## CRITERIO DI STABILITÀ DI HILL APPLICATO AGLI ASTEROIDI: CALCOLO DELL'INTEGRALE DI JACOBI DELL'ASTEROIDE CON CONDIZIONI INIZIALI DATE

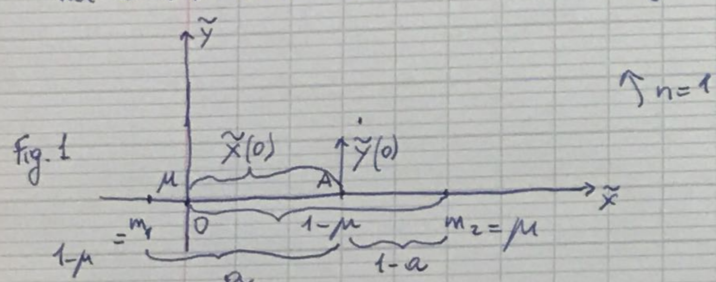
- Consideriamo il problema dei 2-corpi imperturbato Sole + asteroide della main belt in orbita attorno ad esso a distanza a. L'orbita si assume circolare
- Al tempo $t=0$, mentre l'asteroide si muove come detto, entra in gioco Giove con $\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2} \simeq 10^{-3}$ in orbita circolare di raggio $a_{Giove}=1$ nello stesso piano di quella dell'asteroide.

Le unità sono quelle tipiche del problema dei 3-corpi ristretto circolare:

$$(1) \begin{cases} G = 1 \\ a_{giove} = 1 \\ m_1 + m_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow n_{Giove} = 1$$

A $t=0$ nel riferimento $\tilde{x}, \tilde{y}$ rotante con Giove e centrato nel centro di massa del sistema Sole-Giove abbiamo:

Fig. 1




L'integrale di Jacobi dell'asteroide in A è: (per definizione)

$$(2) \quad -C(0) = \frac{1-\mu}{a} + \frac{\mu}{1-a} + \frac{1}{2}\tilde{x}(0)^2 - \frac{1}{2}\dot{\tilde{y}}(0)^2$$

Con:

$\tilde{x}(0) = a - \mu$

$\dot{\tilde{y}}(0) \equiv$ è la velocità dell'asteroide A rispetto all'origine O nel riferimento inerziale (non rotante). Per assunzione esso è partito su orbita circolare di raggio a attorno al sole (di massa $1-\mu$). Tale velocità è:

$$(3) \quad \dot{y}_{rispetto\ al\ Sole} = \sqrt{\frac{1-\mu}{a}}$$

Però, a $t=0$ abbiamo "acceso" Giove, posto come in figura, quindi il Sole si è spostato a distanza $\mu$ da O (perché O è il centro di massa), e ruota attorno ad esso (nel riferimento inerziale) con velocità $n\mu = \mu$ in senso antiorario positivo come l'asteroide. Quindi, se vogliamo la velocità iniziale dell'asteroide rispetto ad O (nel riferimento inerziale), dobbiamo sottrarre alla (3) quella del Sole attorno ad O, quindi:

$$(4) \quad \dot{y}(0) = \sqrt{\frac{1-\mu}{a}} - \mu$$

Però, l'integrale di Jacobi (2) è scritto nel riferimento rotante con Sole-Giove a velocità angolare $n=1$. Nel punto A dove l'asteroide si trova al tempo $t=0$ la velocità lineare attorno ad O (in senso antiorario) è:

$$\dot{\tilde{y}}_A = \overset{1}{\overset{\shortparallel}{n}} \tilde{x}(0) = a - \mu$$

che dobbiamo sottrarre alla (4) per avere $\dot{\tilde{y}}(0)$. Otteniamo:

$$(5) \quad \dot{\tilde{y}}(0) = \sqrt{\frac{1-\mu}{a}} - \mu - (a-\mu) = \sqrt{\frac{1-\mu}{a}} - a$$

$$-C(0) = \frac{1-\mu}{a} + \frac{\mu}{1-a} + \cancel{\frac{1}{2}a^2} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu^2}_{\leftarrow \text{ trascurabile}} - a\mu - \frac{1-\mu}{2a} - \cancel{\frac{1}{2}a^2} + (1-\mu)^{1/2}a^{1/2}$$

$$\rightarrow (6) \quad \boxed{-C(0) \simeq \frac{1-\mu}{2a} + \frac{\mu}{1-a} + (1-\mu)^{1/2}a^{1/2} - a\mu}$$

che dipende solo da a (dato $\mu$)