1. IL PROBLEMA DEI 2 CORPI

1.1 INTEGRALI PRIMI ED EQUAZIONI DEL MOTO .....
1.2 LE ORBITE E LA LORO CLASSIFICAZIONE .....
1.3 LEGGE ORARIA ED EQUAZIONE DI KEPLERO .....
1.4 INTEGRAZIONE NUMERICA DEL PROBLEMA DEI 2 CORPI .....

1.1 INTEGRALI PRIMI ED EQUAZIONI DEL MOTO

$m_1, m_2 \in \mathbb{R}^3$; puntiformi ; soggetti solo alla loro mutua interazione gravitazionale.

Il sistema è isolato ed ha 6 gradi di libertà (Fig. 1)

(1) $\vec{r} \equiv \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1$ vettore posizione relativa

(2) $\vec{R} \equiv \dfrac{m_1\vec{\rho}_1 + m_2\vec{\rho}_2}{m_1+m_2}$ vettore del centro di massa

$m_1+m_2 \equiv M$ massa totale

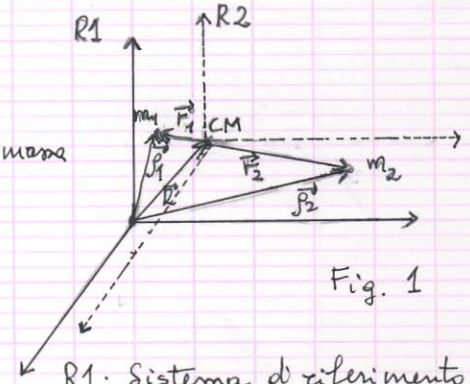


Fig. 1

(3) $\ddot{\vec{R}} = \vec{0}$ perché il sistema è isolato (non ci sono forze esterne)

(4) $M\ddot{\vec{R}} = \vec{\text{cost}}$ la quantità di moto lineare del sistema si conserva (i.e. 3 integrali primi del moto)

R1: Sistema di riferimento inerziale + osservatore con "orologio" (strumento in grado di ripetere a intervalli regolari una data configurazione e quindi di misurare lo scorrere uniforme del tempo)

In R1 vale la legge d'inerzia: un corpo non soggetto a forze mantiene il proprio stato di moto (i.e. velocità costante – zero se era fermo)

Se il CM non era inizialmente fermo posso passare al sistema di riferimento R2 (Fig 1) anch'esso inerziale come R1

Il riferimento R2 è centrato sul centro di massa del sistema:

(5) $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$, $\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ $\Rightarrow$ $\dfrac{m_1}{m_2} = -\dfrac{\vec{r}_2}{\vec{r}_1}$ (6)

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{M}\vec{r} \qquad (7)$$

$$\vec{r}_2 = \frac{m_1}{M}\vec{r}$$

Poiché il sistema è isolato (non c'è alcuna dissipazione), anche l'energia totale si conserva (1 integrale primo del moto)
E poiché non ci sono neppure momenti di forze esterne

non nulli, anche il momento angolare orbitale del sistema si deve conservare:

$$(8)\quad \vec{J} \equiv m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 = -\frac{m_1 m_2}{M} \vec{r} \times \dot{\vec{r}}_1 + \frac{m_2 m_1}{M} \vec{r} \times \dot{\vec{r}}_2 =$$

(per la (7))

$$= \frac{m_1 m_2}{M} \vec{r} \times (\dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1) = \frac{m_1 m_2}{M} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mathcal{M} \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

$\mathcal{M}$ = massa ridotta del sistema

$$\mathcal{M} \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (9)$$

$$(10)\quad \vec{J} = \mathcal{M} \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$ momento angolare orbitale totale

$\vec{J}$ potrebbe variare solo in presenza di una forza che produca un momento non nullo. Siccome la forza gravitazionale, che è l'unica in gioco, è una forza centrale (diretta lungo la congiungente), il suo momento è nullo e quindi $\dot{\vec{J}} = 0$ e $\vec{J}$ si conserva ($\dot{\vec{J}} = \vec{M}$ ← momento di tutte le forze applicate)

Si ricordi che questa è una caratteristica di tutte le forze centrali, non solo di quella gravitazionale

Come si vede dalla (10), $\vec{J}$ è uno pseudovettore (essendo il prodotto vettore di 2 vettori c'è l'ambiguità del segno – regola della mano destra o regola della mano sinistra ... noi usiamo quella della mano sinistra ...). Per questo $\vec{J}$ fornisce 2 (e non 3) integrali primi del moto "buoni" (i.e. t.c. soddisfano le proprietà stabilite dal teorema di Liouville – Arnold – Yost per poter contribuire alla integrabilità del problema)

In totale abbiamo 6 integrali primi "buoni":

3	quantità di moto lineare	
1	energia	(11)
2	momento angolare orbitale	
6		

che risultano in numero pari al numero di gradi di libertà del sistema e pertanto ne garantiscono l'integrabilità (appunto per il teorema di Liouville – Arnold – Yost)

Si noti che basterebbe aggiungere un terzo corpo per passare a

9 gradi di libertà; e siccome non si conoscono per il problema dei 3 corpi (senza alcuna approssimazione – detto "problema generale dei 3 corpi) altri integrali primi oltre quelli elencati nella (11), è evidente che il problema generale dei 3 corpi non è integrabile

Scriviamo ora le eq. del moto del problema dei 2 corpi nel riferimento R2 (Fig. 1) nel quale, essendo inerziale, vale la legge fondamentale della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$, dove in questo caso $\vec{F}$ è la forza di attrazione gravitazionale di Newton:

$$(12)\quad \begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \dfrac{G m_1 m_2}{r^3} \vec{r} & \leftarrow \text{eq. di moto di } m_1 \text{ soggetto all'attrazione gravitazionale di } m_2 \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\dfrac{G m_1 m_2}{r^3} \vec{r} & \leftarrow \text{eq. di moto di } m_2 \text{ soggetto all'attrazione gravitazionale (uguale ed opposta) di } m_2 \end{cases}$$

$G \equiv$ costante di gravitazione universale

$$G \simeq 6.67 \cdot 10^{-11} \quad m^3 s^{-2} kg^{-1}$$

Manipolo in modo ovvio le (12) perché voglio che compaia solo il vettore posizione relativa $\vec{r}$ (e derivate):

$$(13)\quad \begin{cases} m_2 m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \dfrac{G m_1 m_2^2}{r^3} \vec{r} \\ m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\dfrac{G m_1^2 m_2}{r^3} \vec{r} \end{cases}$$

e sottraggo la prima dalla seconda:

$$m_1 m_2 (\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1) = -(m_1^2 m_2 + m_1 m_2^2) \frac{G \vec{r}}{r^3}$$

$$m_1 m_2 \ddot{\vec{r}} = -m_1 m_2 (m_1 + m_2) \frac{G \vec{r}}{r^3} \qquad (14)$$

$$(15)\quad \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

$\left(\mathcal{M} = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \; m_1 + m_2 \equiv M \right)$

$\mathcal{M}$: massa ridotta; M: massa totale

$$\mathcal{M} \ddot{\vec{r}} = -\frac{G m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

$$(16)\quad \mathcal{M} \ddot{\vec{r}} = -\frac{G \mathcal{M} M}{r^3} \vec{r}$$

eq. di moto del problema dei 2 corpi ridotto ad 1 solo corpo

Abbiamo ridotto le eq. di moto (12) dei 2 corpi a quelle (16) di un solo corpo SENZA FARE ALCUNA APPROSSIMAZIONE o caso particolare.

Le eq. (16) vengono interpretate, per semplicità di rappresentazione, come le eq. di moto del sistema descritto in Fig. 2:
un corpo di massa ridotta μ soggetto all'attrazione gravitazionale di un corpo di massa M (pari alla massa totale dei 2 corpi) fisso nell'origine

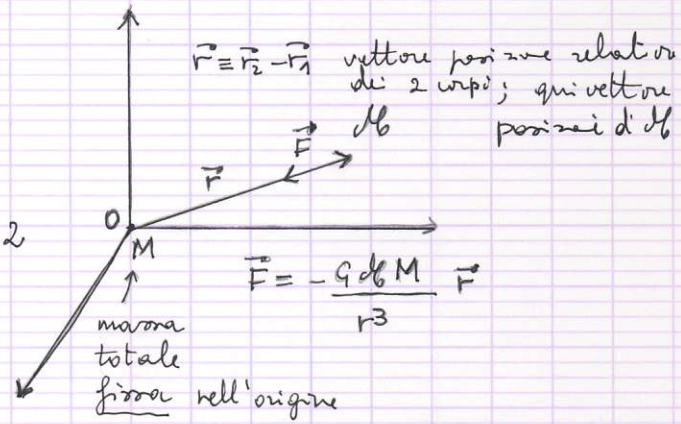


Fig. 2

μ: massa ridotta soggetta alla forza di attrazione $\vec{F}$ due parte di M

Nota: questo appena descritto non è il problema dei 2 corpi gravitazionale con masse μ ed M perché se lo fosse la massa M non potrebbe essere fissa (essendo soggetta all'attrazione di μ), a meno che la massa μ non sia t.c. $\mu \ll M$ – es. Terra puntiforme (o a simmetria sferica) + satellite artificiale)

Attenzione: questo non significa che l'eq. (16) esprima il problema dei 2 corpi originali con qualche approssimazione! Non abbiamo fatto alcuna approssimazione nel passare dalle (12) alla (16); semplicemente, la (16) si può interpretare come l'eq. di moto del sistema descritto in Fig. 2 con la massa M fissa nell'origine

In realtà è utile, per ragioni concettuali, ripartire dalle eq. (12) per ciascuno dei 2 corpi e risolverle tenendo conto che in linea di principio per ogni corpo esistono 2 tipi di masse: massa inerziale e massa gravitazionale

(17) m^i Massa inerziale. È l'inerzia che ogni corpo oppone all'azione di una forza, cioè, è il coefficiente di proporzionalità tra forza applicata (di qualunque tipo) e accelerazione acquisita dal corpo in risposta ad essa ($\vec{F} = m^i \vec{a}$)

(18) m^g Massa gravitazionale. Esprime la capacità di un

corpo dotato di massa di attrarre gravitazionalmente un altro corpo. Si potrebbe chiamare più propriamente "carica gravitazionale" in analogia con la carica elettrica. È quindi la massa che compare nella formula della forza di attrazione gravitazionale così come stabilita da Newton:

$$\vec{F} = -\frac{G m_1^g m_2^g}{r^3}\vec{r} \qquad (19)$$

($\vec{r}$: vettore di posizione relativa)

Tenendo conto di questi 2 diversi tipi di massa, concettualmente ben diversi tra loro, le eq. (12) del moto dei 2 corpi si riscrivono come segue:

$$\begin{cases} m_1^i \ddot{\vec{r}}_1 = \dfrac{G m_1^g m_2^g}{r^3}\vec{r} \\ m_2^i \ddot{\vec{r}}_2 = -\dfrac{G m_1^g m_2^g}{r^3}\vec{r} \end{cases} \qquad (20)$$

Il "Principio di equivalenza" tra massa inerziale e massa gravitazionale stabilisce che per ogni corpo di qualsiasi massa e/o composizione vale:

$$\frac{m^i}{m^g} = +1 \qquad (21)$$

Da qui segue, ad esempio, per un corpo in caduta libera nella superficie della Terra:

$$m^i g = \frac{G M_\oplus^g m^g}{R_\oplus^2} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{G M_\oplus^g}{R_\oplus^2} \qquad (22)$$

cioè, l'accelerazione di caduta libera nel campo gravitazionale della Terra è la stessa per tutti i corpi indipendentemente dalla loro massa e/o composizione. Infatti nella (22), proprio avendo usato la (21), la massa del corpo in caduta non compare più! (Universalità della caduta libera)

Il "Principio" di equivalenza è in realtà una "Ipotesi" che sta alla base sia della teoria della gravitazione di Newton che

della moderna teoria della Relatività Generale di Einstein. La sua verifica sperimentale richiede di verificare l'universalità della caduta libera; ad oggi risulta sperimentalmente verificato al livello di 1 parte su 10^{13}

Assumendo quindi il principio di equivalenza le (20) diventano:

$$(23)\quad \begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = \dfrac{G m_2}{r^3}\vec{r} \\ \ddot{\vec{r}}_2 = -\dfrac{G m_1}{r^3}\vec{r} \end{cases}$$

e sottraendo la prima dalla seconda otteniamo

$$\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{G\vec{r}}{r^3}(m_1+m_2)$$

$$(24)\quad \ddot{\vec{r}} = -\frac{GM\vec{r}}{r^3} \qquad \text{(la massa ridotta non compare ....)}$$

che è identica alla (16) una volta che primo e secondo membro siano stati divisi per $\mathcal{M}$, che è possibile solo in quanto le (16) sono state ottenute dalle (12), che abbiamo scritto usando un solo tipo di massa per ciascun corpo. Il che significa avere tacitamente assunto la validità del principio di equivalenza

1.2 LE ORBITE E LA LORO CLASSIFICAZIONE

Ci proponiamo di scrivere l'equazione delle orbite soluzione della (24) con date condizioni iniziali. È naturale pensare che sia opportuno scrivere le eq. (24) che - ricordiamo - sono 2 sole equazioni nel piano dell'orbita, in coordinate polari piane

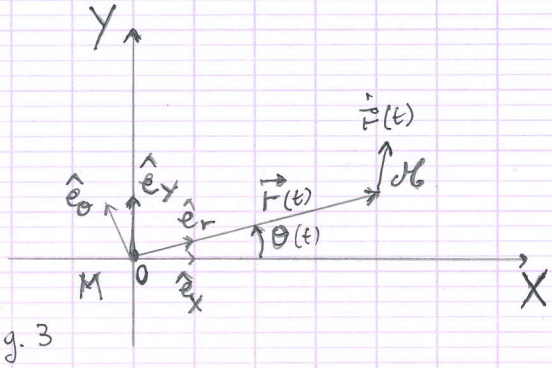


Fig. 3

$$M = m_1 + m_2$$
$$\mathcal{M} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

La Fig. 3 mostra il sistema di riferimento inerziale, nel piano dell'orbita, dove valgono le eq. di moto (24) (o (16)) e dove la direzione dell'asse X è stata scelta verso una direzione "fissa" nel cielo (e.g. il punto γ, nodo ascendente dell'orbita della Terra attorno al Sole, che si muove molto lentamente a causa della precessione Luni-Solare, perturbazioni ben note e quindi tale da poter essere tenute in conto - vedi capitolo apposito). Pertanto, il sistema inerziale di Fig. 3 non è legato al particolare problema dei 2-corpi che stiamo studiando (con date condizioni iniziali); l'angolo θ misurato in senso antiorario a partire dall'asse X di tale sistema definito come sopra si indica come longitudine del corpo.

In coordinate cartesiane X, Y i versori degli assi coordinati sono $\hat{e}_X, \hat{e}_Y$ (vedi Fig. 3), sono ovviamente fissi nel tempo, e le eq. di moto sono:

$$(25)\quad \begin{cases} \ddot{X} = -\dfrac{GM}{r^3} X \\ \ddot{Y} = -\dfrac{GM}{r^3} Y \end{cases}$$

Se passiamo a coordinate polari piane r, θ i versori degli assi coordinati sono $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$ (vedi Fig. 3) che evidentemente variano nel tempo. In tale sistema di coordinate non vale la legge fondamentale della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$, dato che si tratta di un sistema non inerziale, e la $\vec{F} = m\vec{a}$ vale solo in un sistema inerziale. Conviene quindi partire dalle eq. di moto in forma vettoriale (le (24)) ed esprimere il vettore $\vec{r}$ e la sua derivata seconda rispetto al tempo $\ddot{\vec{r}}$ in coordinate polari piane r, θ anziché nelle coordinate cartesiane X, Y. Abbiamo:

$$(26)\quad \vec{r} = r\,\hat{e}_r$$

con

$$(27)\quad r = (X^2 + Y^2)^{1/2}$$

(28) $\hat{e}_r = \cos\theta\, \hat{e}_x + \sin\theta\, \hat{e}_y \equiv (\cos\theta, \sin\theta)$

E quindi:

(29) $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r$

dove (dalla (28)):

$\dot{\hat{e}}_r = -\dot{\theta}\sin\theta\, \hat{e}_x + \dot{\theta}\cos\theta\, \hat{e}_y \equiv +\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta)$

con (vedi Fig. 3):

(30) $\hat{e}_\theta = -\sin\theta\, \hat{e}_x + \cos\theta\, \hat{e}_y \equiv (-\sin\theta, \cos\theta)$

cioè:

(31) $\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta$

con la quale il vettore velocità $\dot{\vec{r}}$ in coordinate polari piane diventa:

(32) $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

Nella eq. di moto (24) compare il vettore accelerazione $\ddot{\vec{r}}$ e quindi dobbiamo derivare la (32) ancora una volta rispetto al tempo:

(33) $\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\hat{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\hat{e}}_\theta$

con (dalla (30)):

$\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\cos\theta\, \hat{e}_x - \dot{\theta}\sin\theta\, \hat{e}_y \equiv -\dot{\theta}(\cos\theta, \sin\theta)$

cioè:

(34) $\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r$

Usando la (31) e la (34), la (33) diventa:

$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r$

e, raggruppando le 2 componenti lungo $\hat{e}_r$ ed $\hat{e}_\theta$:

(35) $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$

Usando la (26) e la (35) possiamo ora scrivere le eq. di moto (24) in coordinate polari piane, cioè nelle 2 direzioni $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$ invece che $\hat{e}_x, \hat{e}_y$ (come nelle (25)). Otteniamo:

(36) $\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta = -\frac{GM}{r^2}\hat{e}_r$

e quindi, componente per componente:

(37) $\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{cases}$

La seconda delle (37) è equivalente a:

(38) $\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0$

$\Downarrow$

$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow (\text{poiché } r>0) \quad 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$

e quindi ci dice che

(39) $r^2\dot{\theta}$ = costante del moto

Questa grandezza ha le dimensioni di un momento angolare per unità di massa. Riprendiamo quindi l'integrale del momento angolare orbitale del sistema $\vec{J}$ come dalla (10) e scriviamolo per unità della massa ridotta del sistema come

(40) $\vec{j} \equiv \frac{\vec{J}}{\mathcal{M}} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

Si tratta come sappiamo di un integrale primo del moto (perché la forza di attrazione gravitazionale è una forza centrale) ed è un vettore perpendicolare al piano orbitale (il piano di Fig. 3)

il cui modulo (usando la (32)) risulta essere:

$$(40') \quad \vec{j} = r\hat{e}_r \times (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = r\hat{e}_r \times r\dot{\theta}\hat{e}_\theta = r^2\dot{\theta}\ \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = r^2\dot{\theta}\,\hat{e}_z$$

cioè

$$(42) \quad j = r^2\dot{\theta}$$

che ovviamente deve essere costante (trattandosi di un vettore integrale del moto) e che abbiamo semplicemente ri-ottenuto con la (39) scrivendo le eq. del moto in coordinate polari piane. È evidente che la (42) lega univocamente - per ogni dato problema dei 2-corpi - le grandezze $\dot{\theta}$ ed r^2, e quindi ci permette di eliminare $\dot{\theta}$ dalla prima delle 2 eq. di moto (37), che diventa:

$$(43) \quad \ddot{r} = \frac{j^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2}$$

Abbiamo quindi ridotto il problema ad una sola equazione di moto nella variabile scalare $r > 0$, essendo partiti dalle 6 eq. di moto (12).

A questo punto dobbiamo trovare l'eq. dell'orbita che soddisfa l'eq. di moto (43). Un modo molto elegante per ottenerla è quello di introdurre il vettore di Lenz $\vec{e}$. Il vettore di Lenz è definito come:

$$(44) \quad \vec{e} \equiv \frac{1}{GM}\,\dot{\vec{r}} \times \vec{j} - \hat{e}_r$$

Si tratta di un vettore adimensionale (verificare...) che giace nel piano del moto e ha l'importante proprietà di essere un integrale del moto, cioè una grandezza costante nel tempo per un dato problema dei 2-corpi con date condizioni iniziali. Come

$$(41) \quad \hat{e}_z = \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_x \times \hat{e}_y$$

↑ versore dell'asse Z, asse ⊥ al piano orbitale di Fig. 3

vedremo si tratta di un integrale non indipendente dai quelli già trovati (in particolare il momento angolare orbitale e l'energia), ma che tuttavia ha un ruolo molto importante. Dimostriamo quindi prima di tutto che si tratta di un integrale del moto. Dobbiamo dimostrare che $\dot{\vec{e}} = \vec{0}$. Dalla definizione (44):

$$(45)\quad \dot{\vec{e}} = \frac{1}{GM}\ddot{\vec{r}} \times \vec{j} - \dot{\hat{e}}_r = -\frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{j} - \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta =$$

↑ uso l'eq. del moto (24) (e la (31) per $\dot{\hat{e}}_r$)

$$= -\frac{1}{r^2}\hat{e}_r \times (r^2\dot{\theta}\,\hat{e}_z) - \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta = -\dot{\theta}\,\underbrace{\hat{e}_r \times \hat{e}_z}_{=-\hat{e}_\theta} - \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta = \vec{0}$$

↑ dalle (40')

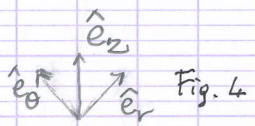


Fig. 4

Poiché $\vec{e}$ è un vettore che giace nel piano del moto, ed è una costante del moto, ne segue che per ogni dato problema dei 2 corpi con date condizioni iniziali esiste una direzione fissa nel piano del moto tipica di quel dato sistema fisico. In attesa di definirne il significato fisico/geometrico, possiamo senz'altro fare la scelta di scegliere questa direzione fissa nel piano del moto come asse coordinato orizzontale, invece dell'asse X di Fig. 3 che, come abbiamo visto, non ha alcuna relazione con il problema dei 2-corpi che stiamo studiando (a differenza del vettore di Lenz!).

Avremo quindi una situazione come in Fig. 5 in cui il nuovo asse orizzontale x coincide con il vettore di Lenz $\vec{e}$. Nel nuovo sistema Oxy

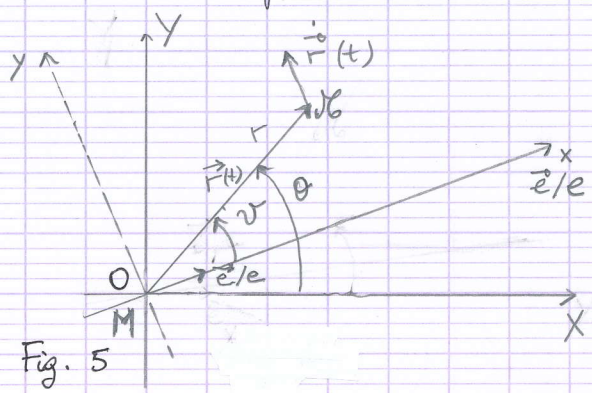


Fig. 5

il vettore $\vec{r}(t)$ posizione istantanea della massa ridotta ed viene espresso in coordinate polari da r, v dove v è l'angolo misurato in senso antiorario a partire dal vettore di Lenz (i.e. dall'asse x). Questo angolo si chiama in meccanica celeste anomalia vera (anomalia perché si misura a partire dal vettore di Lenz e vera perché dà la posizione istantanea vera del corpo sull'orbita rispetto alla massa totale (nel fuoco dell'orbita)

Poiché il vettore di Lenz è fisso nel piano, ne deriva che

$\theta - v = \text{costante}$

e quindi:

(46) $\dot{\theta} = \dot{v}$

che abbiamo scritto

cosicché in tutte le formule in cui compariva il momento angolare orbitale, e quindi $\dot{\theta}$, possiamo usare indifferentemente $\dot{v}$. (la velocità angolare istantanea è la derivata temporale della longitudine $\theta(t)$ o dell'anomalia vera $v(t)$, poiché ad ogni istante nel corso del moto questi 2 angoli differiscono per un angolo fisso, caratteristico del problema dei 2-corpi dato).

Nota: Il momento angolare $\vec{J}$ è un integrale del moto in qualunque problema caratterizzato da una forza centrale, indipendentemente dalla sua dipendenza dalla distanza. Invece il vettore di Lenz è un integrale del moto soltanto nel caso in cui la forza centrale dipende dall'inverso del quadrato della distanza mutua ($F \propto 1/r^2$), come appunto nel caso della forza di attrazione gravitazionale (come si vede dalla (45), per dimostrare che $\dot{\vec{e}} = \vec{0}$ usiamo l'eq. del moto e la variabile r scompare solo perché $F \propto 1/r^2$)

Per scrivere l'eq. dell'orbita che soddisfa l'eq. del moto (43) dobbiamo trovare una relazione nel piano x,y di Fig. 5 tra

le variabili r e v, che vorremo legate da una relazione che fornisca l'equazione dell'orbita. Possiamo ottenerla dal prodotto scalare $\vec{e}\cdot\hat{e}_r$:

(47) $\vec{e}\cdot\hat{e}_r = e\cos v$

$$\left(\frac{1}{GM}\dot{\vec{r}}\times\vec{J} - \hat{e}_r\right)\cdot\hat{e}_r = \frac{1}{GM}\hat{e}_r\cdot(\dot{\vec{r}}\times\vec{J}) - 1 = \frac{1}{GM}\vec{J}\cdot(\hat{e}_r\times\dot{\vec{r}}) - 1 =$$

$$= \frac{1}{GM} r^2\dot{v}\hat{e}_z\cdot\left(\hat{e}_r\times(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{v}\hat{e}_\theta)\right) - 1 = \frac{1}{GM} r^2\dot{v}\hat{e}_z\cdot\underbrace{\left((r\dot{v})(\hat{e}_r\times\hat{e}_\theta)\right)}_{\hat{e}_z} - 1 =$$

$\uparrow$ $J = r^2\dot{v}\hat{e}_z$

$$= \frac{r^3\dot{v}^2}{GM}\hat{e}_z\cdot\hat{e}_z - 1 = \frac{r^3\dot{v}^2}{GM} - 1 = \frac{1}{GM}\frac{J^2}{r} - 1$$

$\uparrow$ $\dot{v} = J/r^2$

e quindi:

$$e\cos v = \frac{J^2}{GM}\frac{1}{r} - 1$$

che scriviamo nella forma

(48) $$r(t) = \frac{J^2/GM}{1 + e\cos v(t)}$$

dove $J^2/GM > 0$ ed $e \geq 0$ sono costanti del moto.
La (47) è l'eq. dell'orbita soluzione delle eq. del moto (24) scritta in coordinate polari piane r, v e cioè distanza relativa della massa ridotta rispetto alla massa totale posta nell'origine (i.e. anche distanza relativa ha le due masse m_1, m_2) e anomalia vera (i.e. l'asse orizzontale nel piano del moto è diretto lungo il vettore di Lenz, come indicato in Fig. 5).
La (48) è l'eq. di una conica in coordinate polari.
La grandezza $J^2/GM > 0$ è una lunghezza e viene storicamente indicata come $p \equiv$ semilato retto della conica dato che rappresenta la distanza della massa ridotta dalla massa totale posta nell'origine quando $v = \pi/2$, cioè ad angolo retto rispetto al vettore di Lenz (asse x).

L'eq. dell'orbita (48) si scrive quindi anche come

$$(49)\quad r = \frac{p}{1+e\cos v}$$

con

$$(50)\quad p \equiv \frac{J^2}{GM} > 0$$

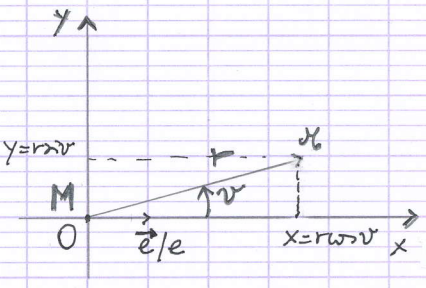


Fig. 6

La (49) in coordinate cartesiane diventa

$r + er\cos v = p \qquad r\cos v = x$

$r = p - ex$

$$(51)\quad x^2 + y^2 = (p - ex)^2$$

che è chiaramente l'eq. di una conica nel piano (x,y).

L'asse di simmetria della conica è l'asse x (che coincide col vettore di Lenz) e l'origine degli assi è fuori centro lungo l'asse x (la variabile x compare alla prima potenza oltre che al quadrato).

La dimensione della conica lungo l'asse di simmetria che definiamo 2a risulta essere (usando la (49)):

$$2a \equiv r(v=0) + r(v=\pi) = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2}$$

$$\Downarrow$$

$$(52)\quad p = a(1-e^2)$$

dove la grandezza a è il semiasse maggiore della conica e il modulo del vettore di Lenz e la sua eccentricità.

Usando la (50) e la (52) otteniamo:

$$(53)\quad J^2 = GMa(1-e^2)$$

che esprime il modulo del momento angolare orbitale (per unità di massa) in funzione delle caratteristiche geometrica dell'orbita: semiasse maggiore a ed eccentricità e. (si noti che J dipende da entrambi).

Quindi il vettore di Lenz è dà la direzione del fericentro dell'orbita, il suo modulo dà l'eccentricità. Il vettore di Lenz è nullo quando l'orbita è circolare e perciò il fericentro non è definito.

Usando la (1.27) riscrivo la (1.25):

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} \qquad (1.28)$$

(vedi Fig. 1.5) e ricapitolo:

1) $e=0$ $\quad r = a = \frac{J^2}{GM}$ circonferenza

2) $0<e<1$ $\quad r_{min} = a(1-e)$

$r_{max} = a(1+e)$

Ellisse con semiasse maggiore $a = \frac{J^2}{GM(1-e^2)}$

e semiasse minore $b = a\sqrt{1-e^2}$ (vedi Fig. 1.6) (1.29)

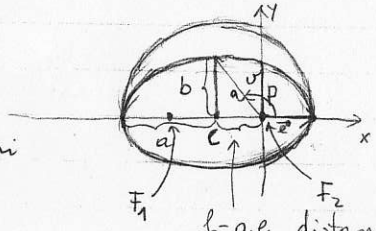


Fig. 1.6

F_1, F_2 fuochi

$f = ae$ distanza del fuoco dal centro di simmetria

- Notare che l'ellisse si ottiene dalla circonferenza di centro C e raggio a abbassando tutti i punti della circonferenza (lungo la perpendicolare all'asse x) di una frazione $\sqrt{1-e^2}$.
- L'ellisse è il luogo dei punti la cui distanza dai fuochi (F_1 ed F_2) è costante ed uguale all'asse maggiore $2a$.

3) $e=1$ (a infinito)

parabola, con parametro p, di equazione:

$$y^2 = p^2 - 2px \qquad (1.30)$$

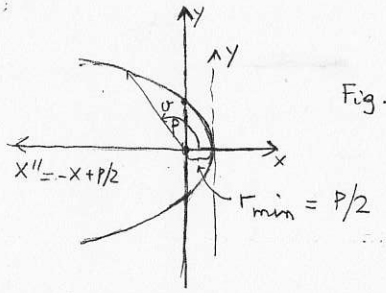


Fig. 1.6

Asse x asse di simmetria; origine degli assi nel fuoco; vertice in $(r_{min} = p/2\ ,\ 0)$. Se sposto l'origine nel vertice: $x \to x' = x - p/2$, la (1.30) diventa:

$y^2 = -2px'$

e poi $x' \to x'' = -x'$: $\quad x'' = \frac{1}{2p}y^2$

4) $e>1$, a negativo

$p = a(1-e^2)$

$(p = J^2/GM > 0)$

$1+e\cos v = \frac{p}{r}$

$r = \text{infinito} \quad 1+e\cos v_{as} = 0$

$\cos v_{as} = -1/e$ dà gli asintoti dell'iperbole

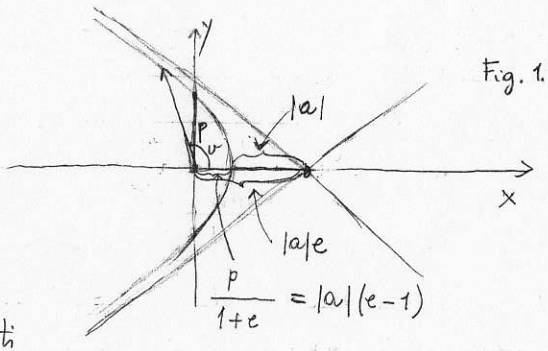


Fig. 1.7

Riprende da p. 14 di 2CorpiParte1.pdf

si noti che $\vec{e}$ giace nel piano individuato da $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ (che supponiamo essere fisso – PIANO ORBITALE); quindi, dato che $\vec{e}$ rappresenta una direzione fissa nel piano orbitale conviene cominciare a contare gli angoli da questa direzione.

Chiamo v "ANOMALIA VERA" l'angolo ($v = v(t)$ ovviamente) del vettore posizione rispetto alla direzione $\vec{e}$:

$$\cos v = \frac{\vec{e}\cdot\vec{e}_r}{e} \qquad (1.23)$$

$$e\cos v = \vec{e}\cdot\vec{e}_r = \frac{1}{GM}\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{j}\right)\cdot\vec{e}_r - 1 =$$

$$= \frac{1}{GM} r^3\dot{\theta}^2 - 1 = \frac{j^2}{GMr} - 1 \qquad (1.24)$$

(uso la (1.18') per $\dot{\vec{r}}\times\vec{j}$; uso la (1.15b))

Quindi:

$$r = \frac{j^2/GM}{1+e\cos v} = \frac{p}{1+e\cos v} \qquad (1.25)$$

$$p = j^2/GM \quad (p>0) \qquad (1.25')$$

La (1.25), che fornisce r in funzione di v (ad ogni t; G, M, j, e sono tutte costanti) è l'equazione dell'orbita

La (1.25) è l'eq. di una conica in coordinate polari (polo nel fuoco della conica e origine dell'angolo v a partire dal vettore $\vec{e}$). Per vederlo posso passare in coordinate cartesiane:

$$x = r\cos v$$

$$r + ex = p$$

$$(x^2+y^2)^{1/2} = p - ex$$

$$x^2+y^2 = (p-ex)^2 \qquad (1.26)$$

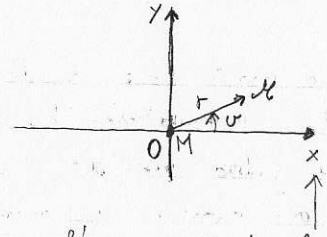


Fig. 1.5

l'asse x coincide col vettore di Lenz
L'origine (dove si trova M) è il fuoco della conica

la (1.26) è la (1.25) in coordinate cartesiane (definite in Fig. 1.5) ed è chiaramente una conica. p è il semilato retto della conica, cioè il valore di r per $v = \pi/2$ ($v=\pi/2$, $\cos v = 0$, $y=0$, $r=p$).

La dimensione della conica lungo la linea del vettore di Lenz $\vec{e}$ (asse x) è l'asse maggiore della conica $2a$:

$$2a = r(v=0) + r(v=\pi) = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2}$$

$$a = p/(1-e^2) \qquad (1.27)$$

$a \equiv$ semiasse maggiore della conica

$0 \le e < 1 \Rightarrow a$ positivo ($e=0$, $r=p=a$ circonferenza)

$e = 1 \Rightarrow a$ infinito

$e > 1 \Rightarrow a$ negativo

Il punto di minima distanza da O -pericentro- ha $v=0$:

$$r_{min} = \frac{p}{1+e} = \frac{a(1-e^2)}{1+e} = a(1-e) \qquad (1.28)$$

(Se $e=0$ $r=p=a$ ed il pericentro non è definito)

Concludo che:

Le soluzioni del problema di 2 corpi (puntiformi) m_1, m_2 in interazione gravitazionale sono moti su coniche di equazione

$$r = \frac{p}{1+e\cos v} \tag{1.31}$$

dove i parametri p, e sono determinati in funzione delle condizioni iniziali $\vec{r}(0), \dot{\vec{r}}(0)$:

$$p = \frac{j^2}{G(m_1+m_2)} \qquad \vec{j} = \vec{r}(0) \times \dot{\vec{r}}(0) \tag{1.32}$$

$$e = \left| \frac{1}{G(m_1+m_2)} \dot{\vec{r}}(0) \times \vec{j} - \vec{e}_r(0) \right| \tag{1.33}$$

La direzione $\vec{e}$ fornisce l'asse di simmetria (asse maggiore) della conica ($\vec{e}=\vec{0}$ circonferenza); l'anomalia vera v si misura a partire da $\vec{e}$ (in senso antiorario); la velocità angolare $\dot{\theta}$ in ogni punto della conica si ottiene da (1.15 b) e (1.31):

$$\dot{\theta} = \frac{j}{r^2} = \frac{j}{p^2}(1+e\cos v)^2 \tag{1.34}$$

NOTA Dall'orbita della massa ridotta μ è facile ricostruire le orbite delle masse m_1 ed m_2 rispetto al loro comune centro di massa $\vec{R}$ definito dalla (1.1). Basta ricordare che se l'origine è in $\vec{R}$, m_1 ed m_2 sono sempre allineate con l'origine, da parti opposte rispetto ad essa e con velocità antiparallele (le quantità di moto dei due corpi sono uguali ed opposte)

§1.2 Velocità lineare ed integrale dell'energia

Poichè il sistema è isolato l'energia totale si conserva:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{G\mu M}{r} \tag{2.1}$$

$\mu M = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(m_1+m_2) = m_1 m_2$

$v^2 = \dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ ($\dot{\theta} = \dot{v}$; θ e v differiscono solo per una costante) (2.2)

$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (Fig. 1.1)

$E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{G(m_1+m_2)}{r}$ Energia totale per unità di massa ridotta (2.3)

Ricavo la relazione tra energia ed elementi dell'orbita. Dalla (1.16) usando la (1.18'):

$$e^2 = \left[\frac{1}{GM}\left(r^3\dot{\theta}^2\vec{e}_r - r^2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right) - \vec{e}_r\right]\cdot\left[\frac{1}{GM}\left(r^3\dot{\theta}\vec{e}_r - \dot{r}r^2\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right) - \vec{e}_r\right] =$$

$$= \frac{1}{G^2M^2}\left(r^6\dot{\theta}^4 + r^4\dot{r}^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{2}{GM}r^3\dot{\theta}^2 + 1 = \qquad (\dot{\theta} = \tfrac{j}{r^2})$$

$$= 1 + \frac{\cancel{r^4}}{G^2M^2}\frac{j^2}{\cancel{r^4}}\left(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\right) - \frac{2}{GM}r^3\frac{j^2}{r^4} =$$

$$= 1 + \frac{j^2}{G^2M^2}v^2 - \frac{2j^2}{GMr} = 1 + \frac{2j^2}{G^2M^2}\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r}\right)$$

cioè:

$$e^2 = 1 + \frac{2Ej^2}{G^2M^2} \tag{2.4}$$

La (2.4) lega energia e momento angolare (per unità di

massa ridotta) con l'eccentricità. D'altro canto, la (1.25') e la (1.27) danno:

$$j^2 = GMa(1-e^2) \qquad (2.5)$$

Sostituendo la (2.5) nella (2.4) ottengo:

$$E = -\frac{GM}{2a} \qquad (2.6)$$

NOTA: la (2.6) dice che l'energia totale fissa uno degli elementi orbitali, il semiasse maggiore. La (2.6) e la (2.5) insieme dicono che, fissate E e j sono fissati due elementi orbitali, cioè il semiasse maggiore e l'eccentricità

Sostituendo la (2.6) nella (2.3) ottengo v^2 in funzione di r:

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \qquad (2.7)$$

↑ fissata E, e quindi a, la (2.7) fornisce il modulo della velocità lineare per ogni valore di r.

La classificazione delle orbite segue dalle (2.6) e (2.4):

$E>0$ $(a<0)$,	$e>1$	ORBITE IPERBOLICHE
$E=0$ $(a\to\infty)$,	$e=1$	ORBITE PARABOLICHE
$E<0$ $(a>0)$,	$0\le e<1$	ORBITE ELLITTICHE (O CIRCOLARI)

(2.8)

Un altro modo ancora per vedere la classificazione delle orbite è quello di usare la (1.15b) ($\dot\theta = j/r^2$) per eliminare $\dot\theta$ dalla (2.3) e ridurre il problema al caso unidimensionale con variabili r, $\dot r$:

$$E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = \frac{1}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right) - \frac{GM}{r} = \frac{1}{2}\dot r^2 + \left(\frac{j^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\dot r^2 + \mathcal{V}(r) = E(r,\dot r) \qquad (2.9)$$

$$\mathcal{V}(r) = \frac{j^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} \qquad (2.10)$$

↑ è il nuovo potenziale del problema ridotto al caso unidimensionale (si chiama anche "potenziale effettivo").

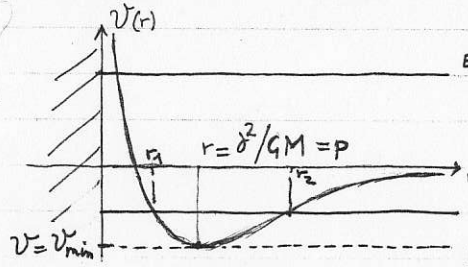


Fig. 2.1

Fissato j (momento angolare per unità di massa ridotta) si possono avere orbite limitate purchè sia $0 > E \ge \mathcal{V}_{min}$; in particolare, il minimo valore possibile di E – cioè $E_{min} = \mathcal{V}_{min} = -\frac{1}{2}\frac{G^2M^2}{j^2}$ – corrisponde all'orbita circolare con quel j

I casi E=0 ed E>0 danno entrambi orbite non limitate, parabole ed iperboli rispettivamente; una importante differenza tra le due è il valore della velocità all'infinito. Dalla (2.7):

$$v^2(\infty) = -\frac{GM}{a} = 2E \qquad (2.11)$$

perciò $v^2(\infty)=0$ per l'orbita parabolica e $v^2(\infty)>0$ per l'orbita iperbolica.

§3. Legge oraria ed equazione di Keplero.

La (1.31)

$$r = \frac{p}{1+e\cos v}, \quad p = \gamma^2/GM = a(1-e^2) \qquad (3.1)$$

è l'eq. della traiettoria. Dalla (3.1), se conosco $v = v(t)$, conosco anche la legge oraria, cioè il modo in cui l'orbita viene percorsa.
Dalla (1.15 b)

$$\dot\theta = \dot v = \frac{\gamma}{r^2} \qquad (3.2)$$

$$\dot v = \frac{\gamma(1+e\cos v)^2}{p^2} \qquad (3.3)$$

Invece di integrare la (3.3)
procedo nel modo seguente. Definisco $A(t)$:

$$A(t) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} r^2(t)\,\dot v(t)\,dt \qquad (3.4)$$

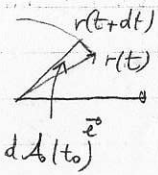


Fig. 3.1

$$\dot A(t) = \frac{1}{2} r^2 \dot v \qquad (3.5)$$

↑ velocità areolare ≡ area spazzata dal raggio vettore nell'unità di tempo

Per la (3.2)

$$\dot A(t) = \frac{1}{2}\gamma \qquad (3.6)$$

La (3.6) dice che la velocità areolare è costante. (Il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali - 2ª legge di Keplero).

Inoltre la conica (3.1) soluzione dell'eq. di moto viene percorsa con verso costante, perché $\dot{v}$ ha lo stesso segno di J (e peraltro è fissato dalle condizioni iniziali)

Se poi $e \le 1$ il moto è periodico. Infatti, quando il corpo ripassa dallo stesso punto dell'orbita dopo un giro (e quindi $\vec{r}$ è lo stesso), anche la velocità è la stessa; perché
$\vec{J} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$
è un integrale del moto, se $\vec{r}$ è lo stesso dopo un giro anche $\dot{\vec{r}}$ deve essere lo stesso e il moto è periodico.

Calcolo il periodo:

$$P = \frac{\text{area dell'ellisse}}{\text{velocità areolare}} = \frac{\pi ab}{\frac{J}{2}} = \frac{2\pi ab}{J} = \frac{2\pi ab}{G^{1/2}M^{1/2}a^{1/2}(1-e^2)^{1/2}} =$$

(ab: per la (3.6); J: per la (2.5))

$$= \frac{2\pi a^2 (1-e^2)^{1/2}}{(GM)^{1/2}a^{1/2}(1-e^2)^{1/2}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{(GM)^{1/2}} \qquad (3.7)$$

($a^2(1-e^2)^{1/2}$: per la (1.29))

$$\left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 a^3 = GM \qquad (3^a \text{ legge di Keplero}) \qquad (3.8)$$

$$n = \frac{2\pi}{P} \qquad \text{moto medio (velocità angolare media)} \qquad (3.9)$$

$$n^2 a^3 = GM \qquad (3.10)$$

E poiché $a = GM/(-2E)$ (2.6) risulta

$$n = \frac{(-2E)^{3/2}}{GM} \qquad (3.11)$$

cioè l'integrale dell'energia fissa il moto medio con cui viene percorsa l'orbita. Ci permette di definire una variabile angolo, l'anomalia media ℓ, nel modo seguente. Se al tempo iniziale t_0 il corpo passa al pericentro (i.e. $v(t_0)=0$), al tempo $t-t_0$ $(t>t_0)$ esso avrebbe percorso un angolo:

$$\ell = n(t-t_0) \qquad \text{anomalia media} \qquad (3.12)$$

se la sua velocità angolare, anziché variare lungo l'orbita, fosse costante ed uguale al suo valore medio n. Se l'orbita fosse circolare, $\dot{v}(t) = n = \text{costante}$ per $\forall t$ e ℓ coinciderebbe con l'anomalia vera v; se però $e \neq 0$, allora ℓ e v non coincidono.

La relazione tra ℓ e v fornisce, con la (3.12), $v = v(t)$. Per trovare questa relazione definisco una variabile angolo intermedia u detta anomalia eccentrica (Fig. 3.2)

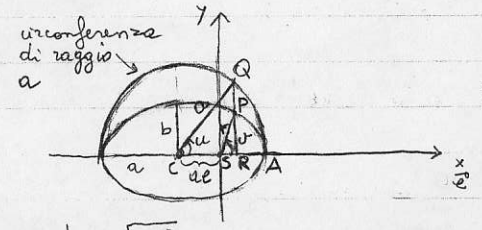


Fig. 3.2

La relazione tra v ed u (i.e. tra anomalia vera ed anomalia eccentrica) è data dalle equazioni: (vedi Fig. 3.2)

$$\begin{cases} r\cos v = a\cos u - ae \\ r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin u \end{cases} \qquad (3.13)$$

ovvero:

$$r = a(1-e\cos u) \qquad \left(\text{da } r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}\right) \tag{3.14}$$

$$\cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u} \tag{3.15}$$

$$\sin v = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{1-e\cos u} \tag{3.16}$$

Notare che la (3.14) è l'equazione dell'orbita nelle variabili r, u (anziché r, v come nella (3.1)).

$\Rightarrow u = v$ solo per multipli di π.

Ora uso la 2ª legge di Keplero (legge delle aree), più alcune semplici considerazioni geometriche, per trovare la relazione tra u (e quindi v) ed l (e quindi t)

↑ per le (3.15), (3.16) — ↑ per la (3.12)

Per la legge delle aree (e si veda Fig. 3.2):

$$\frac{\text{area SPA}}{\text{area dell'ellisse}} = \frac{t - t_0}{P}$$

$$\text{area SPA} = \pi ab\,(t-t_0)/P = \underset{\uparrow}{\frac{\pi a b l}{nP}} = \frac{1}{2}abl = \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\,l \tag{3.17}$$

per la (3.12)

D'altro canto, guardando la Fig. 3.2 posso dire che:

$$\text{area SPA} = \text{area SPR} + \text{area RPA} = \text{area SPR} + \sqrt{1-e^2}\,\text{area QRA} \tag{3.18}$$

Infatti:

$$\text{area RPA} = \sqrt{1-e^2}\,\text{area QRA} \tag{3.19}$$

per la relazione di affinità tra il cerchio e l'ellisse (se vedi (dividete l'area in strisce parallele all'asse minore dell'ellisse e calcolatela per integrazione)

Allora:

$$\text{area SPA} = \text{area SPR} + \sqrt{1-e^2}\,(\text{area QCA} - \text{area QCR}) =$$

$$= \frac{1}{2}r^2\cos v\sin v + \sqrt{1-e^2}\left(\frac{1}{2}a^2u - \frac{1}{2}a^2\cos u\sin u\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(r\cos v)(r\sin v) + \sqrt{1-e^2}\left(\frac{1}{2}a^2u - \frac{1}{2}a^2\cos u\sin u\right) =$$

$$\nearrow = \frac{1}{2}a^2(\cos u - e)\sqrt{1-e^2}\sin u + \frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\,a^2u - \frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\,a^2\cos u\sin u =$$

(per le (3.13))

$$= -\frac{1}{2}a^2e\sqrt{1-e^2}\sin u + \frac{1}{2}a^2u\sqrt{1-e^2} =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\,(u - e\sin u) \tag{3.20}$$

Uguaglio la (3.20) alla (3.17) ed ho:

$$n(t-t_0)$$

$$l = u - e\sin u \qquad \text{EQUAZIONE DI KEPLERO} \tag{3.21}$$

L'eq. di Keplero (3.21) dà l'anomalia media in funzione dell'anomalia eccentrica ($l = l(e,u)$) ma non ha soluzione analitica esplicita (per $e>0$)

$$u = u(l, e) \tag{3.22}$$

Dalle condizioni iniziali: $\vec{r}(0)=\vec{r}_2(0)-\vec{r}_1(0)$; $\dot{\vec{r}}(0)=\dot{\vec{r}}_2(0)-\dot{\vec{r}}_1(0)$, calcolo: $\vec{j}=\vec{r}(0)\times\dot{\vec{r}}(0)$

$$\vec{e}=\frac{1}{GM}\,\dot{\vec{r}}(0)\times\vec{j}-\frac{\vec{r}(0)}{r(0)} \qquad (3.33)$$

Calcolo l'integrale dell'energia per unità di massa ridotta:

$$E=\frac{1}{2}\,\dot{\vec{r}}(0)\cdot\dot{\vec{r}}(0)-\frac{GM}{r(0)} \qquad (3.34)$$

IMPORTANTE controllo che sia $U_{min}<E<0$ (voglio un'orbita ellittica. Vedi Fig. 2.1)

da cui ottengo il semiasse maggiore dell'orbita

$$a=\frac{GM}{(-2E)} \qquad (3.35)$$

Dalla (3.33) ho ovviamente l'eccentricità e controllo che sia

$$e<1 \qquad (3.36)$$

Dalla (3.35) ho il mot. medio e il periodo (3^a legge di Keplero):

$$n=\frac{(-2E)^{3/2}}{GM} \qquad P=\frac{2\pi}{n} \qquad (3.37)$$

Dalla (3.14) calcolo l'anomalia eccentrica all'istante iniziale:

$$\cos u(0)=\frac{1}{e}\left(1-\frac{r(0)}{a}\right) \qquad (3.38)$$

Poiché mi serve $u(0)$, per decidere in quale quadrante sono ho bisogno anche di $\sin u(0)$. Lo ottengo derivando la (3.14):

$\dot{r}=ae\dot{u}\sin u$ ($\dot{r}$ è la velocità radiale. In particolare: $\dot{r}(0)=\dot{\vec{r}}(0)\cdot\frac{\vec{r}(0)}{r(0)}$)

è la calcolo più avanti (vedi la 3.49). Quindi ho

$$\sin u(0)=\frac{r(0)\,\dot{r}(0)}{ae\,n} \qquad (3.39)$$

Avendo $u(0)$, uso l'eq. di Keplero (3.21) per calcolare $l(0)$ tenendo conto che nella (3.21) t_0 è il tempo del passaggio al pericentro (che ora chiamo t_p per evitare confusione):

$$l(t=0)=n\cdot(t=0-t_p)=u(t=0)-e\sin u(t=0) \qquad (3.40)$$

da cui

$$t_p=-\frac{l(0)}{n} \qquad (3.41)$$

Adesso calcolo, sempre per $t=0$, le coordinate cartesiane della massa ridotta nel sistema di riferimento di Fig. 3.3:

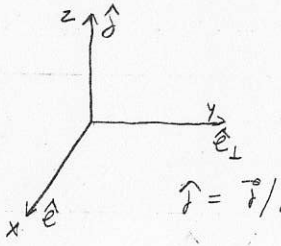


Fig 3.3

$\hat{j}=\vec{j}/j$ $\quad\hat{e}=\vec{e}/e$

$\hat{e}$, $\hat{e}_\perp$, $\hat{j}$ sono 3 versori che formano una terna sinistrorsa.

$$\hat{e}_\perp=\hat{j}\times\hat{e} \qquad (3.42)$$

In realtà so che il moto si svolge nel piano $\hat{e}$, $\hat{e}_\perp$.

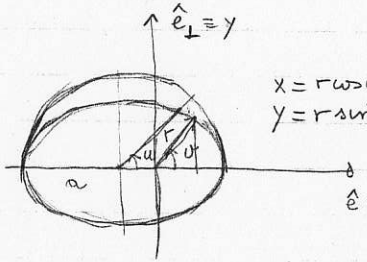


Fig. 3.4

Allora le coordinate cartesiane x,y (vedi Fig 3.4) al tempo $t=0$ sono (uso le (3.13)):

$$\begin{cases}x(0)=a\cos u(0)-ae\\ y(0)=a\sqrt{1-e^2}\sin u(0)\end{cases} \qquad (3.43)$$

Il passo successivo è naturalmente di calcolare le coordinate cartesiane (e magari anche le velocità) ad un tempo $t_1 > t = 0$

Allora:

$$\ell(t_1) = n(t_1 - t_p) \qquad (3.44)$$

Dall'eq. di Keplero:

$$\ell(t_1) = u(t_1) - e \sin u(t_1) \qquad (3.45)$$

posso ricavare $u(t_1)$ (vedi pg. 3.7 per la soluzione dell'eq. di Keplero). E quindi:

$$\begin{cases} x(t_1) = a\cos u(t_1) + ae \\ y(t_1) = a\sqrt{1-e^2}\sin u(t_1) \end{cases} \qquad (3.46)$$

$$r(t_1) = \left(x^2(t_1) + y^2(t_1) \right)^{1/2} \qquad (3.47)$$

Se voglio anche le velocità devo calcolarmi $\dot{u}$ in funzione di t. Uguaglio la (3.1) e la (3.14):

$$(1 - e\cos u)(1 + e\cos v) = 1 - e^2 \qquad (3.48)$$

Derivo rispetto al tempo:

$$\dot{u} = \dot{v}\, \frac{\sin v}{\sin u}\, \frac{(1 - e\cos u)}{(1 + e\cos v)}$$

Uso:

$$\dot{v} = \frac{\gamma}{r^2} = \frac{\gamma}{a^2(1-e\cos u)^2}$$

$$1 + e\cos v = \frac{a(1-e^2)}{r} = \frac{\cancel{a}(1-e^2)}{\cancel{a}(1-e\cos u)}$$

$$\sin v = \frac{a}{r}\sqrt{1-e^2}\sin u = \frac{\cancel{a}\sqrt{1-e^2}\sin u}{\cancel{a}(1-e\cos u)}$$

ed ottengo:

$$\dot{u} = \frac{\gamma}{a^{\cancel{2}}\cancel{(1-e\cos u)^2}}\, \frac{1}{\cancel{\sin u}}\, \frac{\sqrt{1-e^2}\,\cancel{\sin u}}{(1-e\cos u)}\, \frac{(1-e\cos u)^2}{(1-e^2)}$$

$$\dot{u} = \frac{\gamma}{a^2}\, \frac{1}{\sqrt{1-e^2}\,(1-e\cos u)} = \frac{\gamma}{ar\sqrt{1-e^2}} = \frac{\sqrt{GMa(1-e^2)}}{a\sqrt{1-e^2}\,r} = \qquad (3.49)$$

$$= \frac{(GM)^{1/2}}{a^{3/2}}\, \frac{1}{r} = \frac{(GM)^{1/2}}{a^{3/2}}\, \frac{a}{r} = n\, \frac{a}{r}$$

$$\dot{u}(t_1) = n\, \frac{a}{r(t_1)} \qquad (3.50)$$

E quindi:

$$\begin{cases} \dot{x}(t_1) = -a\dot{u}(t_1)\sin u(t_1) \\ \dot{y}(t_1) = a\sqrt{1-e^2}\,\dot{u}(t_1)\cos u(t_1) \end{cases} \qquad (3.51)$$

Notare però che così ho ottenuto posizione e velocità per ogni tempo $t_1 > t_0 = 0$ nel riferimento di Fig. 3.3 in cui il piano x,y coincide con il piano orbitale e l'asse x con la direzione del pericentro. Per avere le corrispondenti posizioni e velocità nel riferimento inerziale di partenza (**Fig 3.2**) devo eseguire una traslazione (corrispondente al moto uniforme del centro di massa) e poi una rotazione corrispondente all'orientazione dell'orbita nello spazio. Nel **§1.4** discuterò appunto l'orientazione dell'orbita nello spazio e finirò di risolvere il problema dei due corpi.

Ora mostro come si risolve l'eq. di Keplero con il metodo di Newton.
Il metodo di Newton serve per risolvere una eq. del tipo:

$$f(x)=0 \qquad (3,52)$$

cioè per trovare gli zeri della $f(x)$ in un certo intervallo della variabile indipendente x. La $f(x)$ deve essere continua e non cambiare di concavità nell'intervallo considerato.

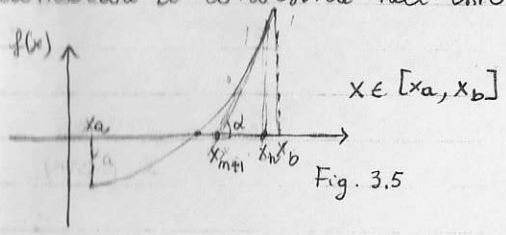


Fig. 3.5

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (3.53)$$

Il metodo converge alla soluzione in pochissimi passi; ricordarsi di controllare che $f''(x)$ non cambia segno per $x \in [x_a, x_b]$; ricordarsi di partire con il valore di x per il quale la derivata prima è massima (altrimenti si rischia di finire fuori dall'intervallo considerato).

Ora applico il metodo di Newton per risolvere l'eq. di Keplero (3,21). Cerco il valore di u che per un dato valore dell'anomalia media l risolve l'equazione: (e fissato dalle condizioni iniziali)

$$f(u) = u - e\sin u - l = 0$$

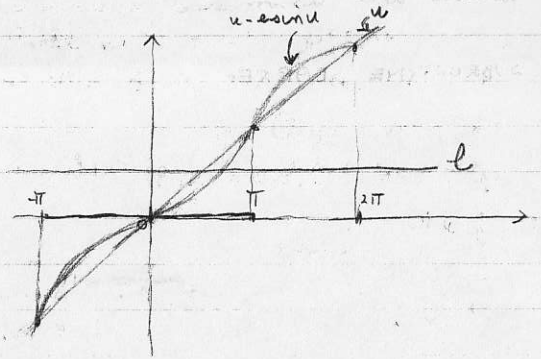


Fig. 3.6

Qualunque sia il valore dato di l, devo ricondurlo ad uno dei due intervalli $0,\pi$ oppure $-\pi,0$ altrimenti ricorro in problemi di cambiamento di segno della derivata seconda; inoltre devo sapere in quale dei due intervalli mi trovo, per decidere da dove partire (rispettivamente da π e da $-\pi$). Una volta fatto questo uso la formula ricorrente

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n - e\sin u_n - l}{1 - e\cos u_n} \qquad (3.54)$$

(la derivata è rispetto alla variabile u!)

e in pochi passi arrivo alla soluzione cercata in quel dato intervallo.

Calcolo dell'anomalia eccentrica in CARKEP

SUBROUTINE CARKEP (r, rp, gm, eps, ek, n) (vedere programma keplq)

$$l = u - e\sin u \qquad \text{(eq. keplero)} \qquad (1)$$

$$\dot l = \dot u - e\dot u\cos u$$

$$\dot l = n \Rightarrow \dot u = \frac{n}{1-e\cos u} = n\frac{a}{r} \qquad (2)$$

$$r = a(1-e\cos u) \qquad \text{eq. orbita} \qquad (3)$$

$$\Downarrow$$

$$\cos u = \left(1-\frac{r}{a}\right)1/e \qquad (4)$$

Derivando la (3):

$$\dot r = ae\dot u\sin u$$

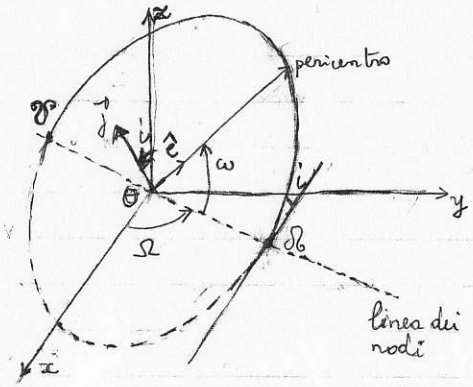
$$\sin u = \frac{\dot r}{ae\dot u} = \frac{\dot r}{ae\left(\frac{n}{1-e\cos u}\right)} = \frac{\dot r\, r}{na^2e} = \frac{\left(\dot{\vec r}\cdot\frac{\vec r}{r}\right)r}{na^2e} = \frac{\dot{\vec r}\cdot\vec r}{na^2e}$$

componente radiale

($\dot r$ è il modulo della velocità V, che è data in INPUT dal vettore rp moltiplicato scalarmente per il versore del raggio $\vec r$)

§1.4 L'orbita nello spazio

Considero un sistema di riferimento inerziale Oxyz nella cui origine immagino che sia concentrata tutta la massa m_1+m_2



(caso e<1)

$\hat x, \hat y, \hat z$ versori degli assi coordinati.

Fig. 4.1

Nella Fig. 4.1 il piano orbitale, individuato dal vettore di Lenz $\hat e$ e dal raggio vettore $\vec r(0)$ della massa ridotta $\mathcal{M}$ (purché non sia uno al pericentro e all'apocentro, nel qual caso uso $\dot{\vec r}(0)$), taglia il piano x,y lungo una retta detta linea dei nodi, e forma col piano x,y un angolo diedro i (inclinazione)

L'orbita incontra la linea dei nodi in 2 punti: nodo ascendente ☊ (quando il corpo $\mathcal{M}$ interseca il piano xy dal basso verso l'alto - l'alto essendo definito dalle z positive), e nodo discendente.

L'angolo Ω della linea O☊ con l'asse x si chiama longitudine del nodo ascendente. ($0 \le \Omega < 2\pi$).

Dati i ed Ω è fissato il piano orbitale, ma se l'orbita non è circolare bisogna ancora fissarne l'orientazione, e cioè il pericentro. L'angolo ω (argomento del pericentro) è l'angolo del versore di Lenz $\hat{e}$ rispetto alla linea dei nodi $O\mathcal{N}$.
$(0 \le \omega < 2\pi)$

Sappiamo già che a, e (p nel caso parabolico) danno le dimensioni dell'orbita; se viene dato anche t_p (p nel caso parabolico) - tempo del passaggio al pericentro - i 6 elementi $a, e, i, \omega, \Omega, t_p$ individuano il moto di $\mathcal{H}$ per qualunque tempo e sono del tutto equivalenti alle 6 condizioni iniziali (posizioni e velocità) $\vec{r}(0)$, $\dot{\vec{r}}(0)$ in coordinate cartesiane.

Per avere Ω, ω a partire dalle condizioni iniziali cartesiane basta costruirsi il versore del nodo ascendente:

$$\hat{\mathcal{N}} = \frac{\hat{z} \times \vec{j}}{|\hat{z} \times \vec{j}|} \qquad (4.1)$$

(analogamente, per il nodo discendente:

$$\hat{\mathcal{N}} = \frac{\hat{z} \times (-\vec{j})}{|\hat{z} \times (-\vec{j})|} \ )$$

E quindi:

$$\cos\Omega = \hat{\mathcal{N}} \cdot \hat{x} \qquad (4.2)$$

$$\cos\omega = \hat{\mathcal{N}} \cdot \hat{e} \qquad (4.3)$$

I 6 elementi $a, e, i, \omega, \Omega, t_p$ si chiamano ELEMENTI KEPLERIANI.

Essi sono validi anche per orbite iperboliche e paraboliche (in questo ultimo caso con p al posto di a ed $e=1$. Per orbite circolari ω non ha senso; per orbite con $i=0$, $i=\pi$ Ω non ha senso. Per questo nel caso di piccole inclinazioni si preferisce usare l'angolo

$$\varpi = \Omega + \omega \qquad \text{LONGITUDINE DEL PERICENTRO} \qquad (4.4)$$

che per $i \to 0, \pi$ tende all'angolo del versore $\hat{e}$ con l'asse delle x nel piano xy visto da $\vec{j}$.

Ricapitolo come dalle condizioni iniziali $\vec{r}(0)$, $\dot{\vec{r}}(0)$ (vedi le (3.31)) si ricavano gli elementi kepleriani nel caso $e<1$

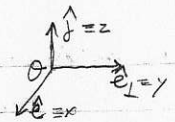
i) calcolo gli integrali primi $\vec{j}$, $\hat{e}$, E da cui ricavo a, e (ed anche n, p)

ii) calcolo $\omega(0)$ dalle (3.38), (3.39) e quindi - tramite l'eq. di Keplero - il tempo t_p di passaggio al pericentro

iii) i = angolo $(\hat{j}, \hat{z})$ visto da $\hat{\mathcal{N}}$ $\qquad 0 \le i < \pi$ INCLINAZIONE
calcolo $\hat{\mathcal{N}}$ con la (4.1)
Ω = angolo $(\hat{\mathcal{N}}, \hat{x})$ visto da $\hat{z}$ $\qquad 0 \le \Omega < 2\pi$ LONGITUDINE del NODO ASCENDENTE
ω = angolo $(\hat{e}, \hat{\mathcal{N}})$ visto da $\hat{j}$ $\qquad 0 \le \omega < 2\pi$ ARG. del PERICENTRO

Notare che il riferimento $Oxyz$ è un riferimento inerziale parallelo a quello in cui sono state date le condizioni iniziali; è solo traslato rispetto a questo affinché il centro di massa sia fisso; inoltre in esso si considera il moto relativo di $\mathcal{H}$ rispetto ad $M = m_1 + m_2$ che è fisso nell'origine O.

Una volta trovate le coordinate al tempo $t_1 > 0$ nel piano dell'orbita

(vedi le (3.46)) devo ruotare da questo riferimento 

nel riferimento $Oxyz$. Lo faccio in 3 passi:

1. ruoto intorno a $\hat{j}$ di $(-\omega)$ in modo da portare $\hat{e}$ a coincidere con $\hat{\Omega}$
2. ruoto intorno ad $\hat{\Omega}$ $(=\hat{e})$ di $(-i)$, cosicché $\hat{j}$ coincide con $\hat{z}$
3. ruoto intorno a $\hat{z}$ di $(-\Omega)$, cosicché $\hat{\Omega}$ $(=\hat{e})$ coincide con $\hat{x}$

Notare: ruoto gli assi di riferimento lasciando fissi i vettori.
Ognuna di queste 3 rotazioni è espressa da una matrice ortogonale; la matrice prodotto delle 3 (nell'ordine indicato) è la matrice $\mathcal{R}$ che porta dal riferimento $O\hat{e}, \hat{e}_1, \hat{j}$ al riferimento $Oxyz$; se applico $\mathcal{R}$ al vettore posizione $\vec{r}(t_1)$ scritto in $O\hat{e}, \hat{e}_1, \hat{j}$ ottengo le componenti dello stesso vettore di $Oxyz$. I vettori posizione $\vec{r}_1$ ed $\vec{r}_2$ di m_1 ed m_2 sono semplicemente (in $Oxyz$)

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = -\dfrac{m_2}{M}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = \dfrac{m_1}{M}\vec{r} \end{cases} \tag{4.5}$$

e nel riferimento iniziale di figura (3.2):

$$\begin{cases} \vec{\rho}_1 = \vec{R} + \vec{r}_1 = \vec{R} - \dfrac{m_2}{M}\vec{r} \\ \vec{\rho}_2 = \vec{R} + \vec{r}_2 = \vec{R} + \dfrac{m_1}{M}\vec{r} \end{cases} \tag{4.6}$$

(con $\vec{R}(t)$ dato dalla (3.26))

Ora calcolo la matrice $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_3 \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 \tag{4.7}$$

$$\mathcal{R}_1 = \begin{pmatrix} \cos(\omega) & \sin(-\omega) & 0 \\ -\sin(-\omega) & \cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{step 1} \tag{4.8}$$

$$\mathcal{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos i & -\sin i & 0 \\ \sin i & \cos i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{step 2} \tag{4.9}$$

$$\mathcal{R}_3 = \begin{pmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{step 3} \tag{4.10}$$

Per eseguire la rotazione $\mathcal{R}$ basterà applicare tre rotazioni successive avendo cura di scegliere gli assi di rotazione giusti. VEDREMO CHE IN REALTA' NEL PROGRAMMA BASTA USARE MATRICI 2×2

Nota: ho costruito $\mathcal{R}$ in modo che ruoti gli assi lasciando fissi i vettori; applicare $\mathcal{R}$ significa scrivere lo stesso vettore nel nuovo sistema di coordinate.

Analogamente, applico $\mathcal{R}$ al vettore velocità (3.51) (la componente zeta è nulla perché siamo nel piano dell'orbita) per ottenerne le componenti nel riferimento $Oxyz$

Ora possiamo cominciare a scrivere un programma che risolva automaticamente il problema dei due corpi secondo il procedi=

mento descritto fin qui (a partire da pag. 13.4); si tratta di un procedimento analitico con la piccola eccezione del metodo di Newton per la soluzione dell'eq. di Keplero.

Più avanti discuterò un metodo numerico per la risoluzione di eq. differenziali del tipo (1.1) che applicherò al problema dei due corpi per fare un confronto con il procedimento analitico e testare così il metodo numerico.
Ovviamente, userò poi il metodo numerico per risolvere problemi più interessanti che non sono integrabili se non numericamente.