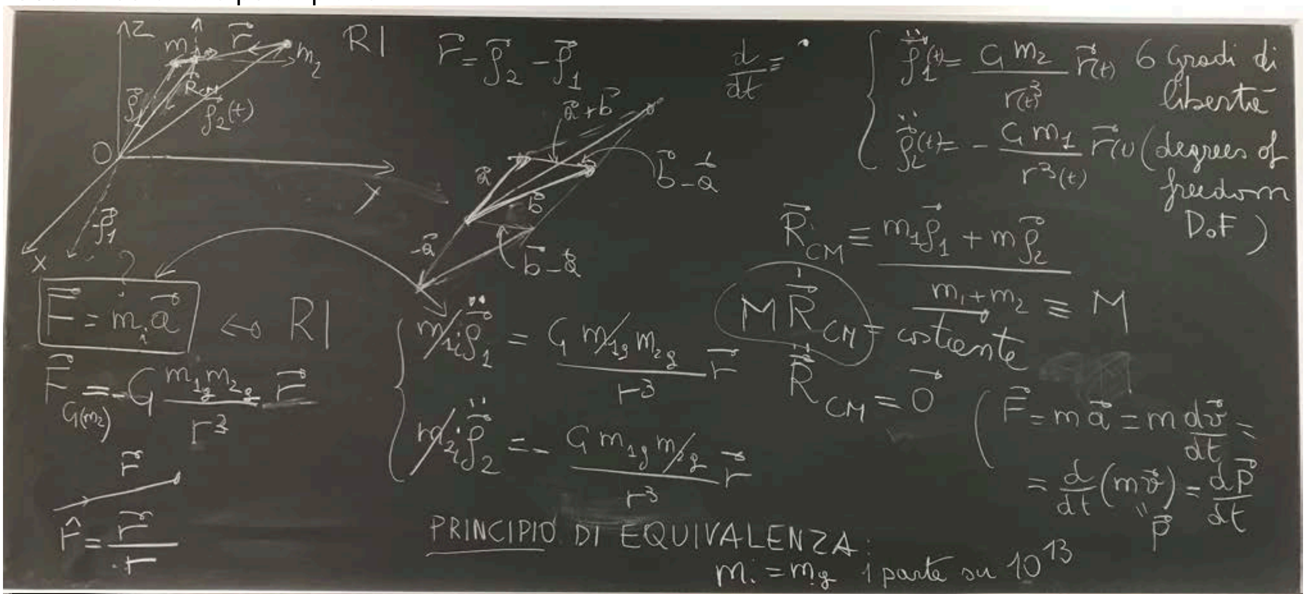
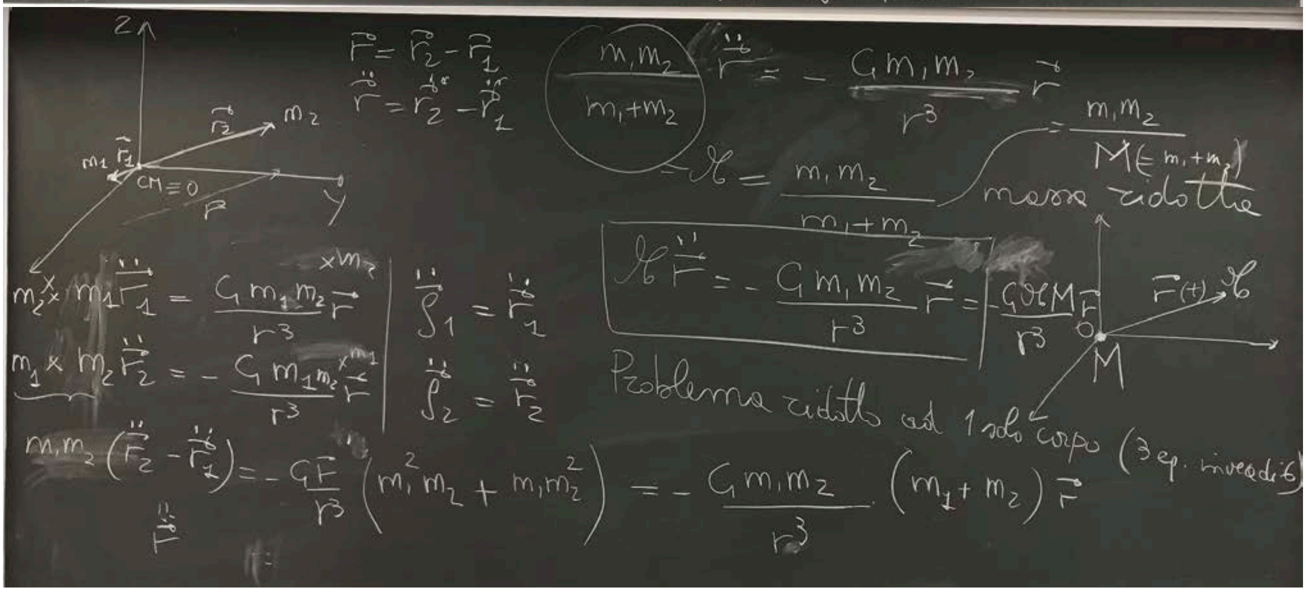
S1: Elementi di Meccanica Celeste, anno accademico 2017-2018, lezioni della prima settimana

1a settimana 25 e 28 settembre 2017
25 settembre 16-18
-Introduzione sul corso e sul programma
-Il problema dei 2-corpi gravitazionale: definizione, gradi di libertà ed equazioni del moto; massa ridotta
-Integrale della quantità di moto lineare
28 settembre 16-18
-Riduzione del problema ad un solo corpo
-Integrale della quantità di moto angolare
-Riduzione al problema piano
-Uso di coordinate polari piane





(R1) $\vec r \equiv \vec r_2 - \vec r_1$

http://eotvos.dm.unipi.it/homenobili.html

m_1, m_2 $\quad O \equiv \vec R_{CM}$

$\vec r_1, \vec r_2$ $\quad$ 6 gradi di libertà

$\dot{} = \frac{d}{dt}$

$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ $\quad M = m_1 + m_2$ ← massa ridotta

$\mu \ddot{\vec r} = -\frac{G M \mu}{r^3} \vec r$

problema dei 2 corpi ridotto ad 1 solo corpo

$$\boxed{\ddot{\vec r} = -\frac{G M}{r^3} \vec r}$$

$M \dot{\vec R}_{CM} = \text{cost}$

$\boxed{\vec F = m \vec a} = m \frac{d\vec v}{dt} = \frac{d}{dt}(m \vec v)$ $\quad \vec P = \frac{d}{dt}(M \dot{\vec R}_{CM}) = M \ddot{\vec R}_{CM} = \vec F_{ext} = 0$

Se $m_2 \ll m_1$ $\quad \frac{m_2}{m_1} = \varepsilon \ll 1$ ← parametro piccolo

$\mu = \frac{m_2}{\frac{m_1}{m_1} + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_2}{1+\varepsilon} = m_2 (1+\varepsilon)^{-1} \simeq m_2 (1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2)) \simeq m_2$

$\vec T = \vec r \times \vec F$

$T = |\vec r \times \vec F| = r F \sin(\widehat{\vec r \vec F})$

INTEGRALI PRIMI: $\cancel{\vec P_{CM}}$ (3), Energia, $\vec J$ (2) direzione (pseudovettore) modulo

FORZA CENTRALE ⇒ moto piano

$\vec a \times \vec b$

$a b \sin\vartheta = |\vec a \times \vec b|$

$\vec b \times \vec a = -(\vec a \times \vec b)$

$-\frac{G M \mu}{r^2} \frac{\vec r}{r}$

$\vec J = \mu \, \vec r(t) \times \dot{\vec r}(t)$ $\quad \frac{d\vec J}{dt} = \vec r \times \vec F_G = 0$

$$\boxed{\vec T = \frac{d\vec J}{dt}}$$

$\Rightarrow \vec J = \text{costante} \Rightarrow$ il piano $\vec r, \dot{\vec r}$ è costante

$\vec r(t=0), \dot{\vec r}(t=0)$

$X, Y \longrightarrow \hat e_x, \hat e_y$ $\quad$ R1 $\quad \vec r = r \hat e_r$

r, ϑ $\quad \hat e_r = \frac{\vec r}{r}$, $\hat e_\vartheta$ $\quad$ RNI $\quad$ anna.nobili@unipi.it

$(r \geq 0)$

$-\infty \leq X, Y \leq +\infty$

$\hat e_r = (\cos\vartheta, \sin\vartheta) = \cos\vartheta \, \hat e_x + \sin\vartheta \, \hat e_y$

$\hat e_\vartheta = (-\sin\vartheta, \cos\vartheta) = -\sin\vartheta \, \hat e_y + \cos\vartheta \, \hat e_y$

$\hat e_r \hat e_\vartheta = -\sin\vartheta\cos\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta = 0$

$\ddot{\vec r} = -\frac{G M}{r^3} \vec r \overset{?}{=} -\frac{G M}{r^2} \hat e_r$

$\dot{\hat e}_r = -\dot\vartheta \sin\vartheta \, \hat e_x + \dot\vartheta \cos\vartheta \, \hat e_y = \dot\vartheta(-\sin\vartheta \, \hat e_x + \cos\vartheta \, \hat e_y) = \dot\vartheta \hat e_\vartheta$

$\dot{\hat e}_\vartheta = -\dot\vartheta \hat e_r$

$\dot{\vec r} = \dot r \hat e_r + r \dot{\hat e}_r = \dot r \hat e_r + r \dot\vartheta \hat e_\vartheta$

$$\boxed{\dot{\vec r} = \dot r \hat e_r + r \dot\vartheta \hat e_\vartheta}$$

$\ddot{\vec r} = \ddot r \hat e_r + \boxed{2 \dot r \dot\vartheta \hat e_\vartheta + r \ddot\vartheta \hat e_\vartheta} - r \dot\vartheta^2 \hat e_r$