Fisica I, *a.a.* 2010–2011, Appello del 16 Gennaio 2012

Anna Nobili

1 Oscillatore armonico rotante in 2 dimensioni

Si consideri in un laboratorio terrestre una piattaforma con superficie perfettamente liscia e priva di attrito posta orizzontalmente e rotante con velocità angolare costante ω_r in senso antiorario attorno ad un asse verticale passante per il punto O. Indichiamo con Oxy un sistema di assi cartesiani ortogonali solidali col piano rotante e con Ox_iy_i un sistema di assi cartesiani ortogonali con la stessa origine ma non rotanti (Figura 1). Al tempo iniziale un corpo puntiforme di massa m si trova sull'asse rotante x collegato ad una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla la quale è fissata sul piano rotante nel punto S che si trova anch'esso sull'asse rotante x a distanza ϵ dall'origine (e quindi dall'asse di rotazione) come indicato in Figura 1. Riassumendo, il punto S (che è il punto di sospensione) è fissato sulla piattaforma rotante, il corpo m è collegato al punto di sospensione S tramite una molla e si può muovere senza attrito sulla piattaforma rotante.

- Si scriva quali sono le forze che agiscono sulla massa m
- Si mostri che la posizione di equilibrio della massa m sotto l'azione di tali forze si troverà necessariamente sull'asse rotante Ox
- Si calcoli la posizione di equilibrio x_{eq} della massa m sull'asse rotante Ox
- Sappiamo che l'oscillatore armonico ha un suo periodo naturale di oscillazione T_n (e quindi una sua frequenza naturale $\omega_n = 2\pi/T_n$). Si mostri come la posizione di equilibrio cambia a seconda che la velocità di rotazione ω_r sia minore, uguale o maggiore di ω_n. In particolare, si considerino i due casi opposti $\omega_r \ll \omega_n$ e $\omega_r \gg \omega_n$
- Si riporti graficamente l'andamento qualitativo di x_{eq} in funzione di ω_r/ω_n (Figura 2)

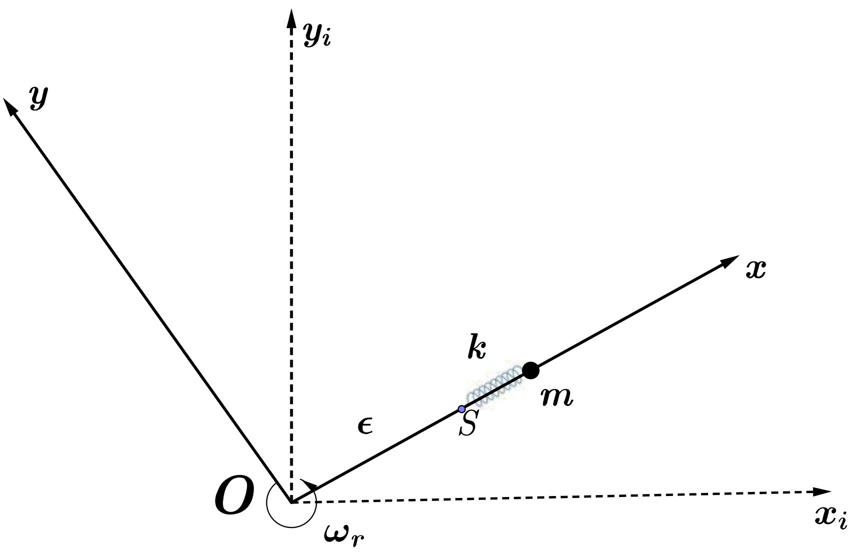

Figure 1: Nel piano orizzontale sono mostrati il sistema di assi non rotanti Ox_iy_i e la piattaforma rotante Oxy sulla quale si può muovere senza attrito il corpo puntiforme di massa m collegato con una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k al punto di sospensione S fissato sul piano rotante

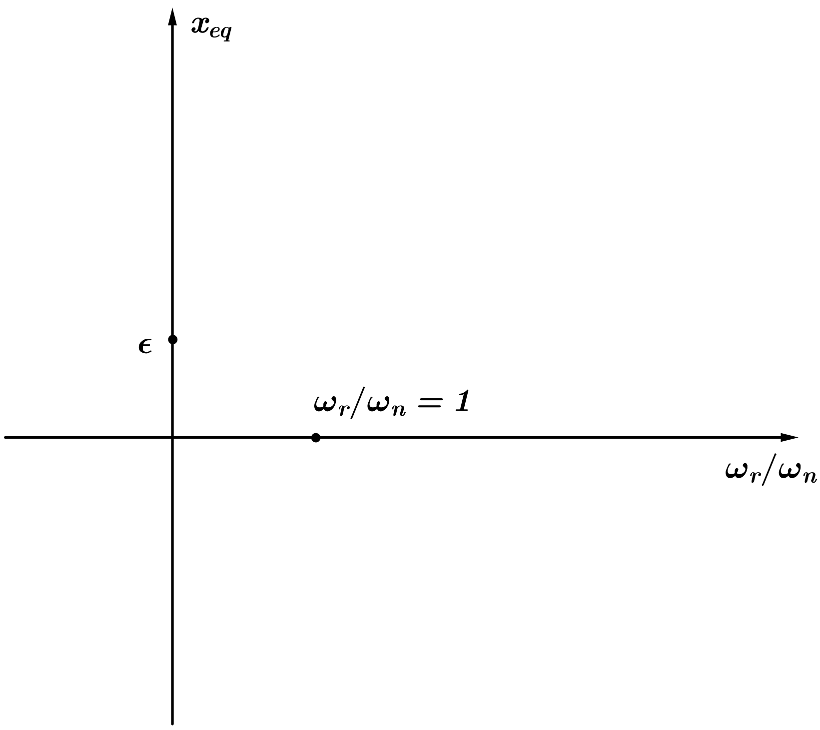

Figure 2: Sono impostati ascissa e ordinata per riportare qualitativamente l'andamento della posizione di equilibrio in funzione del rapporto ω_r/ω_n

2 Soluzione

Le forze che agiscono sulla massa m sono: la forza elastica di richiamo della molla, diretta lungo l'asse x verso il punto di sospensione S, proporzionale alla costante elastica k e alla distanza della massa m dal punto di sospensione; la forza centrifuga –in quanto la massa si trova in un sistema di riferimento rotante con velocità angolare ω_r– diretta lungo l'asse x verso l'esterno, proporzionale alla massa del corpo, al quadrato della velocità angolare di rotazione ω_r e alla distanza x dall'asse di rotazione.

Se le forze in gioco agiscono entrambe lungo l'asse delle x anche la posizione di equilibrio giacerà su questo asse, e precisamente nella posizione dove la loro somma totale è nulla, cioè dove esse soddisfano alla condizione di essere uguali ed opposte. Se indico con x_{eq} la coordinata x della massa m all'equilibrio, essa deve soddisfare l'equazione:

$$m\omega_r^2 x_{eq} = k(x_{eq} - \epsilon) \tag{1}$$

avendo tenuto conto che l'allungamento della molla si conta dal punto di sospensione. Dalla (1) ottengo:

$$x_{eq} = -\frac{\frac{k}{m}}{\omega_r^2 - \frac{k}{m}}\epsilon \tag{2}$$

Abbiamo studiato che un oscillatore armonico di massa m e costante elastica k ha una frequenza naturale di oscillazione

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3}$$

e quindi possiamo riscrivere la (2) come

$$x_{eq} = -\frac{\omega_n^2}{\omega_r^2 - \omega_n^2}\epsilon \tag{4}$$

e —dividendo sia il numeratore che il denominatore per ω_n^2— come

$$x_{eq} = -\frac{1}{\frac{\omega_r^2}{\omega_n^2} - 1}\epsilon \tag{5}$$

da cui vediamo bene che la posizione di equilibrio dipende dal rapporto tra la frequenza di rotazione della piattaforma e quella naturale dell'oscillatore (precisamente, da questo rapporto al quadrato).

Nella (5) la cosa più semplice da notare è che se $\omega_r/\omega_n = 1$, la posizione di equilibrio va all'infinito. Questa condizione in cui le due frequenze sono uguali si chiama *risonanza*. Più precisamente, se $\omega_r/\omega_n \longrightarrow 1$ dal lato destro $x_{eq} \longrightarrow -\infty$, mentre se se $\omega_r/\omega_n \longrightarrow 1$ dal lato sinistro $x_{eq} \longrightarrow +\infty$.

Dalla (5) è anche facile capire cosa succede nei due casi estremi $\omega_r^2/\omega_n^2 \ll 1$ (la piattaforma gira con una velocità angolare piccolissima rispetto a quella di oscillazione dell'oscillatore) e invece $\omega_r^2/\omega_n^2 \gg 1$ (la piattaforma gira a velocità angolare altissima rispetto a quella dell'oscillatore). Nel primo caso il denominatore della (5) tende a -1 e quindi $x_{eq} \longrightarrow +\epsilon$: se la rotazione è lentissima essa è di fatto trascurabile e la massa è in equilibrio esattamente nel punto di sospensione della molla, come ci aspettiamo che sia (si ricordi che nel testo è specificato che la lunghezza a riposo della molla è nulla). Quindi nel plot di Figura 1 nell'origine ($\omega_r/\omega_n = 0$) abbiamo $x_{eq} = 0$.

Assai meno intuitivo è il caso in cui la piattaforma gira a velocità angolare molto più alta di quella naturale dell'oscillatore, anche se matematicamente la cosa è semplice: dalla (5) abbiamo

$$\frac{\omega_r^2}{\omega_n^2} - 1 \longrightarrow \frac{\omega_r^2}{\omega_n^2} \Longrightarrow x_{eq} \longrightarrow -\frac{\omega_n^2}{\omega_r^2}\epsilon \tag{6}$$

dalla quale vediamo due cose notevoli: i) poiché $\omega_r^2/\omega_n^2 > 0$, la posizione di equilibrio è sempre dal lato opposto del punto di sospensione (rispetto all'origine, per la quale passa l'asse di rotazione); ii) siamo nella condizione $\omega_r^2/\omega_n^2 \gg 1$, cioè $\omega_n^2/\omega_r^2 \ll 1$, e quindi vale, in modulo, $|x_{eq}| \ll |\epsilon|$. Questo vuol dire che in rotazione molto veloce la massa di autocentra sull'asse di rotazione posizionandosi vicinissimo ad esso, molto più vicina del valore ϵ in cui si trova per costruzione. La piccolissima distanza dall'asse di rotazione riduce la forza centrifuga e la molla si allunga di $\epsilon + \frac{\omega_n^2}{\omega_r^2}\epsilon \simeq \epsilon$ per bilanciare con la sua forza di richiamo questa forza centrifuga e garantire l'equilibrio.

Dalla (5) e con le considerazioni fatte il grafico qualitativo della posizione dei equilibrio in funzione del rapporto ω_r/ω_n da riportare in Figura 2 è ovvio .

Resta una curiosità: come fa la massa che è collegata ad una molla il cui punto di sospensione si trova dal lato delle x positive a raggiungere la posizione di equilibrio (6) che si trova invece dal lato delle x negative?