquad (35)$$

$2\pi/1\,yr$

$\sim 1/365$ $\qquad$ $\sim 1/300$

$$\boxed{\Omega = -\frac{3}{2}\frac{GM}{R^3}\frac{C-A}{C}\frac{1}{\omega_\oplus}\cos\varepsilon}$$

NOTA: la precessione avviene in senso opposto allo spin

Anche la Luna eserà effetto. Precisamente:

$$\Omega_{\odot} = -\frac{3}{2}\frac{GM_{\odot}}{d_{\oplus\odot}^3}\frac{C-A}{C}\frac{1}{\omega_{\oplus}}\cos\varepsilon \qquad (36)$$

$$\Omega_{\mathcal{L}} = -\frac{3}{2}\frac{GM_{\mathcal{L}}}{d_{\oplus\mathcal{L}}^3}\frac{C-A}{C}\frac{1}{\omega_{\oplus}}\cos\varepsilon$$

↑ assumo che si medi il piano sia quello dell'elittica

Rapporto tra effetto Luna e effetto sole:

$$\frac{\text{effetto luna}}{\text{effetto sole}} \propto \frac{M_{\mathcal{L}}}{M_{\odot}} \Big/ \frac{d_{\oplus\mathcal{L}}^3}{d_{\oplus\odot}^3} = \frac{7.35\times10^{25}}{1.99\times10^{33}} \Big/ \left(\frac{3.84\times10^{10}}{1.5\times10^{13}}\right)$$

$$= 3.69\,10^{-8} / 1.68\times10^{-8} = 2.2 \qquad (37)$$

Quindi, l'effetto della luna è circa doppio di quello del Sole. Quindi:

$$\Omega_{\text{prec lunisolare}} = \Omega_{\odot} \times 3.2 \qquad (38)$$

NOTA $\frac{C-A}{C}$ non è dato in nessun altro modo, e si ricava in effetti dall'osservazione della precessione lunisolare. Si ha

$\frac{C-A}{C} \simeq 3.27\times10^{-3}$, da cui si ricava

$$T_{\text{prec. lunisolare}} \simeq 26000 \text{ yr} \qquad (39)$$