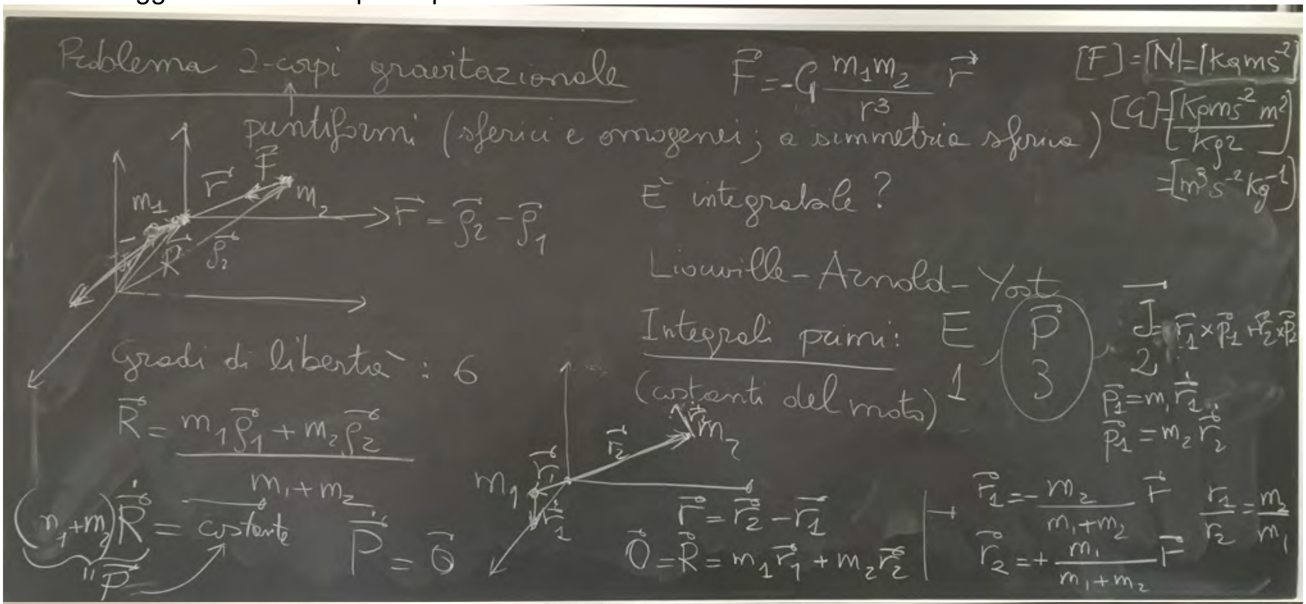
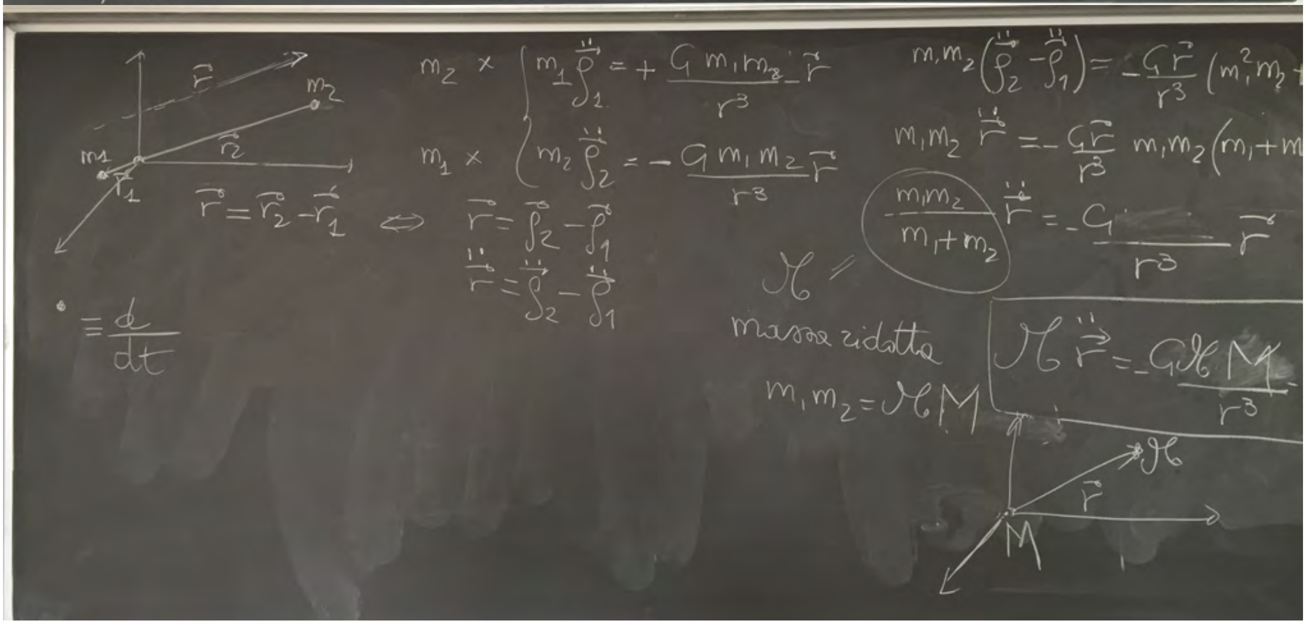
a.a. 2016-2017: foto alla lavagna di tutte le lezioni e sommario degli argomenti principali trattati in ogni lezione

S1 - Lezioni del 28 e 30 Settembre 2016
(23 Settembre 2016: Presentazione del corso)

- Problema dei due corpi gravitazionale, gradi di libertà, integrabilità, integrali primi
- Equazioni del moto, passaggio al problema ridotto ad 1 solo corpo e riduzione a 2 gradi di libertà
- Passaggio a coordinate polari piane



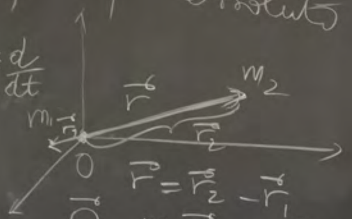


$$\vec F = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec r$$

$$\vec F = m\vec a = \frac{d}{dt}(m\vec v) \quad (\vec p)$$

Rif. Inerziale
Spazio assoluto
Tempo assoluto

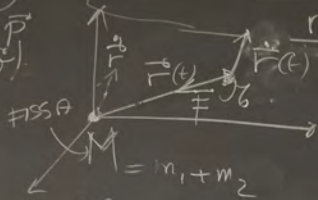
$\cdot \equiv \frac{d}{dt}$



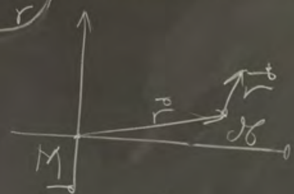
$$\vec r = \vec r_2 - \vec r_1$$
$$\vec 0 = m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2$$

$$\mu \ddot{\vec r} = -\frac{G\mu M}{r^2}\frac{\vec r}{r}$$

Problema ridotto



$M = m_1 + m_2$

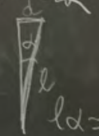


$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M} \quad \text{massa ridotta}$$

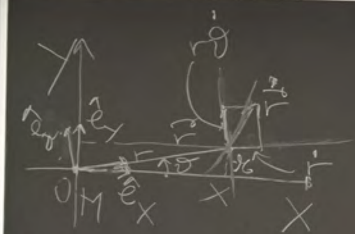
$\vec J = \mu \vec r \times \dot{\vec r}$ momento angolare orbitale totale

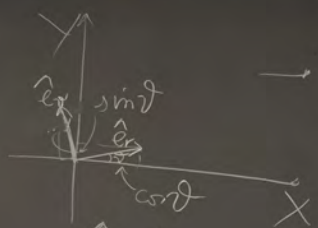
$\vec M = \dot{\vec J} = \vec 0 \Rightarrow \vec J =$ costante

$F \propto \frac{\vec r}{r} \Rightarrow$ moto piano
2 equazioni



$l\alpha = d$





$\vec r = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$

$\vec r = r\hat e_r \qquad \ddot{\vec r}$?

$$\dot{\vec r} = \dot r\hat e_r + r\dot{\hat e}_r = \underbrace{\dot r\hat e_r + r\dot\vartheta\hat e_\vartheta}$$

$\ddot{\vec r} =$

$X \rightarrow \hat e_X = (1,0) \quad \dot{\hat e}_X = \vec 0$

$Y \rightarrow \hat e_Y = (0,1) \quad \dot{\hat e}_Y = \vec 0$

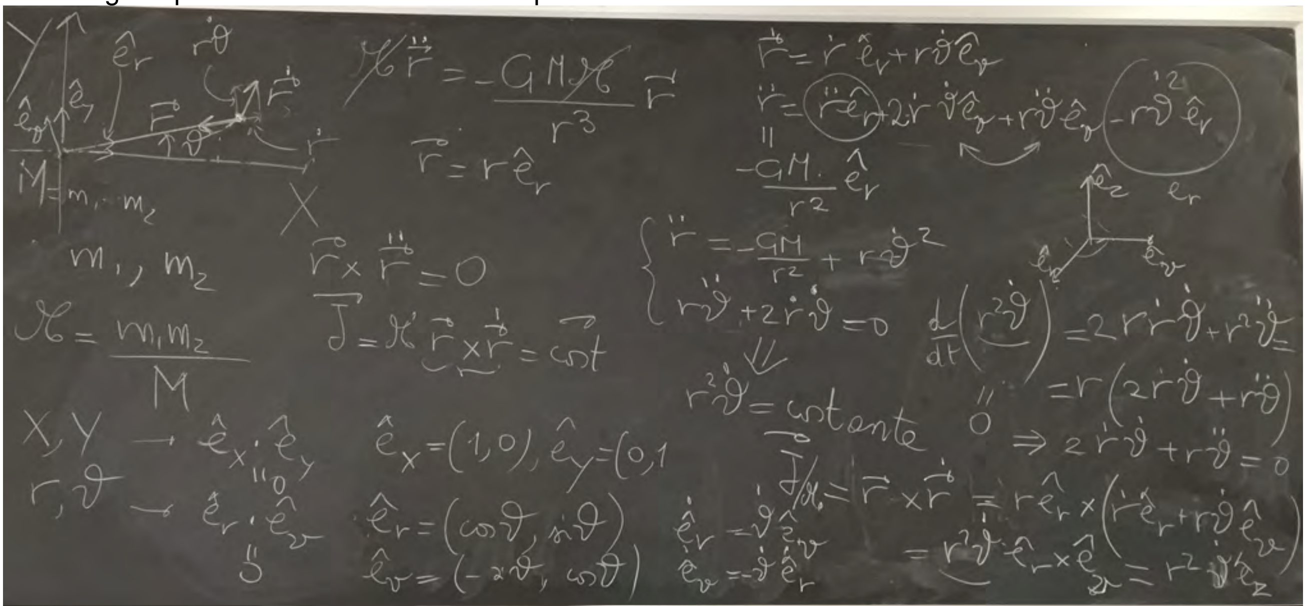
$\hat e_r \cdot \hat e_\vartheta = 0$

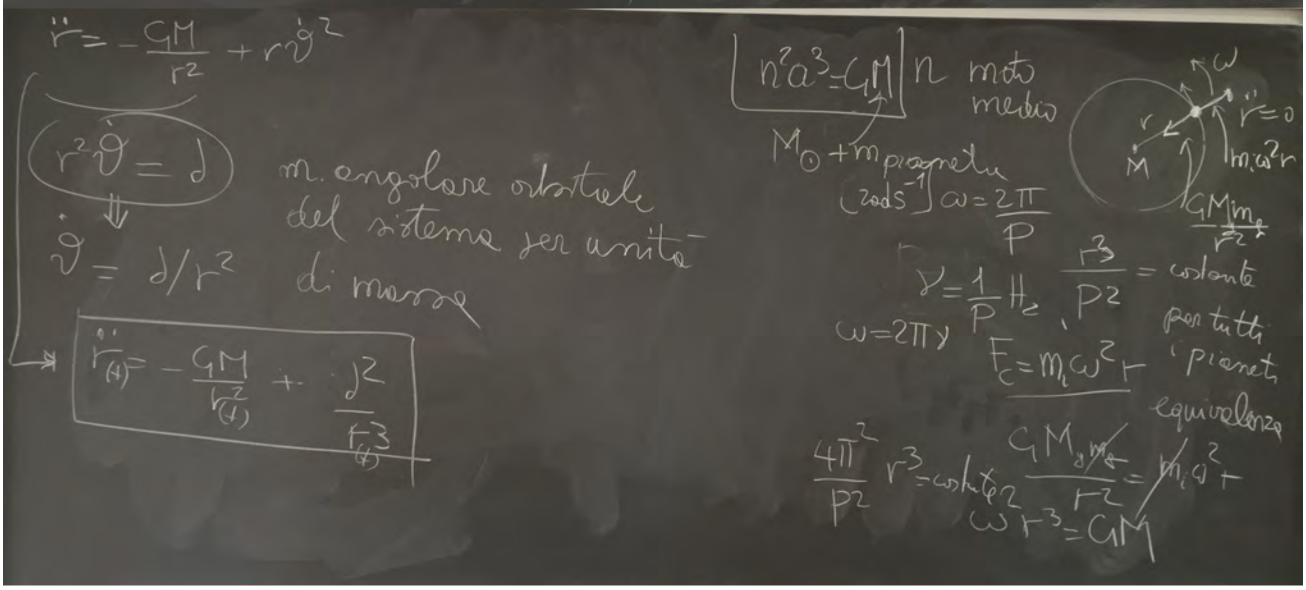
$r \rightarrow \hat e_r = (\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t)) \quad \dot{\hat e}_r = (-\dot\vartheta\sin\vartheta, \dot\vartheta\cos\vartheta) = \dot\vartheta\underbrace{(-\sin\vartheta, \cos\vartheta)}_{?} = \dot\vartheta\hat e_\vartheta$

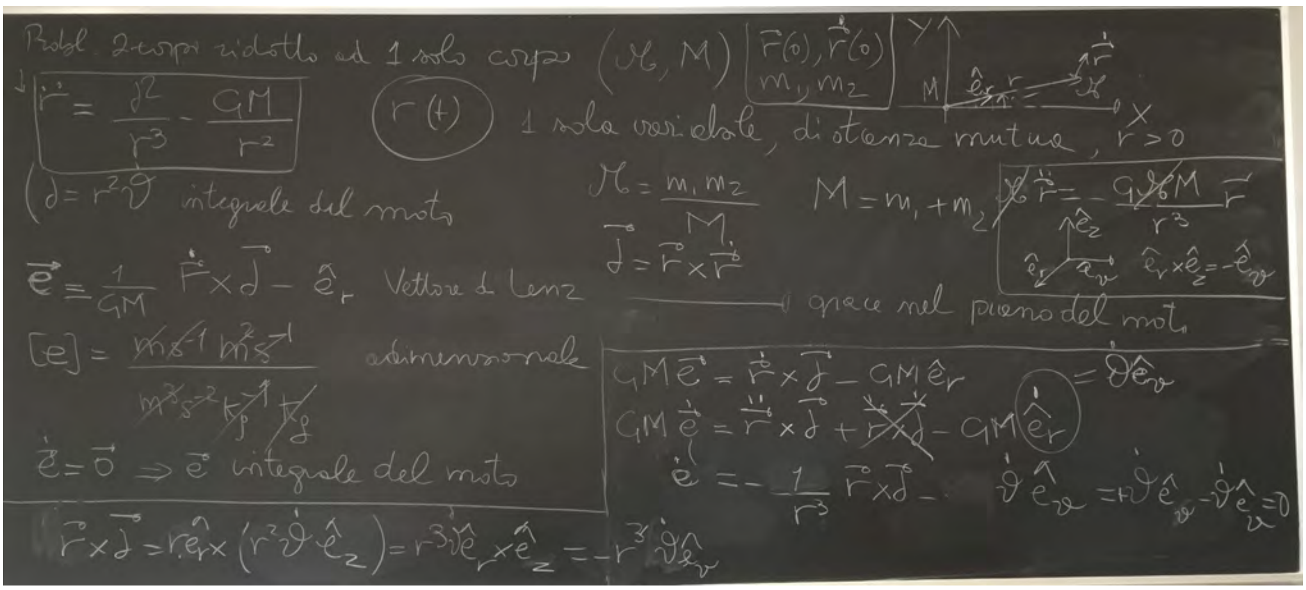
$\vartheta \rightarrow \hat e_\vartheta = (-\sin\vartheta, \cos\vartheta) \quad \dot{\hat e}_\vartheta = -\dot\vartheta(\cos\vartheta, \sin\vartheta) = -\dot\vartheta\hat e_r$

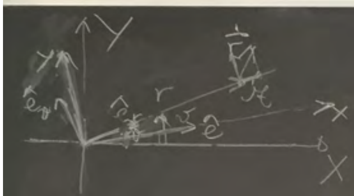
S2 - Lezioni del 5 e 7 Ottobre 2016

- Problema ridotto, passaggio a coordinate polari piano e riduzione ad 1 sola variabile
- Integrale primo del vettore di Lenz e equazione dell'orbita





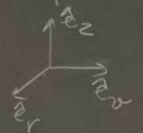




$$e\cos v = \vec e\cdot\hat e_r = \frac{1}{GM}\left(\dot{\vec r}\times\vec J\right)\cdot\hat e_r - 1$$

$$\dot{\vec r}\times\vec J = \left(\dot r\hat e_r + r\dot v\hat e_v\right)\times\left(r^2\dot v\,\hat e_z\right) = r^2\dot r\dot v\,\hat e_r\times\hat e_z + r^3\dot v^2\,\hat e_v\times\hat e_z$$

$$= -r^2\dot r\dot v\,\hat e_v + r^3\dot v^2\,\hat e_r$$



X, Y $\quad x, y \quad$ $\hat e_r, \hat e_v$

r, v

$\hat e_z \parallel \vec J$

$\boxed{\hat e_r\cdot\vec e = e\cos v}$

$\vartheta - \dot v = 0$

$\cos v = \dfrac{\vec e\cdot\hat e_r}{e}$

$\hat e_\vartheta = \hat e_v$

$J = r^2\dot\vartheta = r^2\dot v$

$\dot{\vec r} = \dot r\hat e_r + r\dot v\hat e_v$

$\hat e_\vartheta = (-\sin\vartheta, \cos\vartheta)$

$\hat e_v = (-\sin v, \cos v)$

$$e\cos v = \frac{1}{GM}r^3\dot v^2 - 1 = \qquad \dot v = \frac{J}{r^2}$$

$$= \frac{1}{GM}\cancel{r^3}\frac{J^2}{\cancel{r^4}} - 1$$

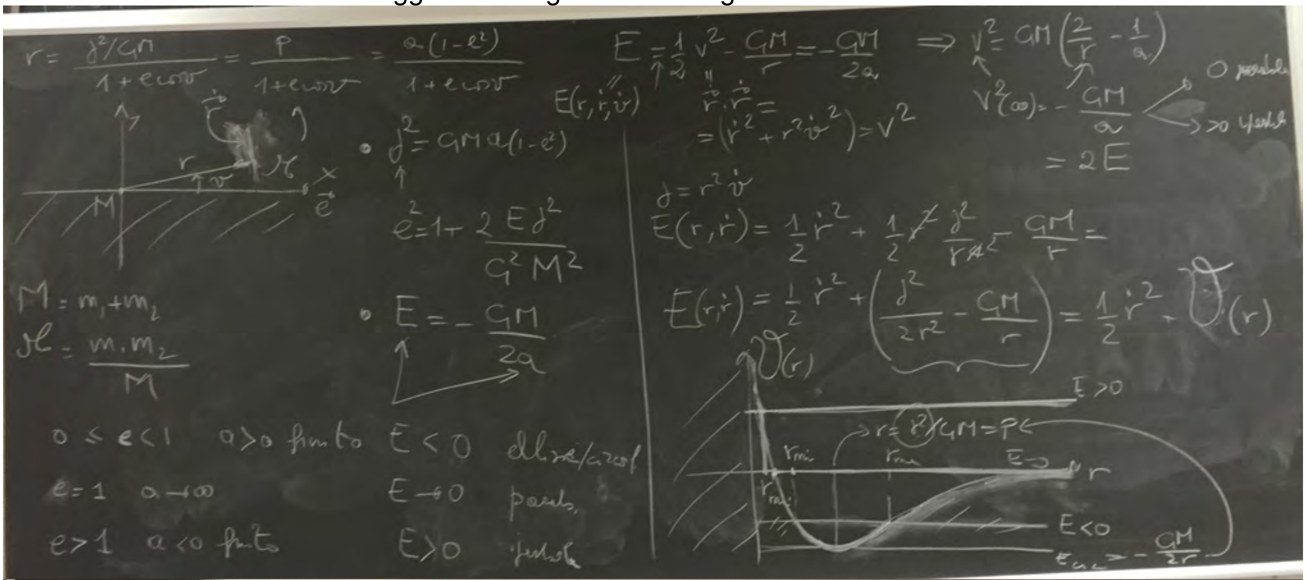
$$1 + e\cos v = \frac{J^2}{GMr}$$

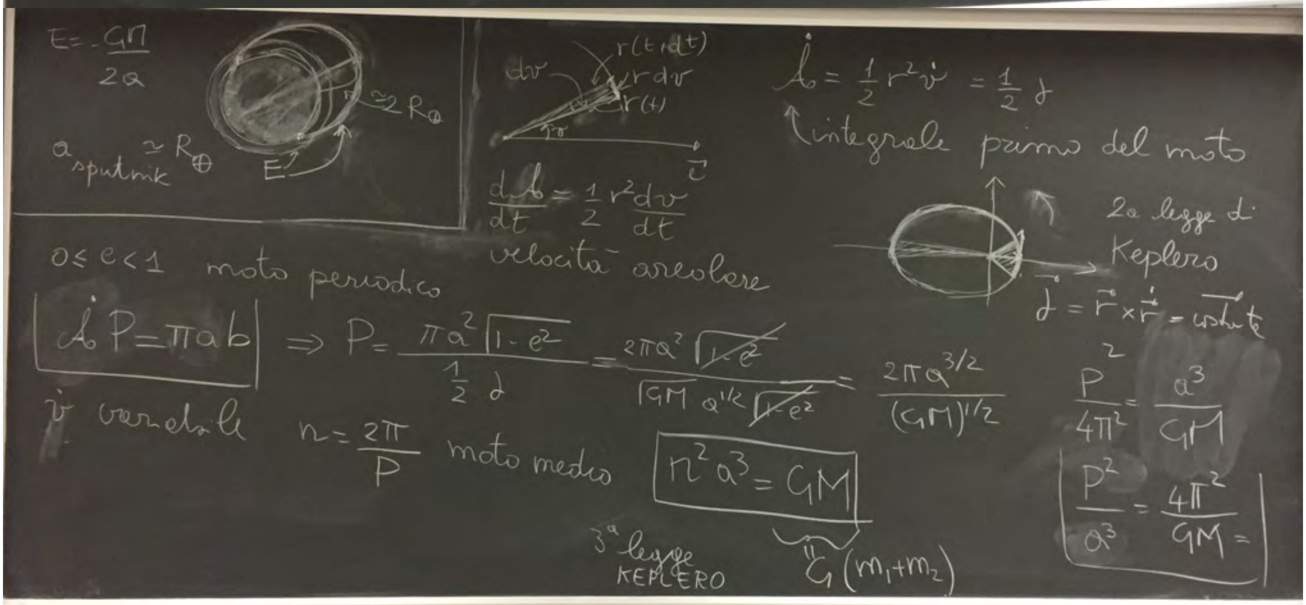
$$\boxed{r = \frac{J^2/GM}{1+e\cos v}} \qquad \frac{m^4 s^{-2}}{m^3 s^{-2}\cancel{kg^{-1}}\cancel{kg}} = m \qquad e > 0$$

$$J^2/GM = p > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{r(t) = \frac{p}{1+e\cos v(t)}}$$

S3 - Lezioni del 12 e 14 Ottobre 2016
(Mancano le foto alla lavagna della lezione del 12 Ottobre)

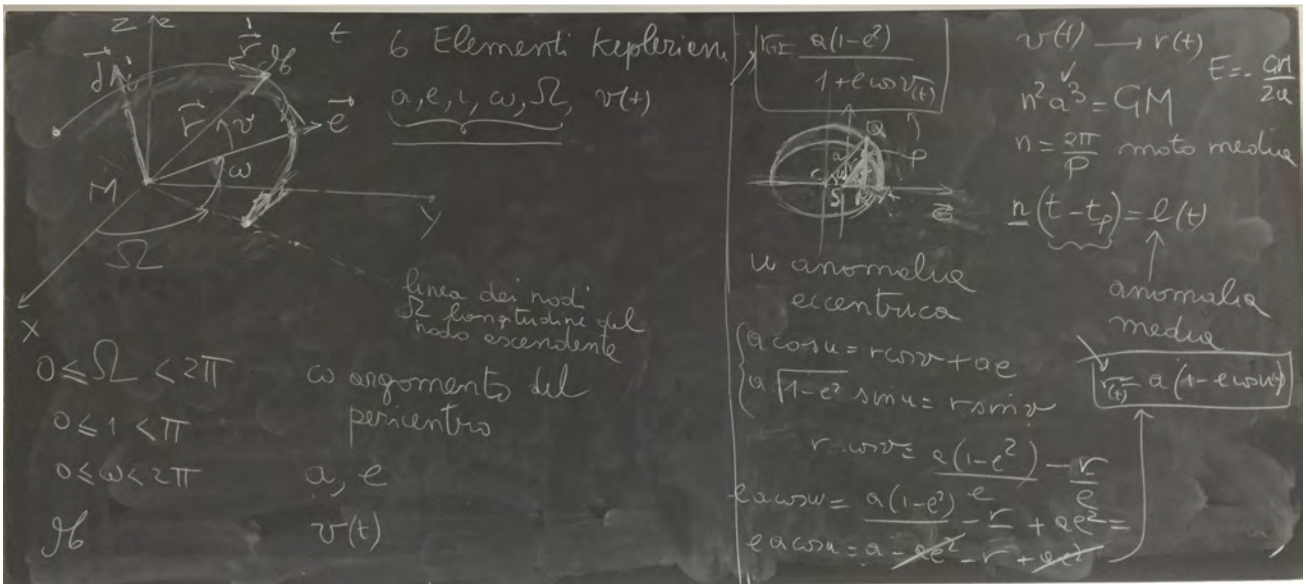
- Classificazione delle orbite e terza legge di Keplero
- Relazione tra semiasse maggiore e integrale dell'energia

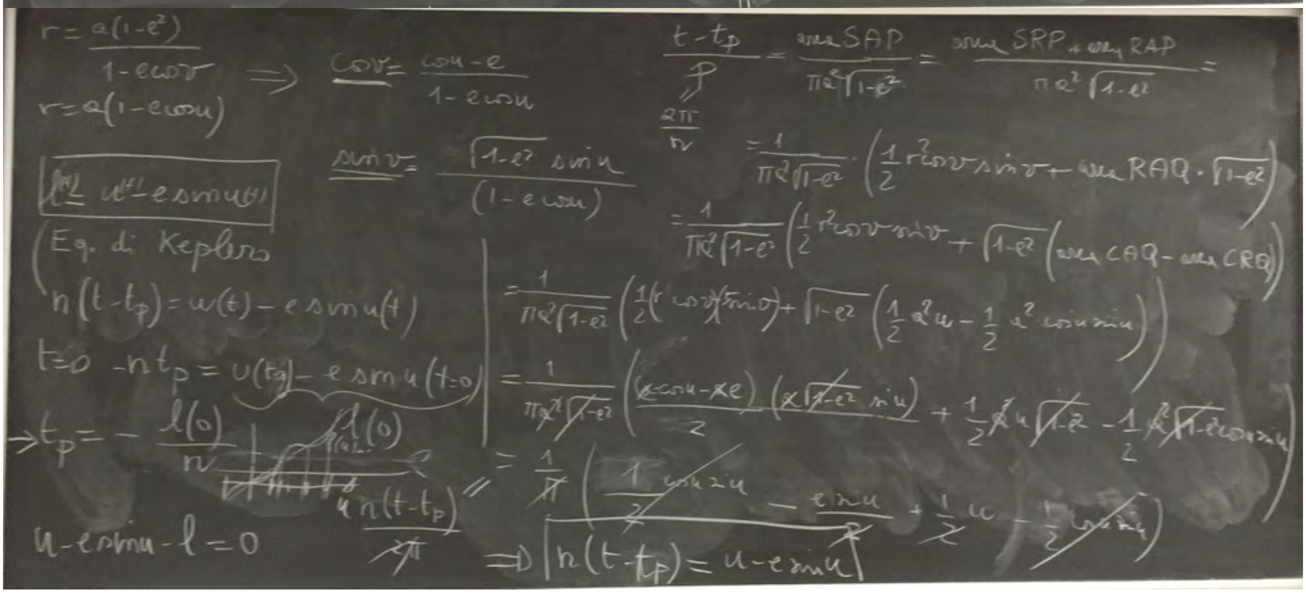


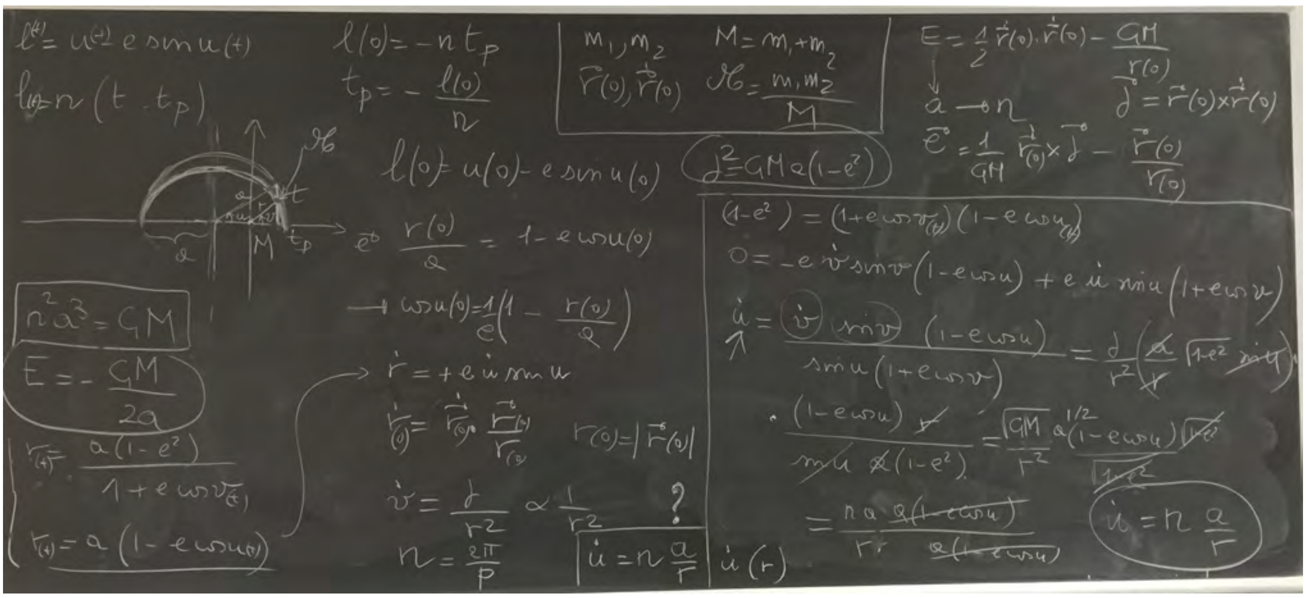


S4 - Lezioni del 19 e 21 Ottobre 2016

– Orbita nello spazio e definizione degli elementi kepleriani
– Definizione di anomalia eccentrica, relazioni con l’anomalia vera, equazione di Keplero e sua soluzione con il metodo di Newton







$$\begin{cases} \cos u(0) = \dfrac{1}{e}\left(1 - \dfrac{r(0)}{a}\right) \\ \sin u(0) = \dfrac{\dot r(0)}{e\,\dot u(0)} = \dfrac{\dot r(0)\, r(0)}{e\, n a} \end{cases}$$

$\downarrow u(0)$

$$\ell(0) = u(0) - e \sin u(0)$$

$\downarrow$

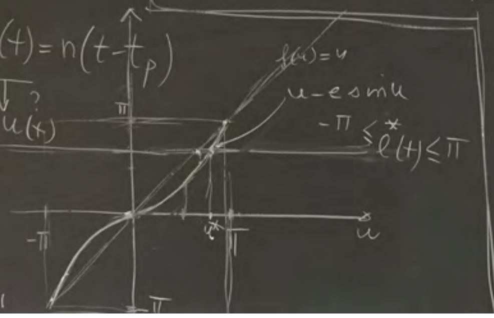
$$t_p = -\frac{\ell(0)}{n} \Rightarrow \ell(t) = n(t - t_p)$$

$\downarrow ?$

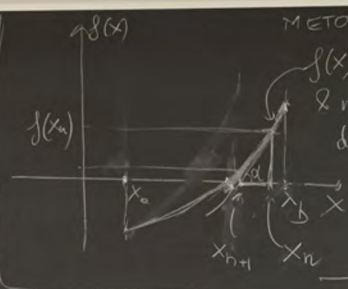
$$\overset{*}{\ell}(t) = u(t) - e \sin u(t) \quad u(t)$$

Eq. di Keplero

$t \quad -\pi \le \ell(t) \le \pi \quad 0<e<1$



METODO DI NEWTON $\quad f(x) = 0 \quad ' \equiv \dfrac{d}{dx}$



$f(x)$ continua e non cambiare di convessità $\left(\text{calcolare } f''(x)\right)$

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

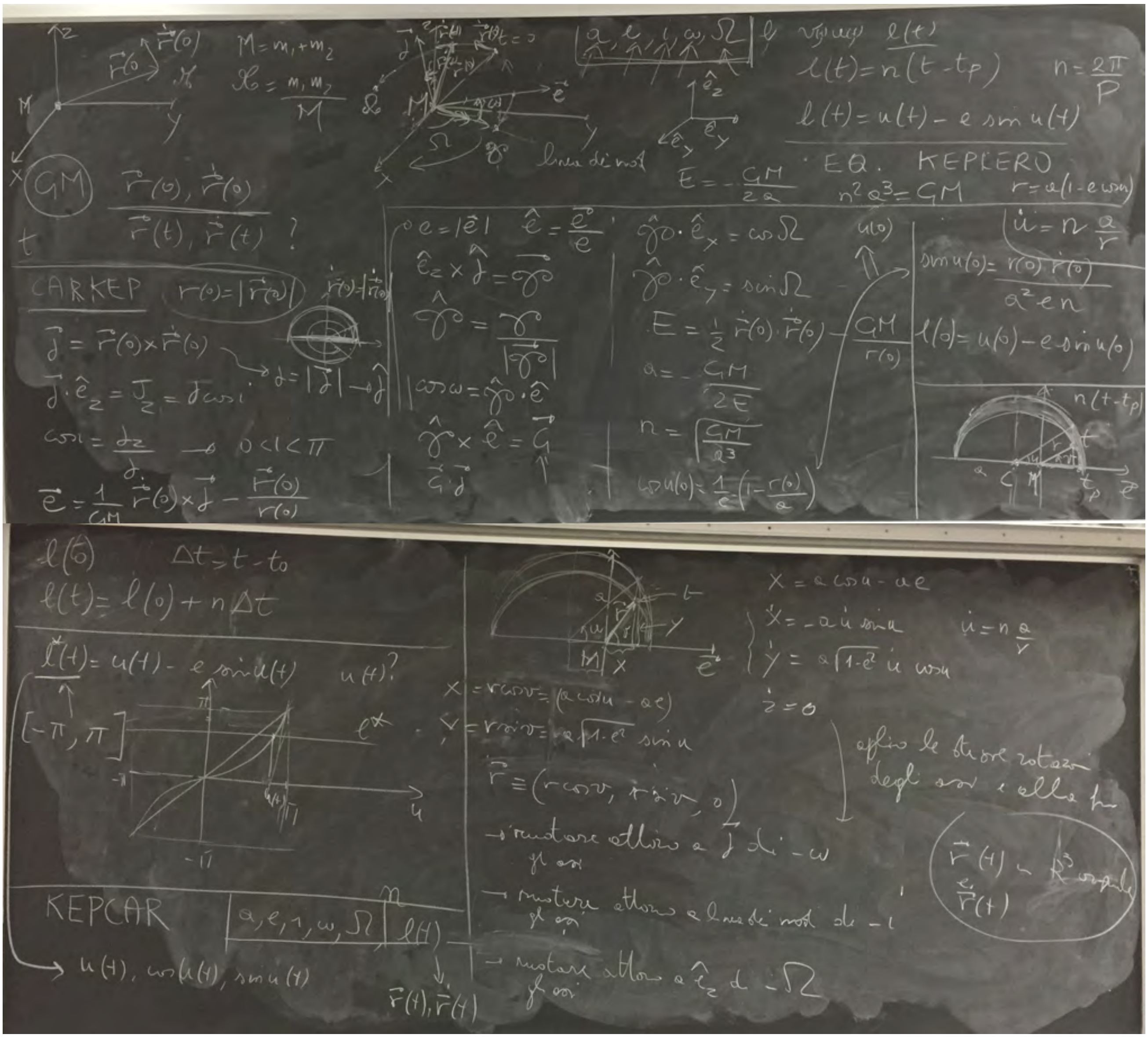
$$\rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \leftarrow$$

$$f(u) = u - e\sin u - \ell = 0$$

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n - e\sin u_n - \ell}{1 - e\cos u_n} \quad \leftarrow$$

S5 - Lezioni del 26 e 28 Ottobre 2016

- Formulario per la soluzione numerica dl problema dei due corpi tramite l'equazione di Keplero
- Rudimenti di FORTRAN



FORTRAN (FORmula TRANslator)

Variabili: 6 caratteri (alfanumerici) inizio: lettera

A-H, O-Z reale

I, J, K, L, M, N intero

+, -, *, /

**

→ A = B

X = X + 1

DIMENSION A(N)

- FUNCTION
- SUBROUTINE

↑ Program KEPLEQ

inizializzazione della variabile prscal

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION PRSCAL (a,b)

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
dimension a(3), b(3)
prscal = 0.dø
do 1 i=1,3
   prscal = prscal + a(i)*b(i)
1 continue
```

$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \vec{a} \cdot \vec{b}$

```
      subroutine prvec (a,b,c)
c     axb=c
      c(1)=a(2)*b(3) - a(3)*b(2)
      c(2)=a(3)*b(1) - a(1)*b(3)
      c(3)=a(1)*b(2) - a(2)*b(1)
      return
      end
```

$\vec{a}, \vec{b}$

$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$

vlinc (alfa, a, beta, b, c)

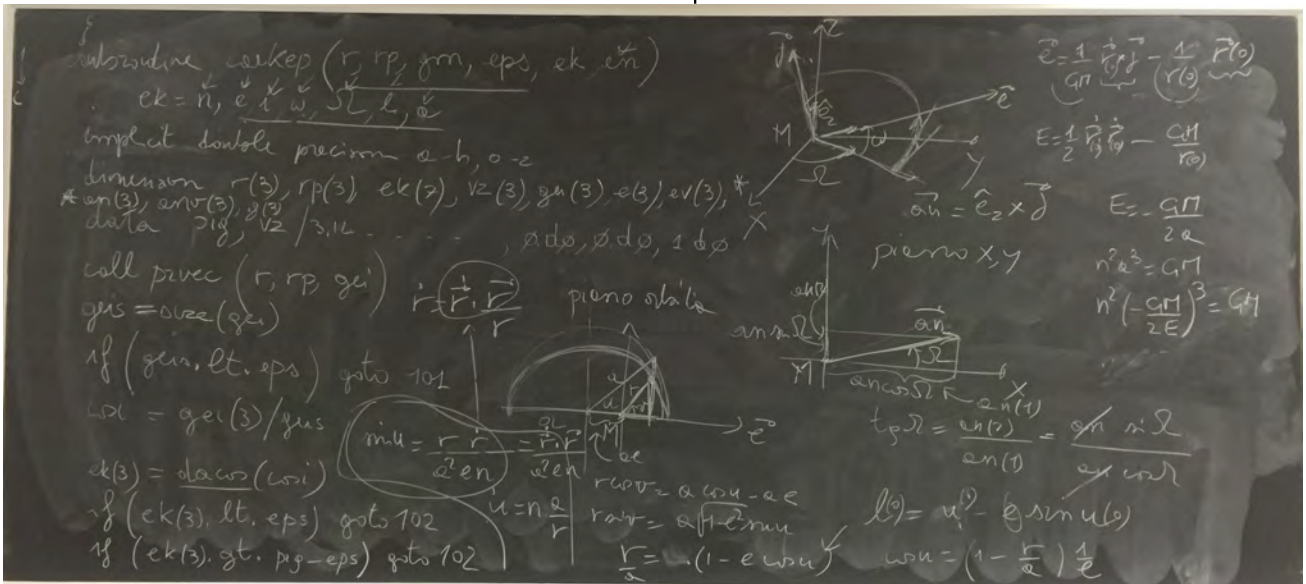
$\frac{1}{GM}(\vec{r} \times \vec{J}) - \frac{1}{r}\vec{r}$

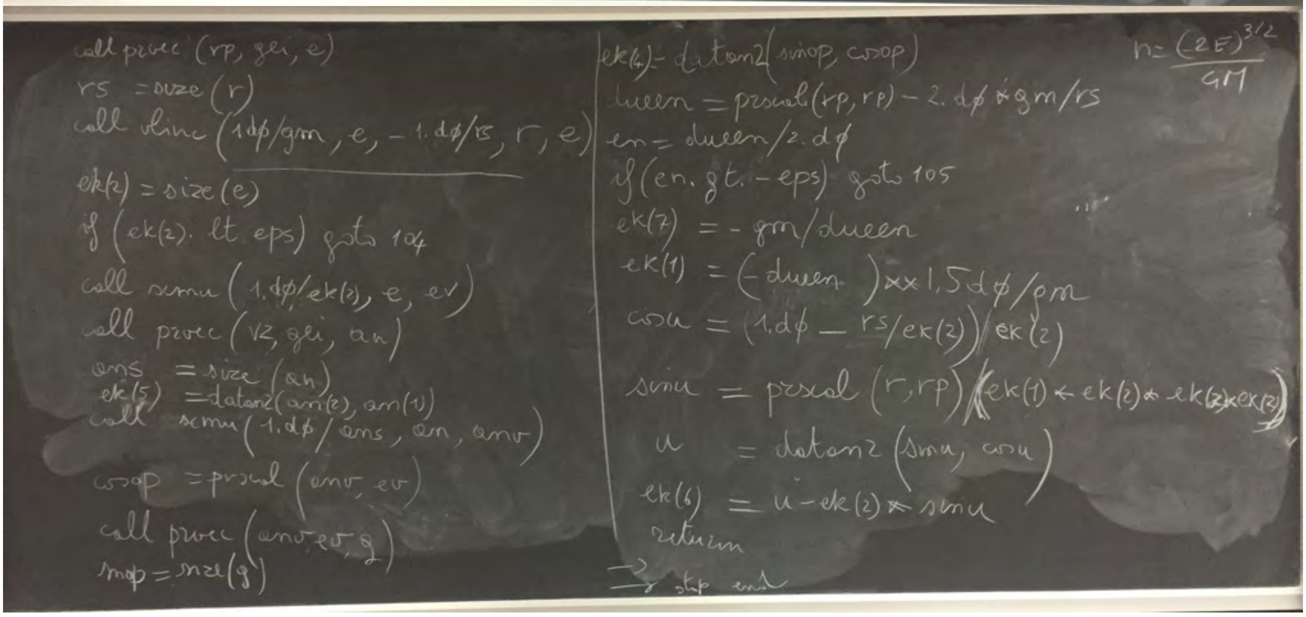
```
      subroutine carkep(r, rp, gm, eps, ek, en)
      dimension r(3), rp(3), ek(7), vz(3), gei(3), e(3)
c     r, rp, gm, eps: INPUT; ek=(n, e, i, omega piccolo, omega
c     grande, anomalia media, a), en OUTPUT
      data pig, vz/3.14.....dø, ø.dø, 0.dø, 1.dø/
      call prvec(r, rp, gei)
      geis = size(gei)
      cosi = gei(3)/geis
      ek(3) = dacos(cosi)
      call prvec(rp, gei, e)
      rs = size(r)
      call vlinc(1.dø/gm, e, -1.dø/rs, r, e)
      ek(2) = size(e)
```

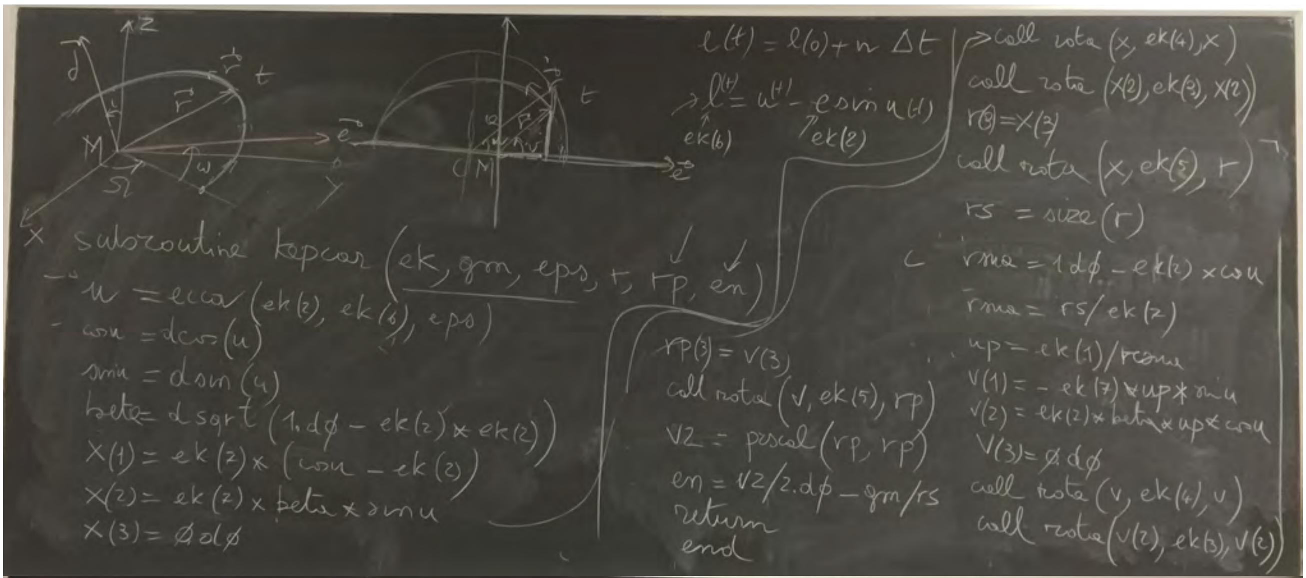
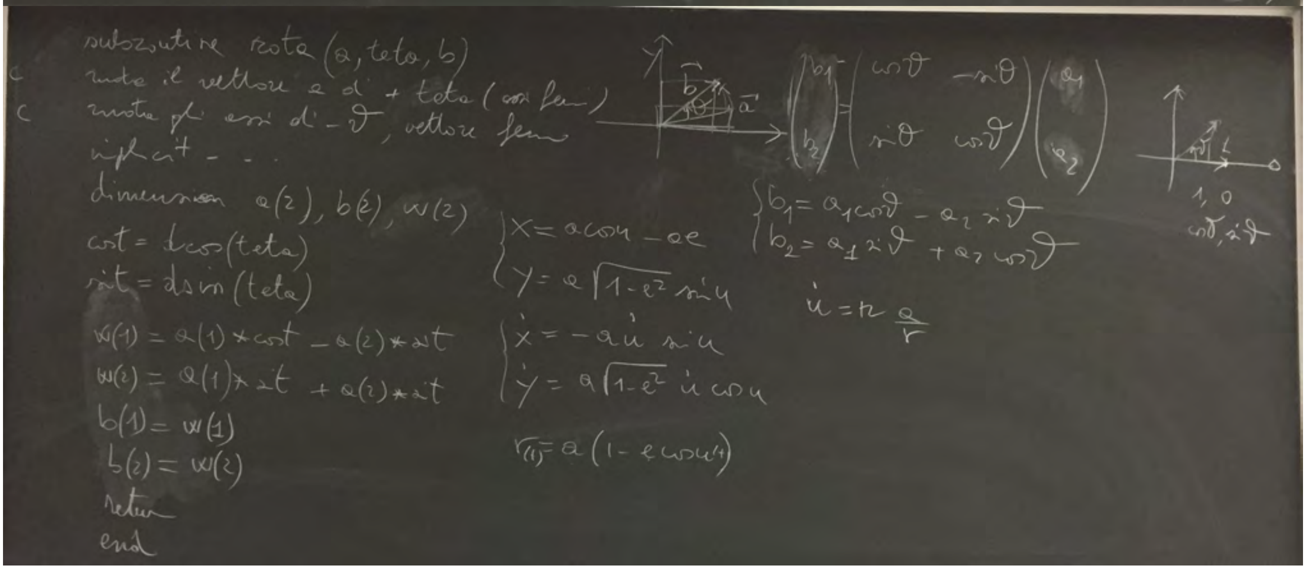
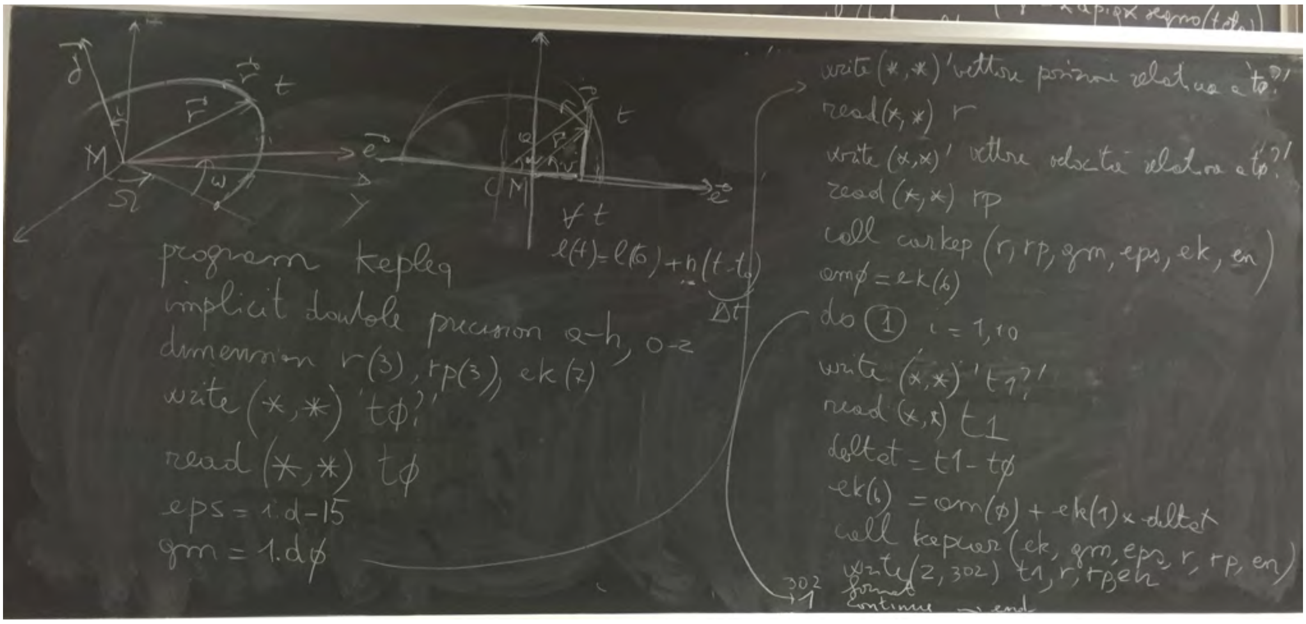
$\dot{\vec{r}} \times \vec{J} \to \vec{e}$

S6 - Lezioni del 2 e 4 Novembre 2016

- Subroutines, Functions e programma principale per la soluzione numerica del problema dei due corpi tramite soluzione dell'equazione di Keplero.
- Uso delle rotazioni in 2 dimensioni per il passaggio dal piano del moto all'orbita ai vettori posizione e velocità istantanea nel riferimento inerziale in 3D di partenza

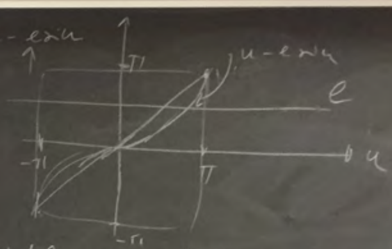





subroutine kepcar (ek, gm, eps, r, rp, en)
u = ecca (ek(2), ek(6), eps)
cou = dcos(u)
sinu = dsin(u)
beta = dsqrt (1.dφ - ek(2)*ek(2))
X(1) = ek(2)*(cou - ek(2))
X(2) = ek(2)*beta*sinu
X(3) = φdφ
ℓ(t) = ℓ(0) + n Δt
ℓ(t) = u(t) - e sin u(t)
ek(6)
ek(2)
call rota (x, ek(4), x)
call rota (X(2), ek(3), X(2))
r(3) = X(3)
call rota (x, ek(5), r)
rs = size (r)
rma = 1dφ - ek(2)*cou
rma = rs/ek(2)
up = ek(1)/rcomu
V(1) = - ek(7)*up*sinu
V(2) = ek(2)*beta*up*cou
V(3) = φdφ
call rota (v, ek(4), v)
call rota (V(2), ek(3), V(2))
rp(3) = V(3)
call rota (V, ek(5), rp)
V2 = pscal (rp, rp)
en = V2/2.dφ - gm/rs
return
end

subroutine rota (a, teta, b)
c ruota il vettore a di + teta (assi fermi)
c ruota gli assi di -θ, vettore fermo
implicit ...
dimension a(2), b(2), w(2)
cot = dcos(teta)
sit = dsin(teta)
w(1) = a(1)*cot - a(2)*sit
w(2) = a(1)*sit + a(2)*cot
b(1) = w(1)
b(2) = w(2)
return
end
x = a cos u - ae
y = a √(1-e²) sin u
ẋ = - a u̇ sin u
ẏ = a √(1-e²) u̇ cos u
r(t) = a (1 - e cos u(t))
b1 = a1 cos θ - a2 sin θ
b2 = a1 sin θ + a2 cos θ
u̇ = n a/r
1, 0
cos θ, sin θ

program keplero
implicit double precision a-h, o-z
dimension r(3), rp(3), ek(7)
write (*,*) 'tφ?'
read (*,*) tφ
eps = 1.d-15
gm = 1.dφ
∀ t
ℓ(t) = ℓ(t0) + n(t - t0)
Δt
write (*,*) 'vettore posizione relativo a tφ?'
read (*,*) r
write (*,*) 'vettore velocità relativo a tφ?'
read (*,*) rp
call carkep (r, rp, gm, eps, ek, en)
emφ = ek(6)
do 1 i = 1, 10
write (*,*) 't1?'
read (*,*) t1
deltat = t1 - tφ
ek(6) = em(φ) + ek(1)*deltat
call kepcar (ek, gm, eps, r, rp, en)
write (2, 302) t1, r, rp, en
302 format
1 continue
end

```
double precision function ecca(e,am,eps)
implicit
pig = 4.d0 * datan(1.d0)
am = princ(am)
u = pig * segno(am)
do 1 i=1,20
 d=(u - e*dsin(u) - am)/(1.d0-e*dcos(u))
 u=u-d
 if (dabs(d).lt.eps) then
 ecca=u
 return
 endif
1 continue
return end
```

$\ell = u - e\sin u$

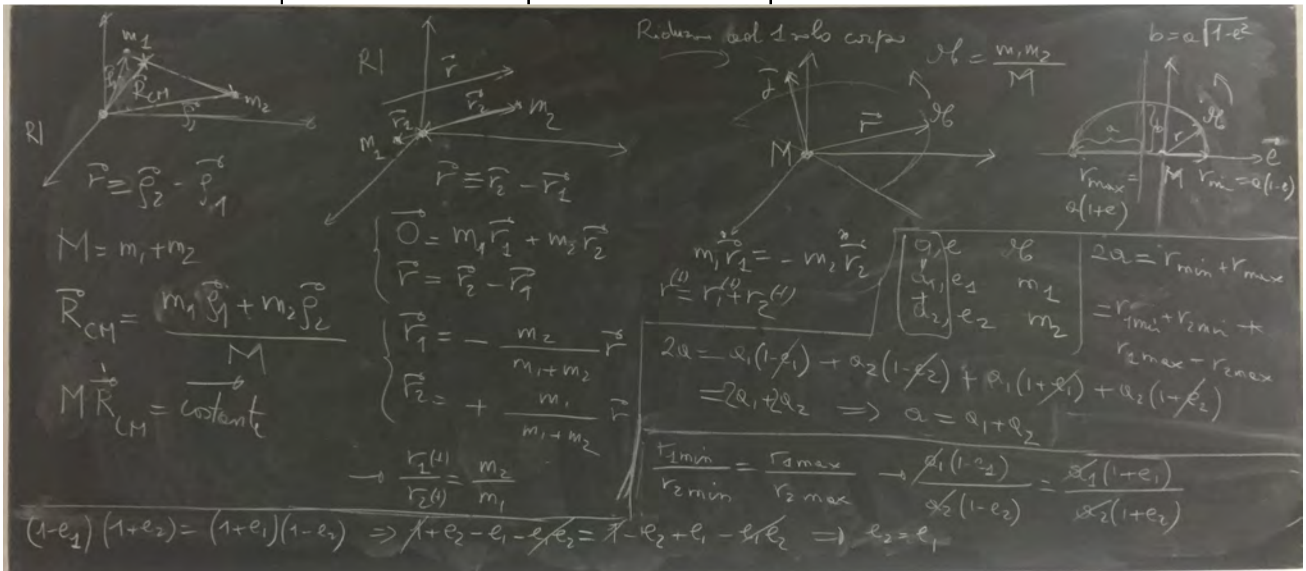


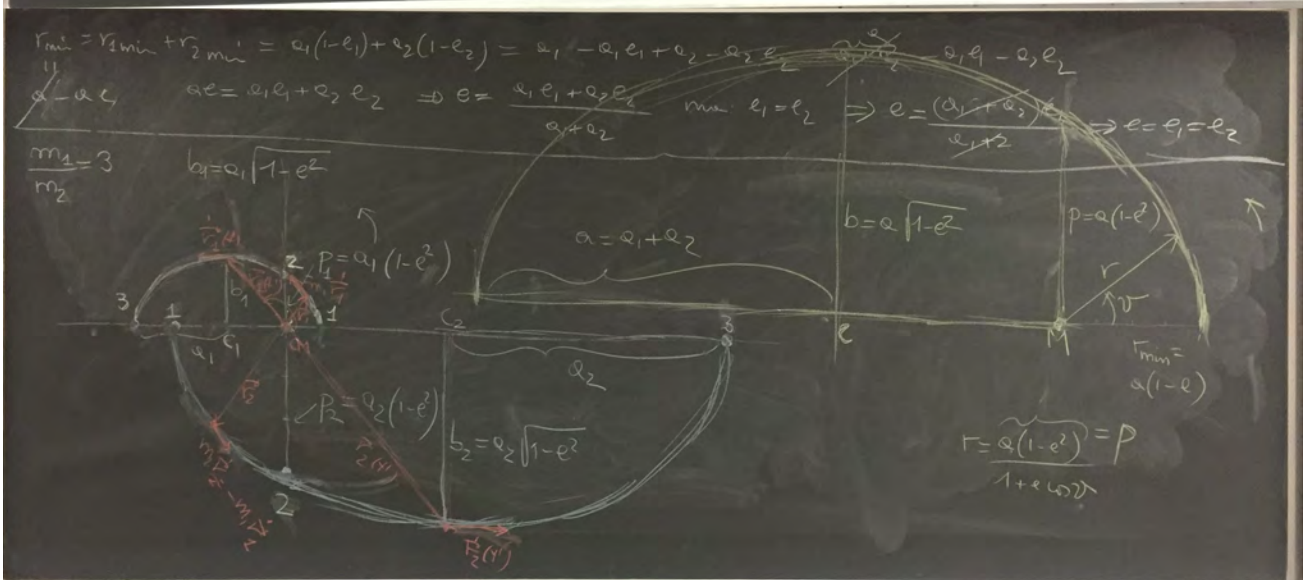

```
double precision function princ(teta)
pig = . . .
dpig = 2.d0 * pig
ngiri = dabs(teta)/dpig
teta = teta - (ngiri * dpig * segno(teta))
if (teta.lt.-pig) teta=teta+dpig
if (teta.gt.pig) teta = teta-dpig
princ=teta
return end
```

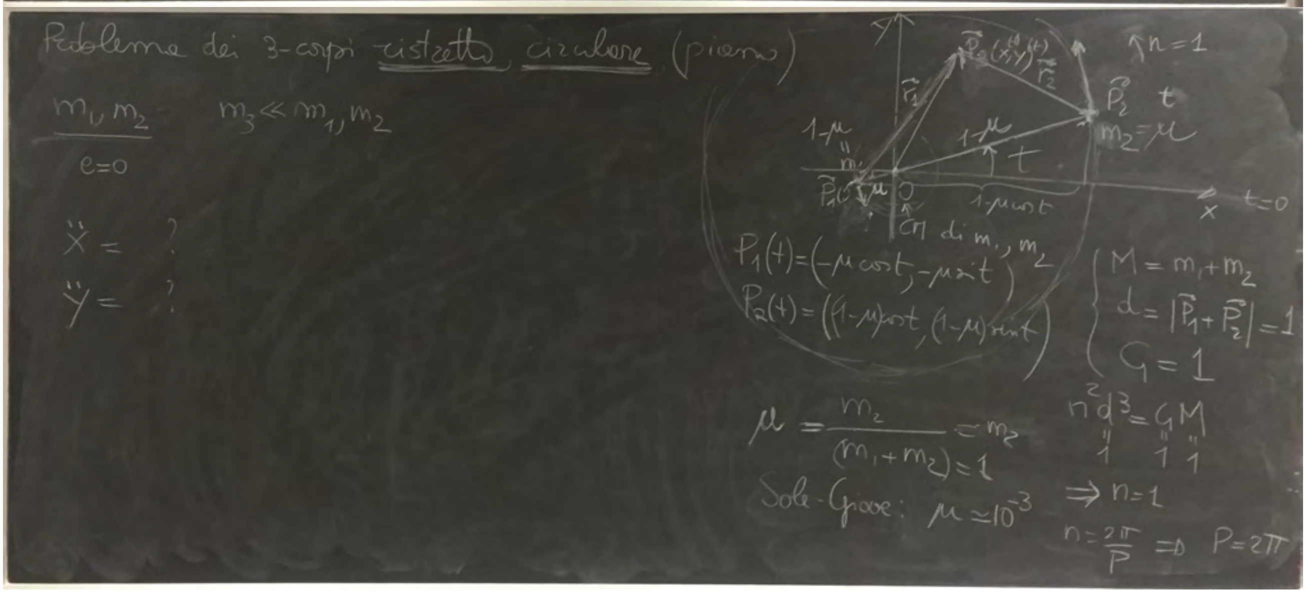
S7 - Lezioni del 9 e 11 Novembre 2016

(Mancano le foto alla lavagna dell'11 novembre)

- Passaggio dall'orbita soluzione del problema ridotto ad un solo corpo ad un solo corpo alle orbite dei singoli corpi
- Formulazione del problema dei tre corpi ristretto circolare piano

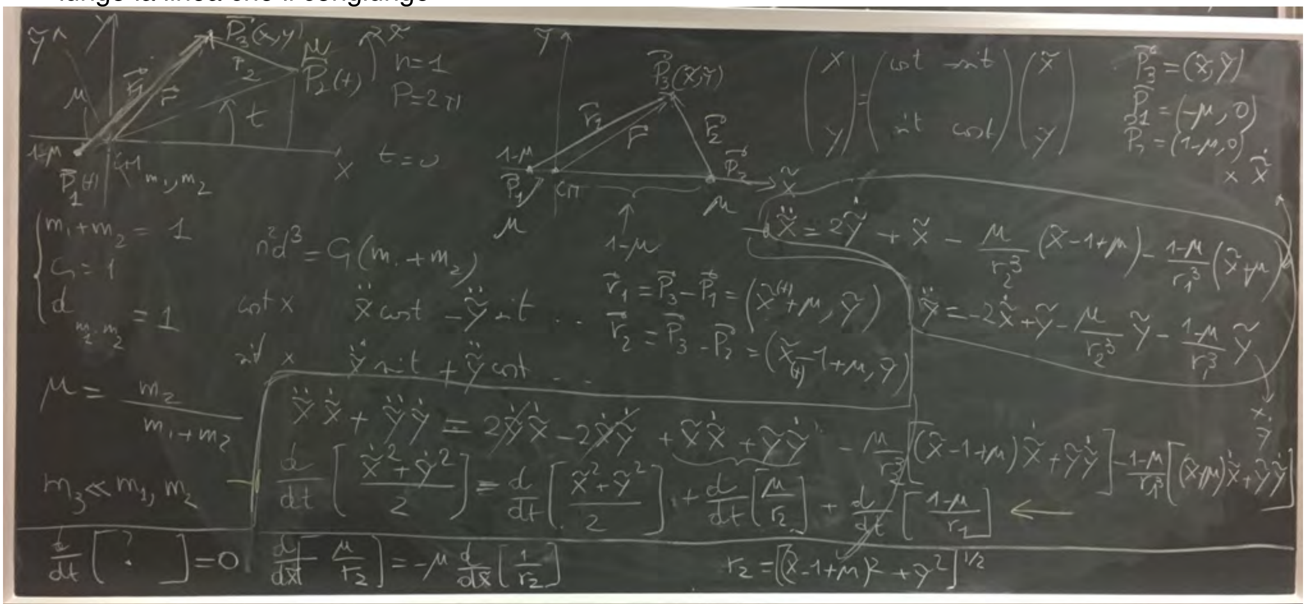


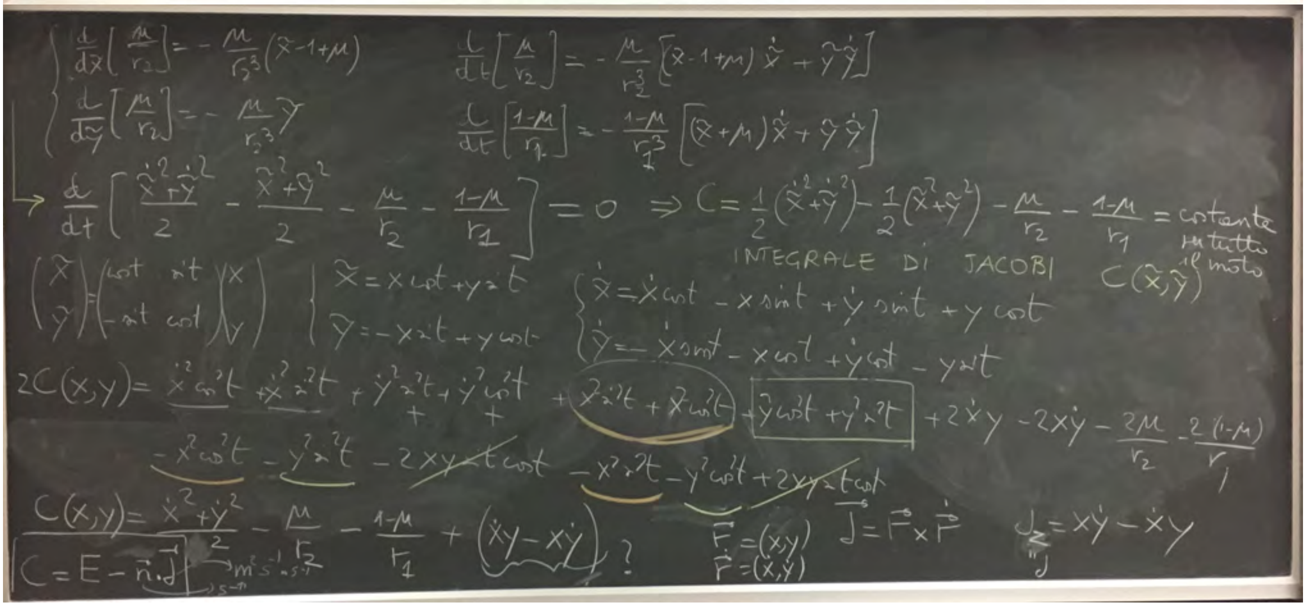




S8 - Lezioni del 16 e 18 Novembre 2016

- Problema dei tre corpi cicalare piano: equazioni el moto nel riferimento inerziale; equazioni del moto nel riferimento rotante con al binaria; integrale di Jacobi; curve a velocità zero
- Posizione del punto di equilibrio lagrangiano L1 situato tra il primario e il secondario della binaria lungo la linea che li congiunge

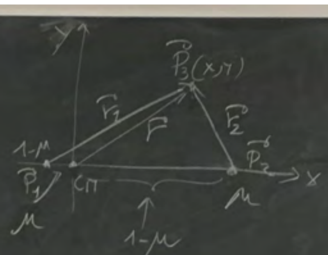




x, y Riferimento rotante con la binaria ($n=1$)

↑ costante

$$C = \frac{\dot x^2+\dot y^2}{2} - \left[\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{\mu}{r_2}+\frac{1-\mu}{r_1}\right]$$



C costante (per condizioni iniziali date) x data orbita di m_3

$$C = \frac12(\dot x^2+\dot y^2) - \Omega(x,y)$$

$$C+\Omega(x,y) = \frac12(\dot x^2+\dot y^2)\ge 0$$

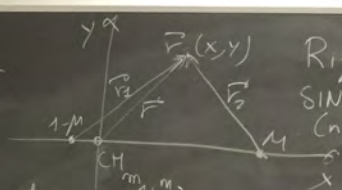
$\Omega(x,y)\ge -C$ moto permesso

$\boxed{\Omega(x,y)=-C}$ (per $\dot x=\dot y=0$) → CURVE A VELOCITÀ ZERO

$$C=\underbrace{\frac12(\dot x^2+\dot y^2)}_{\ge 0}-\Omega(x,y) \qquad \Omega(x,y)=\frac12(x^2+y^2)+\frac{\mu}{r_2}+\frac{1-\mu}{r_1}$$

$C+\Omega(x,y)\ge 0$ $\quad \boxed{\Omega(x,y)\ge -C = J}$

$\Omega(x,y)=J$ → $\dot x=\dot y=0$ CURVE A VELOCITÀ ZERO (non sono orbite!)

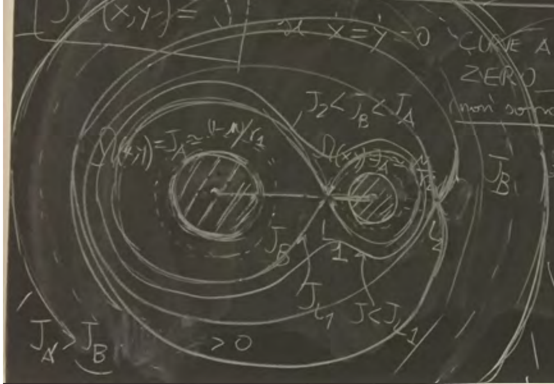


J determinato dalle condizioni iniziali e costante (INTEGRALE PRIMO)

$n=1$ $\quad G=1,\ m_1+m_2=1,\ d=1$

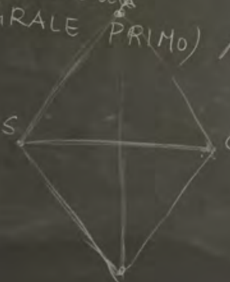
μ, $x(0)$, $y(0)$, $\dot x(0)$, $\dot y(0)$

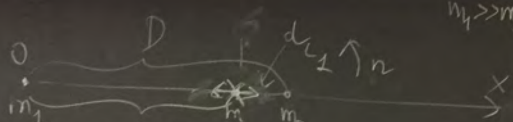
$n^2 d^3 = G(m_1+m_2)$



$$\Omega(x,y)=J_A\simeq\frac12(x^2+y^2)$$

$$\Omega(x,y)\ge J_A$$





$m_1 \gg m_2 \Rightarrow L_1$ molto vicino ad m_2

$d \ll D$

$\frac{d}{D}$ parametro piccolo

$$\left(1-\frac dD\right)^{-2}\simeq 1+2\frac dD$$

$m_2 \ll m_1$, $m \ll m_1, m_2$

Cerco la posizione di L_1 (fissa nel rotante, acc. totale nulla)

$$n^2D^3 = G(m_1+m_2)\simeq Gm_1 \Rightarrow n^2\simeq \frac{Gm_1}{D^3}$$

$$a_d = \frac{Gm_2}{d^2} - \frac{Gm_1}{(D-d)^2} + n^2(D-d) =$$

$$= \frac{Gm_2}{d^2} - \frac{Gm_1}{D^2\left(1-\frac dD\right)^2} + \frac{Gm_1 \cancel{D}}{D^{\cancel{3}}}\left(1-\frac dD\right) =$$

$$\simeq \frac{Gm_2}{d^2} - \frac{Gm_1}{D^2}\left(\cancel{1}+2\frac dD\right) + \frac{Gm_1}{D^2}\left(\cancel{1}-\frac dD\right)$$

$$a_d \simeq \frac{Gm_2}{d^2} - \frac{Gm_1}{D^2}\left(\cancel{1}-\cancel{1}+3\frac dD\right) \simeq \frac{Gm_2}{d^2} - 3\frac{Gm_1}{D^3}d$$

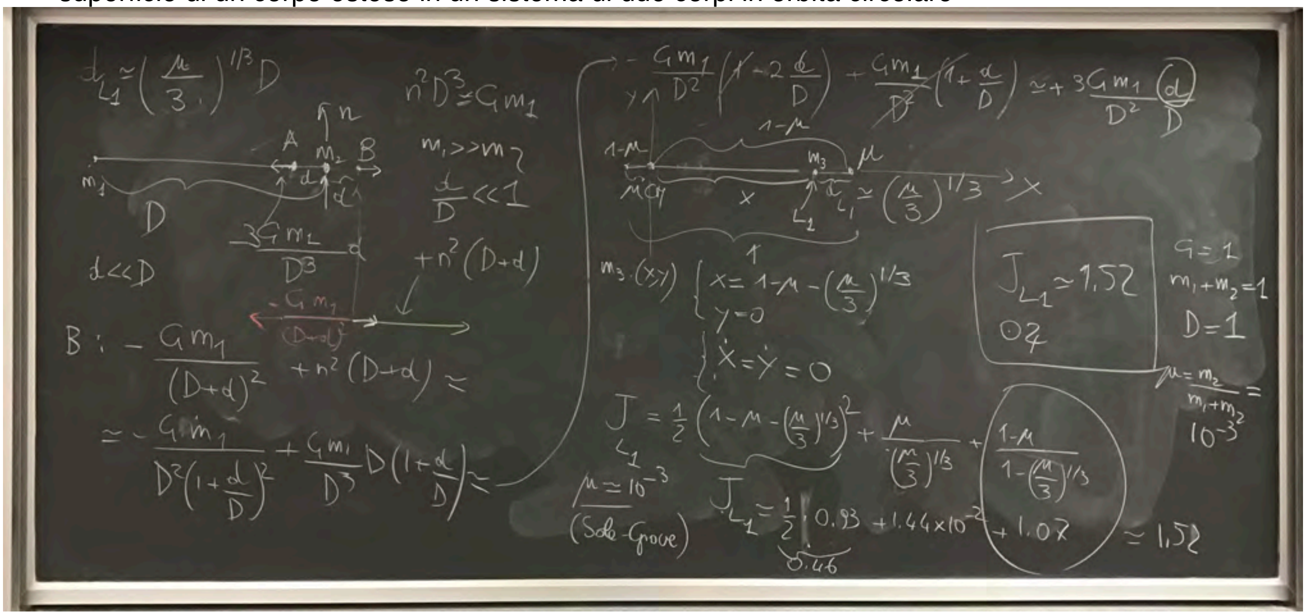
$$-3\left(\frac{Gm_1}{D^2}\right)\frac dD$$

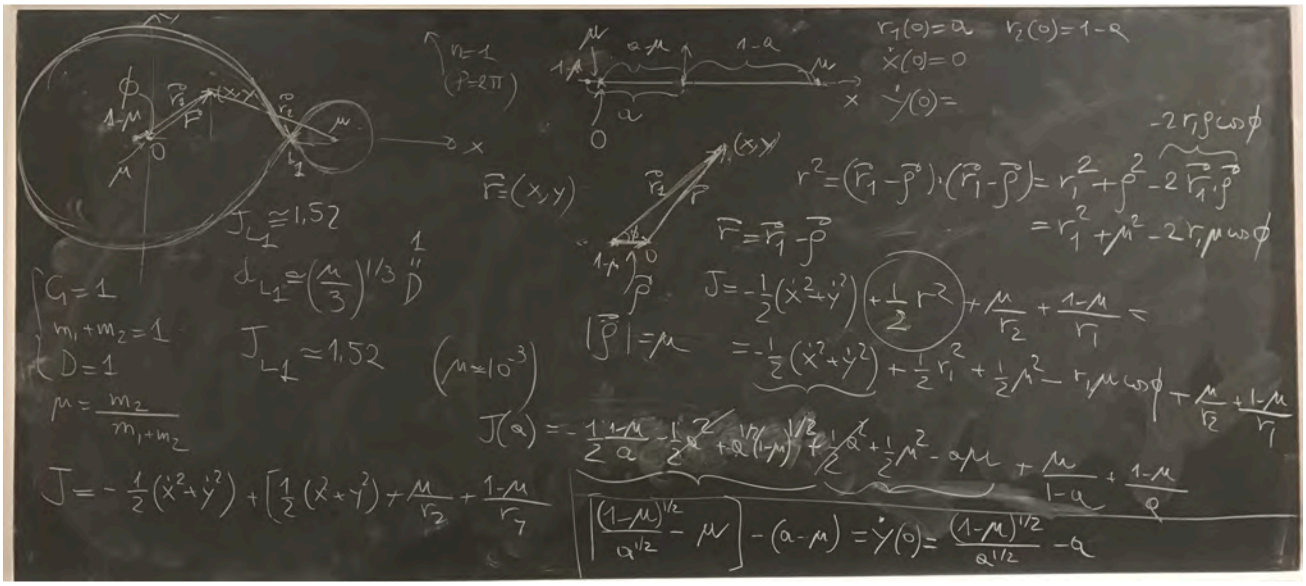
$$a_{d_{L_1}}=0 \Rightarrow \frac{Gm_2}{d_{L_1}^2}\simeq 3\frac{Gm_1}{D^3}d_{L_1}$$

$$d_{L_1}\simeq\left(\frac{m_2}{3m_1}\right)^{1/3}D \qquad d_{L_1}\simeq\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}D$$

S9 - Lezioni del 23 e 25 Novembre 2016

- Calcolo della posizione del punto di equilibrio di L1 usando il concetto di marea. Definizione di sfera di influenza
- Calcolo dell'integrale di Jacobi della curva a velocità zero passante per il punto L1
- Criterio di stabilità di Hill e sua applicazione agli asteroidi tra Marte e Giove
- Definizione di marea e calcolo del potenziale mareale generato da un corpo puntiforme sulla superficie di un corpo esteso in un sistema di due corpi in orbita circolare





$$J(a) = \frac{1-\mu}{2a} + a^{1/2}(1-\mu)^{1/2} - a\mu + \frac{\mu}{1-a} + O(\mu^2)$$

$(\mu \simeq 10^{-3})$ $\quad 0.3 \le a \le 0.93$

a	$J(a)$
0,30	2.214
0.35	2.020
0.40	1.882
0.45	1.782
0.50	1.707
0.55	1.651
0.60	1.609
0,65	1,576
0.70	1,552
0.75	1,535
0.80	1,523
THULE → 0.81	[illegible]

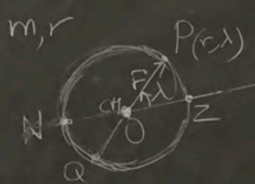
$> J_{L_1} = 1.520$

$a = 0.85 \to J(a) = 1.515 < J_{L_1}$

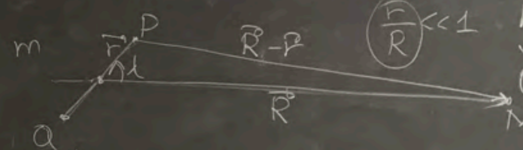
CRITERIO DI STABILITÀ DI HILL APPLICATO AGLI ASTEROIDI TRA MARTE E GIOVE

DISTINZIONE TRA ORBITE E CURVE A VELOCITÀ ZERO

M corpo generatore di marea



$$\Phi_G(P) - \Phi_G(O) = \Phi_{tide}$$



$\frac{r}{R} \ll 1$ $\quad O\left(\frac{r^3}{R^3}\right)$

$$\varepsilon = \frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R}\cos\lambda$$

$$(1+\varepsilon)^{-1/2} \simeq 1 - \frac12\varepsilon + \frac38\varepsilon^2 \simeq$$

$-\frac12(1+\varepsilon)^{-3/2}$

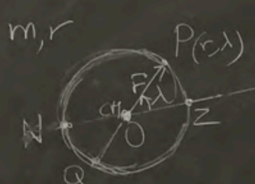
$+\frac34(1+\varepsilon)^{-5/2}$

$$\simeq 1 - \frac12\frac{r^2}{R^2} + \frac{r}{R}\cos\lambda + \frac32\frac{r^2}{R^2}\cos^2\lambda$$

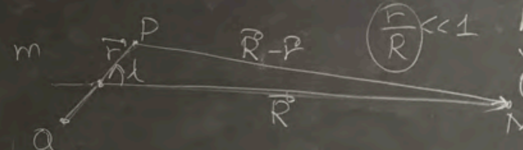
$$\Phi_G(P) = \frac{GM}{|\vec R - \vec r|} \simeq \frac{GM}{(R^2+r^2-2Rr\cos\lambda)^{1/2}} = \frac{GM}{R\left(1+\underbrace{\frac{r^2}{R^2}-\frac{2r}{R}\cos\lambda}_{\varepsilon}\right)^{1/2}} \simeq$$

$$\simeq \frac{GM}{R}\left[1 + \frac{r}{R}\cos\lambda + \frac12\frac{r^2}{R^2}(3\cos^2\lambda - 1) + O\left(\frac{r^3}{R^3}\right)\right]$$

M corpo generatore di marea



$$\Phi_G(P) - \Phi_G(O) = \Phi_{tide}$$



$\frac{r}{R} \ll 1$ $\quad O\left(\frac{r^3}{R^3}\right)$

$$\varepsilon = \frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R}\cos\lambda$$

$$(1+\varepsilon)^{-1/2} \simeq 1 - \frac12\varepsilon + \frac38\varepsilon^2 \simeq$$

$-\frac12(1+\varepsilon)^{-3/2}$

$+\frac34(1+\varepsilon)^{-5/2}$

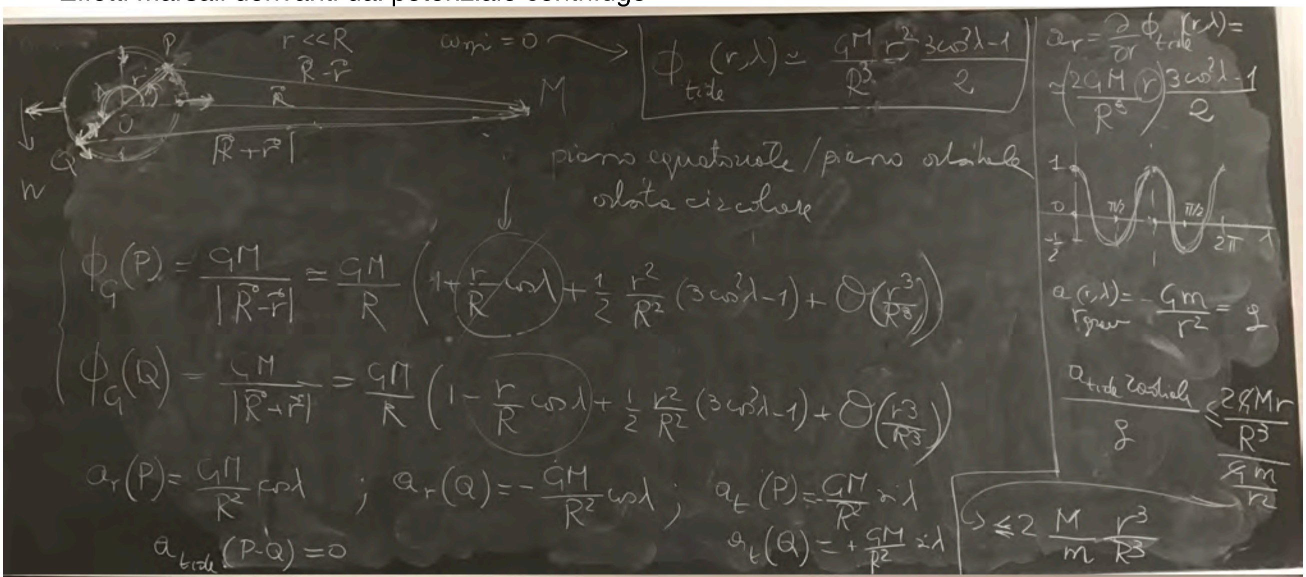
$$\simeq 1 - \frac12\frac{r^2}{R^2} + \frac{r}{R}\cos\lambda + \frac32\frac{r^2}{R^2}\cos^2\lambda$$

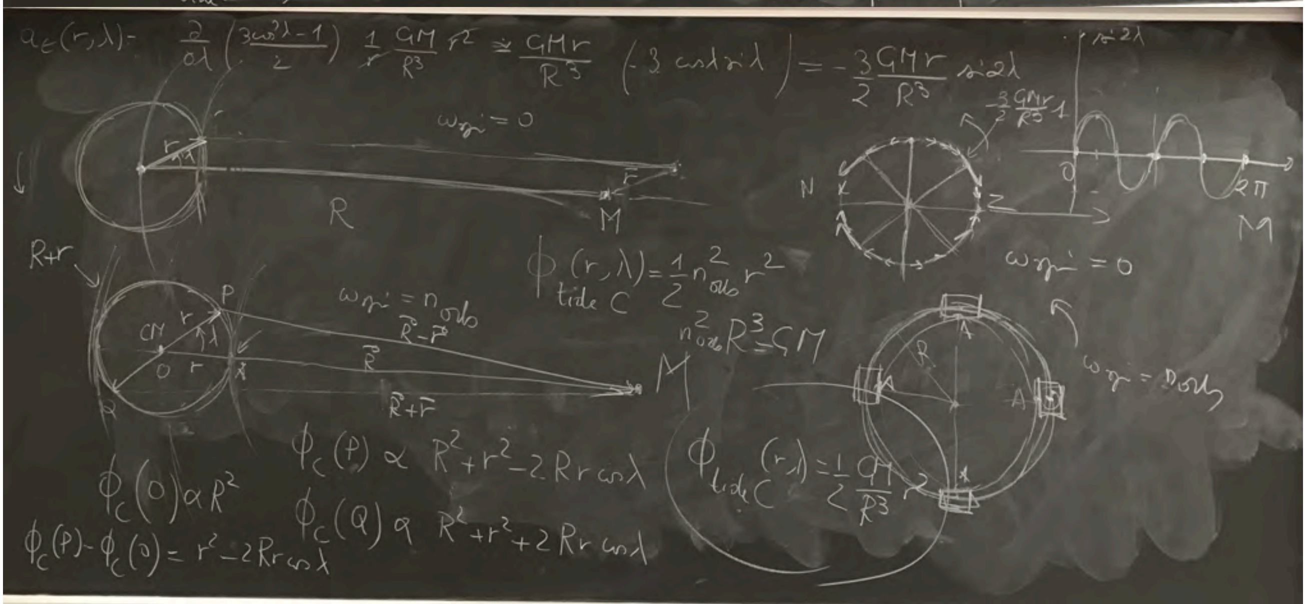
$$\Phi_G(P) = \frac{GM}{|\vec R - \vec r|} \simeq \frac{GM}{(R^2+r^2-2Rr\cos\lambda)^{1/2}} = \frac{GM}{R\left(1+\underbrace{\frac{r^2}{R^2}-\frac{2r}{R}\cos\lambda}_{\varepsilon}\right)^{1/2}} \simeq$$

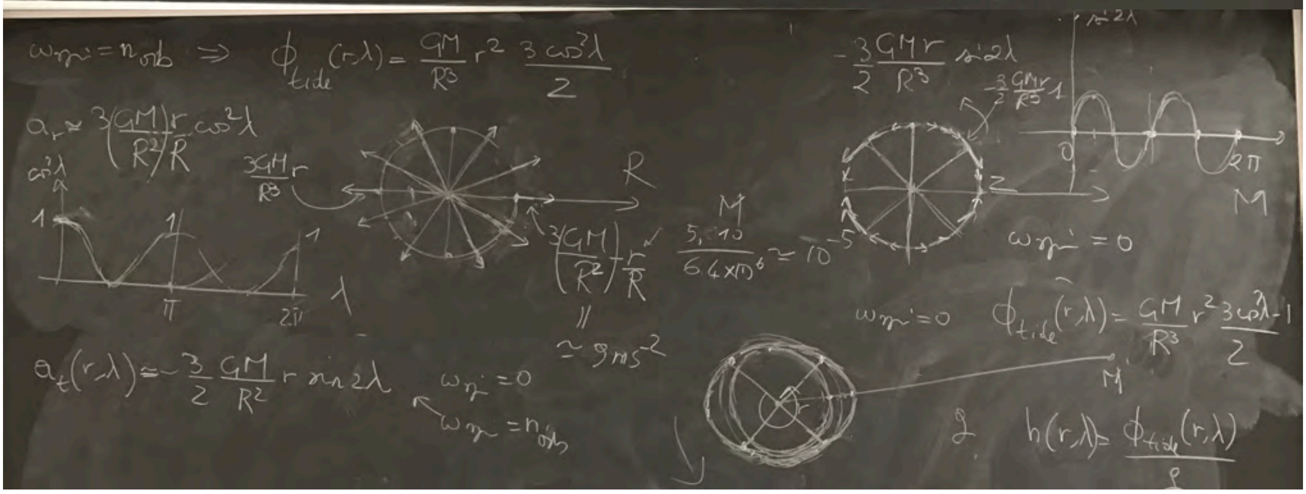
$$\simeq \frac{GM}{R}\left[1 + \frac{r}{R}\cos\lambda + \frac12\frac{r^2}{R^2}(3\cos^2\lambda - 1) + O\left(\frac{r^3}{R^3}\right)\right]$$

S10 - Lezioni del 30 Novembre e 2 Dicembre 2016
La lezione del 2 dicembre non si è tenuta per impegni della docente (tempo recuperato allungando al durata delle lezioni successive)

- Calcolo delle accelerazioni di marea, componete radiale e componente traversa
- Effetti marsali derivanti dal potenziale centrifugo

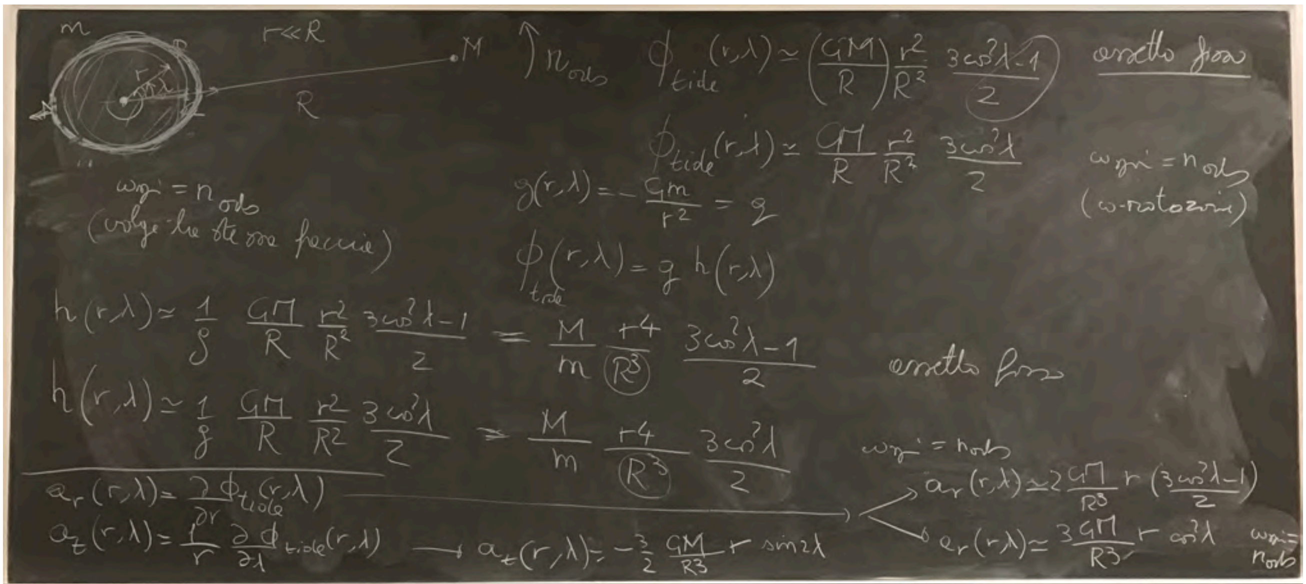


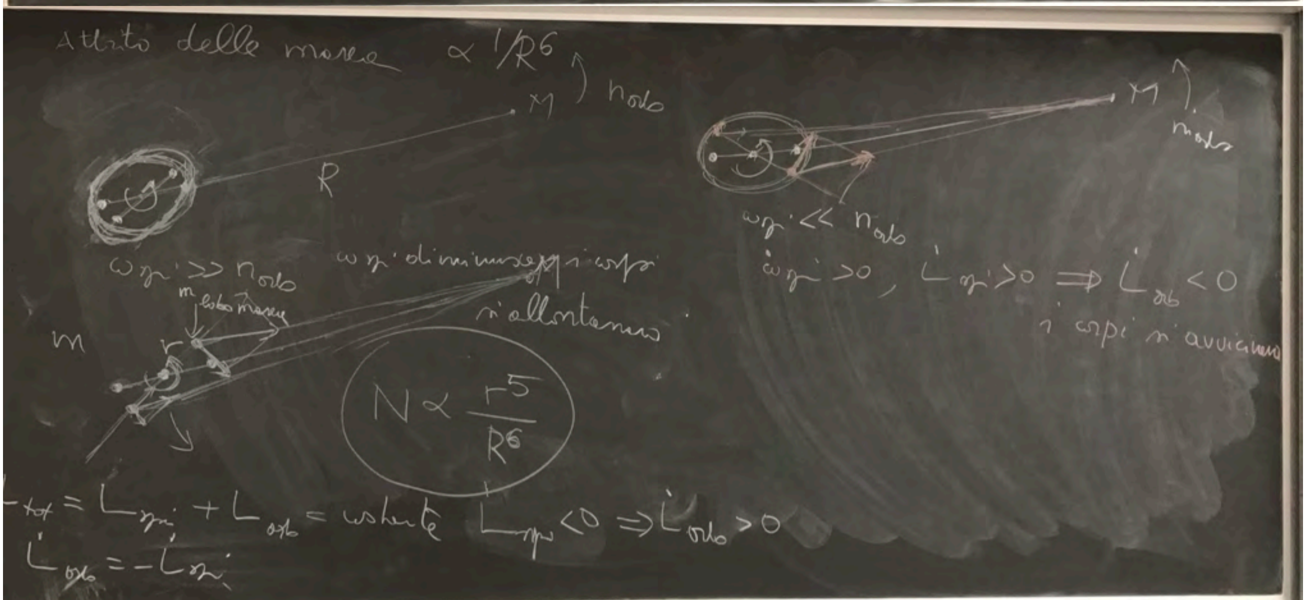


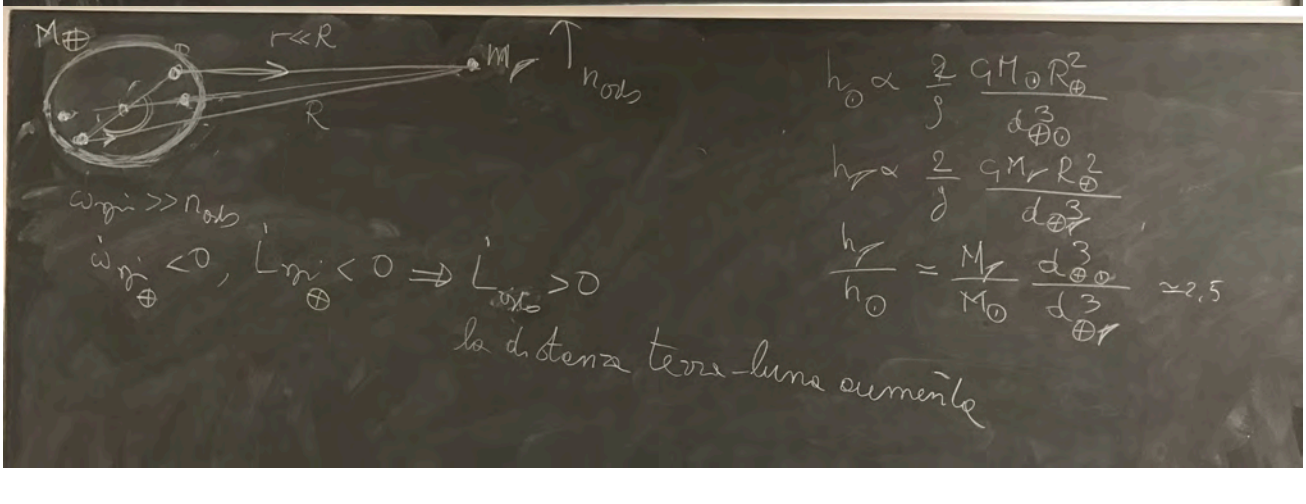


S11 - Lezioni del 7 e 9 Dicembre 2016

- Altezza della marea e superficie di equilibrio in presenza di marea
- Attrito della marea, diversi tipi di evoluzione orbitale derivanti dall'attrito di marea. Caso di sistemi co-rototanti (satelliti che rivolgono sempre la stessa faccia al proprio pianeta, come al Luna alla Terra) ed evoluzione mareale successiva alla co-rotazione (la Terra rallenta la sua rotazione propria e la distanza Terra-Luna aumenta)
- Il caso di Mercurio intorno al Sole
- Mercurio e Venere non possono avere satelliti perché l'attrito di marea del sole su questi pianeti li rallenta e causa l'evoluzione orbitale distruttiva dei loro eventuali satellitiì

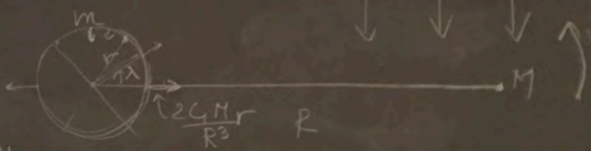






$\omega_{spi} = 0$ (oggetto fisso nello spazio)

$$\phi(r,\lambda) \simeq \frac{GM}{R^3} r^2 \, \frac{3\cos^2\lambda - 1}{2}$$

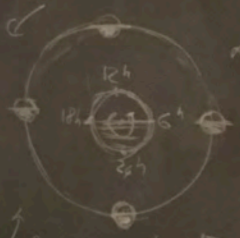


$$\to h(r,\lambda) = \frac{1}{g}\phi(r,\lambda) \simeq \frac{r^2}{Gm}\,\frac{GM}{R^3}\, r^2 \, \frac{3\cos^2\lambda - 1}{2} \simeq \left(\frac{M}{m}\,\frac{r^3}{R^3}\right) r \, \frac{3\cos^2\lambda - 1}{2}$$

$$a_r(r,\lambda) = 2\frac{GM}{R^3} r \, \frac{3\cos^2\lambda - 1}{2}$$

$$a_t(r,\lambda) = -\frac{3}{2}\frac{GM}{R^3} r \sin 2\lambda$$

$$\frac{\phi_{tide\,☾}}{\phi_{tide\,\odot}} = \frac{M_☾}{M_\odot}\,\frac{d^3_{\oplus\odot}}{d^3_{\oplus☾}} \simeq 2.2$$



$$h_{max\,☾} \simeq \frac{1}{g}\frac{GM_☾ R_\oplus^2}{d^3_{\oplus☾}} \simeq 36\,cm$$

$h_{min\,☾} = 18\,cm$ — escursion. 54 cm

$$h_{max\,\odot} = \frac{1}{g}\frac{GM_\odot R_\oplus^2}{d^3_{\oplus\odot}} = 16.3\,cm$$

$$h_{min\,\odot} = \frac{1}{2} h_{max\,\odot} = 8.2\,cm$$ negativo

escursione dovuta al sole 24.5 cm

SISTEMA ISOLATO

$\uparrow n_{orb}$

$$N \propto \frac{r^5}{R^6}$$

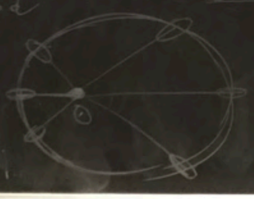
$\omega_{spi} >> n_{orb}$

$\dot\omega_{spi} < 0 \quad \dot L_{spi} < 0 \Longrightarrow \dot L_{orb} > 0 \Rightarrow$ aumenta R

$\omega_{spi} << n_{orb}$

$\dot\omega_{spi} > 0, \ \dot L_{spi} > 0 \Rightarrow \dot L_{orb} < 0$ → avvicinam

$P_{orb} \simeq 88\,d$ mercurio

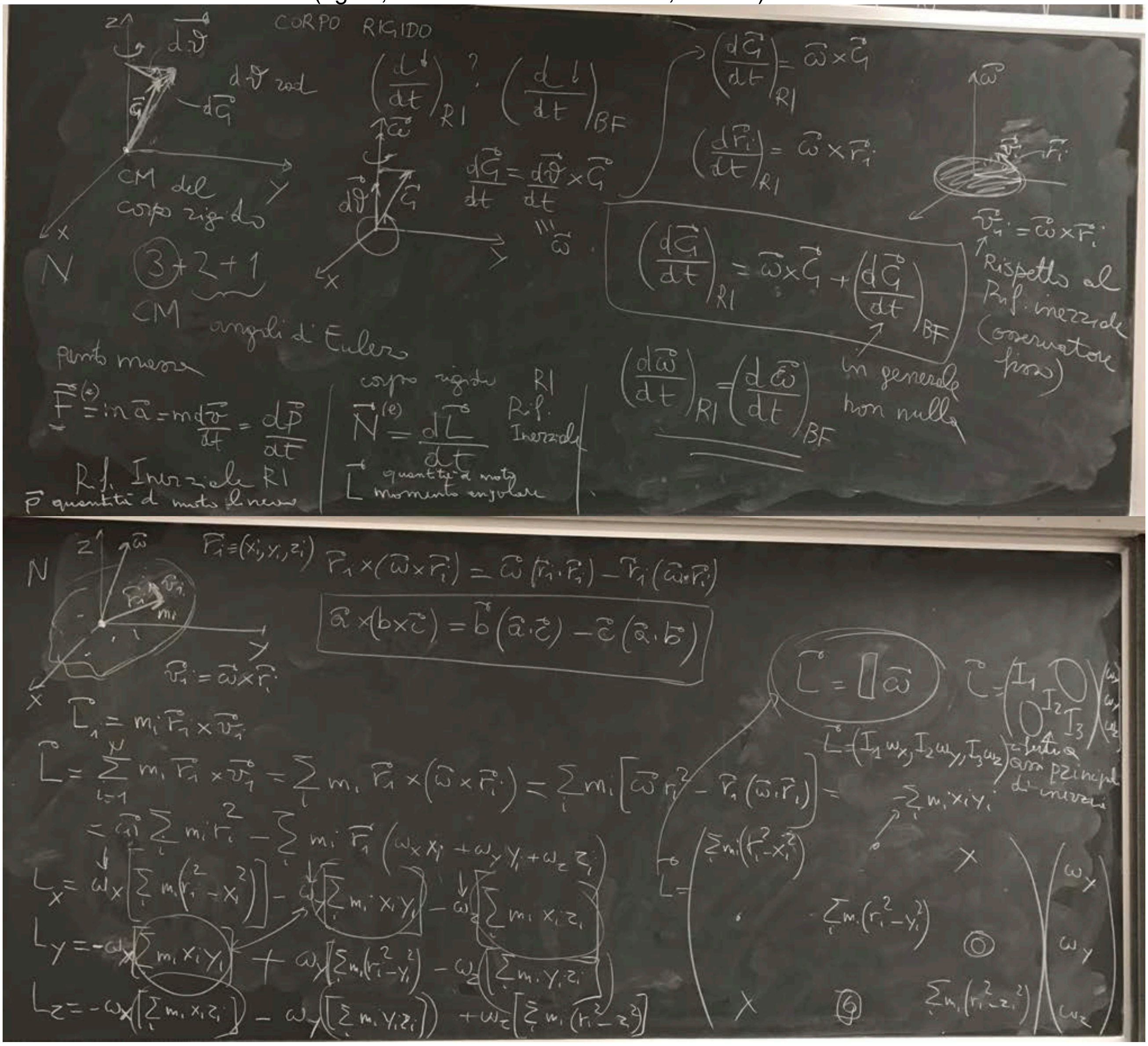


$P_{spi} = \frac{2}{3} P_{orb}$

$\simeq 59\,d$

S12 - Lezioni del 14 e 16 Dicembre 2016

- Derivazione delle equazioni di Eulero per il moto del corpo rigido intorno al proprio centro di massa
- Applicazione delle equazioni di Eulero alla Terra assunta rigida, a forma di sferoide oblato (ellissoide di rivoluzione), isolata nello spazio e rotante attorno ad un asse che passa per il suo centro di massa ma non coincide esattamente con il suo asse di simmetria (calcolo del periodo di precessione libera, o precessione di Eulero)
- Precessione della Terra (rigida, a forma si sferoide oblato, rotante) a causa della Luna e del Sole



$$\left(\frac{d\vec L}{dt}\right)_{RI} = \vec N^{(e)} \qquad \vec L = \mathbb{I}\,\vec\omega = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0\\ 0 & I_2 & 0\\ 0 & 0 & I_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$$

sempre possibile

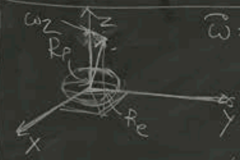
$$\left(\frac{d\vec L}{dt}\right)_{BF} + \vec\omega\times\vec L =$$

$$\vec\omega\times\vec L = \begin{pmatrix}\omega_y L_z - \omega_z L_y\\ \omega_z L_x - \omega_x L_z\\ \omega_x L_y - \omega_y L_x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-(I_2-I_3)\,\omega_y\omega_z\\ -(I_3-I_1)\,\omega_z\omega_x\\ -(I_1-I_2)\,\omega_x\omega_y\end{pmatrix}$$

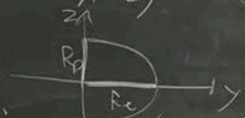
$$= \left[\frac{d}{dt}(\mathbb{I}\vec\omega)\right]_{BF} + \vec\omega\times\vec L = \mathbb{I}\left(\frac{d\vec\omega}{dt}\right)_{BF/RI} + \vec\omega\times\vec L = \boxed{\mathbb{I}\,\dot{\vec\omega} + \vec\omega\times\vec L = \vec N^{(e)}} \quad \text{Eq. di EULERO}$$

$$\frac{d\mathbb{I}}{dt} = 0$$

$$\begin{cases} I_1\dot\omega_x - \omega_y\omega_z\,(I_2-I_3) = N_x^{(e)}\\ I_2\dot\omega_y - \omega_z\omega_x\,(I_3-I_1) = N_y^{(e)}\\ I_3\dot\omega_z - \omega_x\omega_y\,(I_1-I_2) = N_z^{(e)} \end{cases}$$



$\vec\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ $\qquad \omega_x, \omega_y \ll \omega_z$



I_3 $\qquad I_1 = I_2$

$I_3 > I_1$

$$\begin{cases} I_1\dot\omega_x = \omega_y\omega_z\,(I_1-I_3)\\ I_2\dot\omega_y = \omega_z\omega_x\,(I_3-I_1)\\ I_3\dot\omega_z = 0 \end{cases} \to \text{durata del giorno "costante"}$$

$$\begin{cases} \dot\omega_x = \left[\dfrac{(I_1-I_3)}{I_1}\omega_z\right]\omega_y\\ \dot\omega_y = -\left[\dfrac{I_1-I_3}{I_1}\omega_z\right]\omega_x \end{cases}$$

ω_z = costante

$\omega_x(t), \omega_y(t)$

$$\frac{I_1-I_3}{I_1}\,\omega_z = \Omega \ll \underset{1\text{ giorno}}{\omega_z} \qquad \left|\frac{I_1-I_3}{I_1}\right| \ll 1$$

Ω: $\simeq 300$ giorni (ipotesi Terra = corpo rigido (sferoide oblato))

$$\ddot\omega_x = \Omega\,\dot\omega_y = -\Omega^2\omega_x$$

$$\begin{cases} \ddot\omega_x + \Omega^2\omega_x = 0\\ \ddot\omega_y + \Omega^2\omega_y = 0 \end{cases}$$

$$T = \frac12\sum_i m_i\,\dot{\vec r}_i\cdot\dot{\vec r}_i \qquad \dot{\vec r}_i = (\vec\omega\times\vec r_i) \qquad \ldots\ldots \qquad T = \frac12 I\omega^2$$

I: rispetto all'asse $\hat n = \dfrac{\vec\omega}{\omega}$

Corpo rigido

3N se fossero N particelle

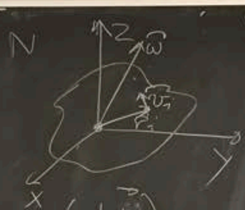
$$\left.\begin{array}{l} 3 \ \text{CM}\\ +2\\ +1 \end{array}\right\} \leftarrow \text{angoli di Eulero} \qquad 6 \text{ gradi di libertà}$$

$\vec F = \dfrac{d\vec p}{dt}$ Rif. inerziale

$\vec p = m\vec v$

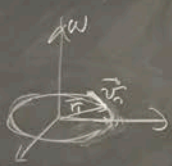
$\vec N = \dfrac{d\vec L}{dt}$ Rif. In.

N



$\vec L_i = m_i\,\vec r_i\times\vec v_i$

$$\vec L = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec r_i\times\vec v_i \qquad \vec v_i = (\vec\omega\times\vec r_i)$$



$$\underbrace{\left(\frac{d\vec r_i}{dt}\right)_{RI}}_{\vec v_i} = \cancel{\left(\frac{d\vec r_i}{dt}\right)_{BF}} + \underbrace{\vec\omega\times\vec r_i}_{\vec v_i}$$

RI: rif. inerziale

BF: ← Riferimento fisso con il corpo rigido

$$\left(\frac{d\vec\omega}{dt}\right)_{RI} = \left(\frac{d\vec\omega}{dt}\right)_{BF} + \cancel{\vec\omega\times\vec\omega}$$

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\right)_{RI} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{BF} + \vec\omega\times}$$

$$\vec{L}=\begin{pmatrix}\sum_i m_i(r_i^2-x_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i y_i z_i\\ \cdot & \sum_i m_i(r_i^2-y_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i\\ \times & = & \sum_i m_i(r_i^2-z_i^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_x\\ L_y\\ L_z\end{pmatrix}$$

tensore d'inerzia

$$\vec{L}=\mathbb{I}\vec{\omega}\qquad (3\times3)(3\times1)=(3\times1)$$

$$\vec{L}=\begin{pmatrix}I_1 & & 0\\ & I_2 & \\ 0 & & I_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_1\omega_x\\ I_2\omega_y\\ I_3\omega_z\end{pmatrix}\qquad \vec{L} \not\parallel \vec{\omega}$$

rispetto agli assi principali di inerzia del corpo

$$\vec{N}=\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{RI}=\left(\frac{d}{dt}(\mathbb{I}\vec{\omega})\right)_{BF}+\vec{\omega}\times\vec{L}=\mathbb{I}\dot{\vec{\omega}}+\vec{\omega}\times(I_1\omega_x, I_2\omega_y, I_3\omega_z)$$

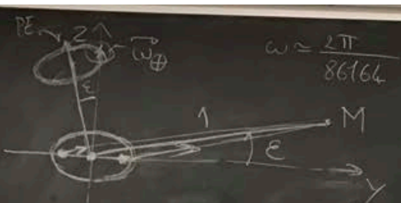
$$\mathbb{I}\dot{\vec{\omega}}=(I_1\dot{\omega}_x, I_2\dot{\omega}_y, I_3\dot{\omega}_z)$$

$$(\vec{\omega}\times\vec{L})_x=\omega_y L_z-\omega_z L_y=\omega_y I_3\omega_z-\omega_z I_2\omega_y=(I_3-I_2)\,\omega_y\omega_z$$

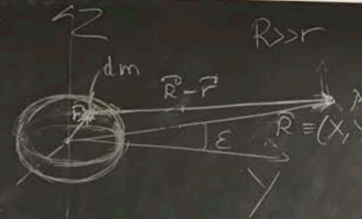
$$\boxed{\vec{N}=\mathbb{I}\dot{\vec{\omega}}+\vec{\omega}\times\vec{L}}$$

eq. di Eulero

$$\begin{cases}N_x=I_1\dot{\omega}_x-\omega_y\omega_z(I_2-I_3)\\ N_y=I_2\dot{\omega}_y-\omega_z\omega_x(I_3-I_1)\\ N_z=I_3\dot{\omega}_z-\omega_x\omega_y(I_1-I_2)\end{cases}$$



$$\omega=\frac{2\pi}{86164}\ \text{rad s}^{-1}$$



$R>>r$

$$d\vec{F}=\frac{GM\,dm}{|\vec{R}-\vec{r}|^3}(\vec{R}-\vec{r})$$

$$\vec{R}=(X,Y,Z)\qquad |\vec{R}-\vec{r}|^{-3}=(R^2+r^2-2\vec{R}\cdot\vec{r})^{-3/2}$$

$$|r|^{-3}=(r^2)^{-3/2}=(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\ \rightarrow\ =R^{-3}\left(1+3\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right)$$

$$(1+\varepsilon)^{-3/2}\simeq 1-\frac{3}{2}\varepsilon$$

$$d\vec{K}=\vec{r}\times d\vec{F}\simeq\frac{GM\,dm}{R^3}\left(1+3\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right)\vec{r}\times\vec{R}$$

$$d\vec{F}=\frac{GM\,dm}{R^3}\left(1+3\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right)(\vec{R}-\vec{r})$$

$$\vec{K}=\int_\oplus d\vec{K}=\frac{GM}{R^3}\int dm\left(1+3\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right)\vec{r}\times\vec{R}$$

$$\vec{r}=(x,y,z)\qquad \int dm(\vec{r}\times\vec{R})\ \longrightarrow\ \underset{0}{\int x\,dm},\ \underset{0}{\int y\,dm},\ \underset{0}{\int z\,dm}$$

$$\vec{r}_{CM}=\frac{\int\vec{r}\,dm}{\int dm}=\vec{0}$$

$$\rightarrow\ \vec{K}=\frac{3GM}{R^5}\int dm(\vec{R}\cdot\vec{r})(\vec{R}\times\vec{r})$$

$$K_X=\frac{3GM}{R^5}\int(Xx+Yy+Zz)(yZ-zY)\,dm=\frac{3GM}{R^5}YZ\underbrace{\int(y^2-z^2)\,dm}_{I_3-I_1}=$$

$$=\frac{3GM}{R^5}YZ(I_3-I_1)$$

$$YZ\int xy\,dm=0$$

$$K_Y=-\frac{3GM}{R^5}XZ(I_3-I_1)\qquad XY\int dm(x^2-y^2)=0$$

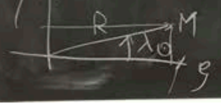
$$K_Z=\frac{3GM}{R^5}\int dm(Xx+Yy+Zz)(xY-yX)=$$

$$I_1=\int dm(y^2+z^2)\qquad I_2=\int dm(z^2+x^2)\qquad I_3=\int dm(x^2+y^2)$$

$$\begin{cases}K_X=\left[\frac{3GM}{R^5}Z(I_3-I_1)\right]Y\\ K_Y=-\left[\quad''\quad\right]X\\ K_Z=0\end{cases}$$

$$\vec{K}\cdot\vec{R}=0\qquad K_XX+K_YY+K_ZZ=0$$

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\\ Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon\\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R\cos\lambda_\odot\\ R\sin\lambda_\odot\\ 0\end{pmatrix}$$



$$\begin{cases}K_\xi=K_X\\ K_\eta=K_Y\cos\varepsilon\\ K_\zeta=-K_Y\sin\varepsilon\end{cases}$$