

Sommario

1. Fisica, metodo scientifico, grandezze fisiche, dimensioni, unità di misura	3
Fisica e metodo scientifico.....	3
Grandezze fisiche, dimensioni e unità di misura.....	3
Massa (kg)≡Forza applicata su un corpo/accelerazione acquistata dal corpo	4
Tempo (s).....	4
Lunghezza (m)	4
Dimensioni di varie grandezze fisiche.....	4
Potenze di 10.....	5
Esercizi sulle dimensioni delle grandezze fisiche	6
2. Sistemi di riferimento.....	7
Sistema di coordinate cartesiane ortogonali e versori degli assi coordinati	7
Prodotto scalare e prodotto vettore.....	9
Coordinate polari piane.....	10
Coordinate polari sferiche	11
Costruzione di un sistema di riferimento inerziale	13
3. Leggi fondamentali della dinamica newtoniana.....	14
4. La legge di Newton della gravitazione universale.....	15
Caduta dei gravi (o lancio del proiettile) in approssimazione di Terra piatta e non rotante.....	18
Moto del pendolo	21
5. Lavoro ed energia	24
Energia potenziale.....	25
Conservazione dell'energia.....	26
Calcolo dell'energia potenziale di un corpo nel campo gravitazionale della Terra	26
L'oscillatore armonico	29
6. Equazioni del moto in un riferimento accelerato.....	33
Passeggeri sull'autobus.....	34
Gravità locale, ascensore di Einstein e astronave	35
7. Equazioni del moto in un riferimento rotante.....	37
Deviazione di un proiettile.....	38
Deviazione dei gravi verso Est	41
Coriolis ed effetto dei venti sul volo degli aerei.....	42
Variazione della accelerazione locale di gravità con la latitudine.....	42
Deflessione del filo a piombo verso Sud	43

<i>Il pendolo di Foucault</i>	<i>44</i>
<i>Moto di satelliti artificiali e pianeti</i>	<i>45</i>
<i>8. Dinamica del corpo rigido</i>	<i>55</i>
<i>Gradi di libertà.....</i>	<i>55</i>
<i>Angoli di Eulero e rotazioni nel piano.....</i>	<i>55</i>
<i>Energia cinetica di rotazione, momento angolare e momento di inerzia di un corpo rigido.....</i>	<i>58</i>
<i>Equazioni di Eulero e precessione libera della Terra</i>	<i>65</i>

1. Fisica, metodo scientifico, grandezze fisiche, dimensioni, unità di misura

Fisica e metodo scientifico

Moto dei corpi e interazioni tra le masse (Fisica della gravitazione); Calore (Termodinamica); Suoni (Acustica); Fenomeni luminosi (Ottica); Fenomeni elettrici e magnetici (Elettromagnetismo); Struttura dell'atomo (Fisica atomica); Struttura del nucleo (Fisica nucleare).

Interazioni tra le masse

Interazioni tra le cariche elettriche

Interazioni nucleari

Relazione tra fisica e le altre scienze:

Fisica & Astronomia: l'astronomia è più antica della fisica (lo studio del moto delle stelle e dei pianeti è stato l'inizio della fisica: le stelle sono fatte dello stesso tipo di atomi che sono presenti sulla Terra; c'è uno stretto legame tra le reazioni nucleari e "perché brillano le stelle")

Fisica & Chimica: legami strettissimi (termodinamica, elettromagnetismo, meccanica quantistica), atomi, molecole, ioni ...

Fisica & Geologia: forma della Terra, meteorologia, magnetismo terrestre, terremoti e loro velocità di propagazione..

La fisica è una scienza che si basa sugli esperimenti attraverso il metodo scientifico (osservazione, ragionamento, esperimento): osservazioni generali → formulazione di ipotesi → analisi matematica delle ipotesi e deduzioni da esse → verifica sperimentale delle deduzioni fatte → eventualmente, modifica delle ipotesi fatte e inizio del ciclo daccapo.

Il metodo scientifico porta alla formulazione di leggi fisiche generali che descrivono quantitativamente i rispettivi fenomeni. Le leggi fisiche sono sempre soggette a verifica sperimentale e possono sempre essere contraddette da esperimenti.

Grandezze fisiche, dimensioni e unità di misura

Grandezze fisiche: si definiscono operativamente, cioè attraverso la serie di operazioni che è necessario fare per misurarle.

Ogni grandezza fisica è caratterizzata dalle sue dimensioni e da un numero che ne dà il rapporto rispetto ad una grandezza omogenea (cioè avente le stesse dimensioni) che sia stata scelta come unità di misura.

Le grandezze fisiche si distinguono in primarie e derivate: es. lunghezza e tempo sono grandezze fisiche primarie (misurate in m e s rispettivamente) mentre la velocità è una grandezza fisica derivata da esse (essendo la velocità definita come spazio/tempo e quindi misurata in ms^{-1}).

Per la gravitazione le 3 grandezze primitive che bastano sono: lunghezza, massa, tempo, es. MKS (metro, kilogrammo, secondo)

Massa (kg) ≡ Forza applicata su un corpo/accelerazione acquistata dal corpo

kg ≡ Il chilogrammo è la massa di un particolare cilindro di altezza e diametro pari a 0,039 m di una lega di platino-iridio depositato presso l'Ufficio internazionale dei pesi e delle misure a Sèvres, in Francia.

Tempo (s)

s ≡ 1/86 400 del giorno solare medio

1954: 1/31 556 925,9747 dell'anno tropico (all'epoca 1 gennaio 1900 ore 12 del tempo delle effemeridi)

1967: Il secondo viene definita come la durata di 9 192 631 770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di ^{133}Cs (definizione di tempo atomico internazionale)

Lunghezza (m)

1675: primo tentativo di definire il metro (lunghezza di un pendolo che "batte il secondo" – infatti il semiperiodo di un pendolo di lunghezza 1 m è 1.003 s)

1791: l' Accademia francese delle scienze m ≡ 1/10 000 000 della distanza tra il Polo e l'equatore sulla superficie terrestre lungo il meridiano che passa da Parigi

1889: il BIPM ridefinisce il metro come la distanza tra due linee incise su una barra campione di platino-iridio conservata a Sèvres, Parigi. In Italia il metro campione si trova presso l'Istituto Nazionale di Ricerca Metrologica (ex "Galileo Ferraris") di Torino

1960: si definisce il metro come la lunghezza pari a 1 650 763.73 volte la lunghezza d'onda nel vuoto della radiazione emessa da un isotopo del Krypton ^{86}Kr quando viene eccitato da una scarica elettrica (è un campione immutabile nel tempo e si riproduce facilmente in laboratorio)

1983: si definisce il metro come la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo pari a 1/299 792 458 di secondo (i.e. la velocità della luce nel vuoto è di 299 792 458 metri al secondo). Poiché la velocità della luce nel vuoto è la stessa ovunque, questa definizione è più universale della definizione basata sulla misurazione della circonferenza della Terra o della lunghezza di una specifica barra di metallo. Il metro campione si può riprodurre in laboratorio. Si noti che la velocità della luce è misurata con

Dimensioni di varie grandezze fisiche

$$[X] = [M]^{\alpha} [L]^{\beta} [T]^{\gamma}$$

Velocità

$$[V] = [L] [T]^{-1}$$

Accelerazione

$$[A] = [V] / [T] = [L] [T]^{-2}$$

Forza

$$[F] = [M] [A] = [M] [L] [T]^{-2}$$

Lavoro (energia)

$$[\mathcal{L}] = [F] [L] = [M] [L]^2 [T]^{-2}$$

Potenza

$$[W] = [\mathcal{L}] / [T] = [M] [L] [T]^{-3}$$

Quantità di moto (lineare)

$$[P] = [M] [V] = [M] [L] [T]^{-1}$$

Momento della quantità di moto (o momento angolare)	$[J]=[P]x[L]=[M]x[L]^2x[T]^{-1}$
Momento di una forza	$[M]=[F]x[L]=[M]x[L]^2x[T]^{-2}$
Pressione	$[P]=[F]/[L]^2=[M]x[L]^{-1}x[T]^{-2}$
Velocità angolare	$[\omega]=[angolo]/[T]=[T]^{-1}$

Angoli: sono adimensionali. Per convenzione un angolo è definito positivo quando il suo verso (a partire dall'asse dal quale viene misurato) è antiorario. Esprimiamo gli angoli sempre in radianti, che si convertono in gradi, minuti d'arco e secondi come segue d'arco (ricordando che 1 grado equivale a 60 minuti d'arco e 1 minuti d'arco equivale a 60 secondi d'arco – come per le ore, minuti e secondi):

$$2\pi \text{ radianti} = 360 \text{ gradi}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \text{ gradi} = 57.296^\circ = 57.296 \cdot 60' = 3.44 \cdot 10^3' = 57.296 \cdot 3600'' = 2.06 \cdot 10^5''$$

Per convenzione i simboli delle unità di misura delle grandezze fisiche si iniziano con la lettera minuscola, salvo che non siano simboli derivati dal nome di una persona (es: kg, m, s iniziano con la minuscola; V (per Volt), W (per Watt), J (per Joule), Hz (per Hertz), Pa (per Pascal, unità di pressione), K (per grado Kelvin) etc... iniziano con la lettera maiuscola perché Alessandro Volta, James watt, James Prescott Joule, Heinrich Rudolf Hertz, Blaise Pascal, Lord Kelvin –nato come William Thomson, quando fu nominato lord scelse il nome del fiume che scorreva accanto all'Università a Glasgow dove insegnava..).

Potenze di 10

Esprimiamo tutti i valori numerici come un numero dell'ordine di 1 che moltiplica una potenza di 10. Questo semplifica e rende rapidi tutti i calcoli numerici. Basta ricordare che:

$$10^\alpha \times 10^\beta = 10^{\alpha+\beta}$$

$$\frac{10^\alpha}{10^\beta} = 10^\alpha \times 10^{-\beta} = 10^{\alpha-\beta}$$

$$(10^\alpha)^\beta = 10^{\alpha \cdot \beta}$$

Prefissi del Sistema Internazionale

10^n	Prefisso	Simbolo	Nome	Equivalente decimale
10^{24}	yotta	Y	Quadrilione	1 000 000 000 000 000 000 000 000
10^{21}	zetta	Z	Triliardo	1 000 000 000 000 000 000 000
10^{18}	exa	E	Trilione	1 000 000 000 000 000 000
10^{15}	peta	P	Biliardo	1 000 000 000 000 000
10^{12}	tera	T	Bilione	1 000 000 000 000
10^9	giga	G	Miliardo	1 000 000 000
10^6	mega	M	Milione	1 000 000
10^3	kilo o chilo	k	Mille	1 000
10^2	etto	h	Cento	100
10	deca	da	Dieci	10
10^{-1}	deci	d	Decimo	0,1
10^{-2}	centi	c	Centesimo	0,01
10^{-3}	milli	m	Millesimo	0,001
10^{-6}	micro	μ	Milionesimo	0,000 001
10^{-9}	nano	n	Miliardesimo	0,000 000 001
10^{-12}	pico	p	Bilionesimo	0,000 000 000 001
10^{-15}	femto	f	Biliardesimo	0,000 000 000 000 001
10^{-18}	atto	a	Trilionesimo	0,000 000 000 000 000 001
10^{-21}	zepto	z	Triliardesimo	0,000 000 000 000 000 000 001
10^{-24}	yocto	y	Quadrilionesimo	0,000 000 000 000 000 000 000 001

Esercizi sulle dimensioni delle grandezze fisiche

Esercizio 1: La velocità del suono nell'aria (a 0 °C) è di circa 330 m/s. A quanto corrisponde in km/h?

$$v_{\text{suonoinaria}} = 330 \frac{m}{s} = 330 \cdot (10^{-3} km)(3600^{-1} h^{-1}) = 330 \cdot (10^{-3} \cdot 3.6 \cdot 10^3) km/h = 330 \cdot 3.6 km/h \\ = 1.19 \cdot 10^3 = 1190 km/h$$

Esercizio 2: Un corpo si muove lungo l'asse x e la sua distanza dall'origine obbedisce alla seguente legge in funzione del tempo:

$$x = at^2 + bt + c$$

dove a, b, c sono quantità costanti durante il moto. Quali sono le dimensioni di queste costanti?

$$[x] = [m] \quad , \quad [t] = [s]$$

quindi:

$$[a] = [x]/[t^2] = [m] \cdot [s^{-2}] \quad \text{e quindi la costante } a \text{ è una accelerazione}$$

$$[b] = [x]/[t] = [m] \cdot [s^{-1}] \quad [c] = [x] = [m] \quad \text{e quindi la costante } b \text{ è una velocità}$$

$$[c] = [x] = [m] \quad \text{e quindi la costante } c \text{ è una distanza}$$

La funzione data rappresenta un moto uniformemente accelerato lungo la direzione x (con accelerazione costante a), velocità iniziale b ($\dot{x}(t) = 2at + b$, $\dot{x}(0) = b$) e posizione iniziale c ($x(0) = c$)

2. Sistemi di riferimento

Per descrivere i fenomeni fisici in modo quantitativo occorre un sistema di riferimento, cioè un sistema di coordinate rispetto al quale esprimere istante per istante lo stato del sistema fisico che viene investigato, più un osservatore munito di un orologio per la misura del tempo. Un orologio è definito come un "oggetto" (in senso lato) in grado di eseguire una qualunque operazione ripetitivamente ad intervalli regolari (es. la Terra che gira attorno al suo asse, un orologio a pendolo che esegue continue oscillazioni tutte con lo stesso periodo ...). Tratteremo di problemi nello spazio fisico a 3 dimensioni \mathbb{R}^3 .

Un sistema di riferimento si dice *inerziale* se in esso vale la legge di inerzia, cioè: un corpo sul quale non agisca (da un certo istante t_0) alcuna forza, da quell'istante non cambierà più di velocità –se all'istante t_0 era fermo resterà fermo; se era in moto con velocità $\vec{v}(t_0)$ non nulla, continuerà a muoversi indefinitamente con la stessa velocità $\vec{v}(t_0)$ (la stessa in modulo, direzione e verso). Ne segue che se un sistema di riferimento è inerziale, qualunque altro che si muova rispetto ad esso con una velocità costante (di qualunque modulo, direzione e verso –purché tutti costanti) sarà anch'esso inerziale.

Qualunque sia la velocità costante di un sistema di riferimento inerziale imponiamo che l'osservatore sia solidale con esso. Possiamo quindi sempre considerare un sistema di riferimento inerziale che abbia velocità nulla (fisso).

Per un sistema di riferimento possiamo usare vari sistemi di coordinate, che sceglieremo opportunamente a seconda del tipo di problema studiato.

Sistema di coordinate cartesiane ortogonali e versori degli assi coordinati

Per descrivere la posizione di un punto in \mathbb{R}^3 occorrono 3 numeri (coordinate). Scegliamo 3 assi cartesiani (*Cartesio, Discorso sul metodo, 1637*) con origine comune e con la stessa unità di misura. Per semplicità prendiamo gli assi tra loro ortogonali; potrebbero anche essere non ortogonali, e cioè tali da formare l'uno rispetto all'altro un angolo diverso da $\pi/2$, e andrebbero bene ugualmente per descrivere la posizione di un punto nello spazio, solo che le coordinate risulterebbero meno eleganti ed inutilmente più complicate. Chiamiamo la terna così costruita $\mathcal{O}xyz$ che per convenzione prendiamo sinistrorsa (cioè con i 3 assi orientati, nell'ordine, come le 3 dita pollice, medio ed indice della nostra mano sinistra (Figura 2.1).

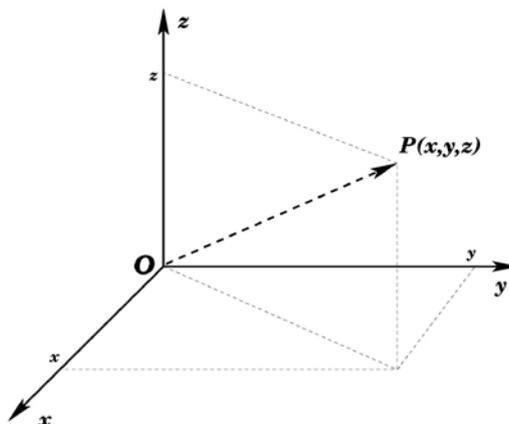


Figura 2.1: Sistema di riferimento inerziale (definito nel testo) - Terna sinistrorsa di coordinate cartesiane ortogonali.

Per ogni coordinata si definisce il corrispondente versore coordinato: vettore di lunghezza 1 (nelle unità date) che punta nella direzione in cui quella coordinata aumenta (diventa più positiva). Questo è facile per le coordinate che dimensionalmente sono delle lunghezze (Figura 2.2).

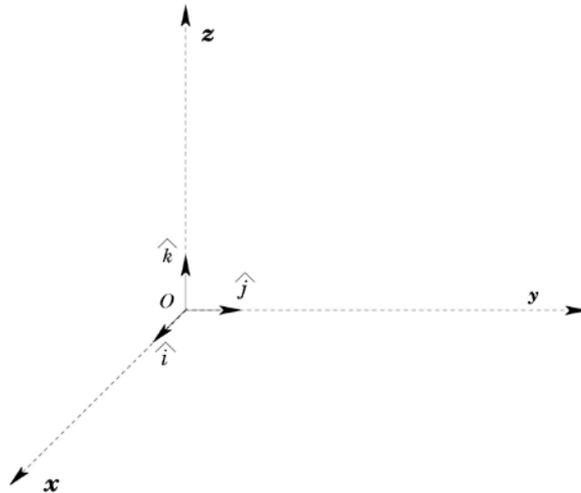


Figura 2.2: I versori coordinati corrispondenti alle coordinate x, y, z sono vettori di lunghezza 1 che partono dall'origine e puntano nella direzione in cui quella coordinata cresce (diventa più positiva). Li indichiamo come versori $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ (il cappuccio in luogo della freccia indica per convenzione che il vettore ha lunghezza unitaria). Essendo il riferimento inerziale i 3 versori sono fissi (la loro derivata rispetto al tempo è nulla), cioè vale: $\dot{\hat{i}} = \dot{\hat{j}} = \dot{\hat{k}} = \vec{0}$

Il punto $P(x, y, z)$ è individuato univocamente nello spazio dalle sue 3 coordinate. Scriviamo

$$P \equiv P(x, y, z) \quad (2.1)$$

ad indicare che il punto P è identificato dalle sue 3 coordinate (x, y, z) ; oppure usiamo il vettore

$$\overrightarrow{OP} = (x, y, z) \quad (2.2)$$

che ha la base nell'origine degli assi coordinati e la testa nel punto P , individuato dalle sue coordinate (x, y, z) . Questo vettore \overrightarrow{OP} è anche la somma (secondo la regola del parallelogrammo) dei tre vettori (lungo i rispettivi assi) $x\hat{i}$, $y\hat{j}$, $z\hat{k}$ e quindi possiamo scriverlo anche come:

$$\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (2.3)$$

dove:

$$\hat{i} = (1, 0, 0), \quad \hat{j} = (0, 1, 0), \quad \hat{k} = (0, 0, 1) \quad (2.4)$$

Per la lunghezza del vettore \overrightarrow{OP} vale:

$$OP = \sqrt{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.5)$$

che poi non è altro che il teorema di Pitagora (Figura 2.1).

Prodotto scalare e prodotto vettore

Il simbolo *punto* tra due vettori si usa per indicare il loro prodotto scalare, che è un numero (non un vettore) definito come la somma del prodotto delle rispettive coordinate. Cioè, in generale, dati i vettori $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ il loro prodotto scalare è il numero:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (2.6)$$

definito anche come $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \vartheta$ (essendo ϑ l'angolo compreso tra i due vettori). È chiaro dalla definizione che il prodotto scalare di due vettori non dipende dall'ordine in cui si scrivono i vettori nell'eseguirlo. Geometricamente il prodotto scalare è legato (Figura 2.3) alla proiezione del vettore \vec{a} lungo la direzione del versore \hat{b} (o anche, viceversa, alla proiezione del vettore \vec{b} lungo la direzione del versore \hat{a})

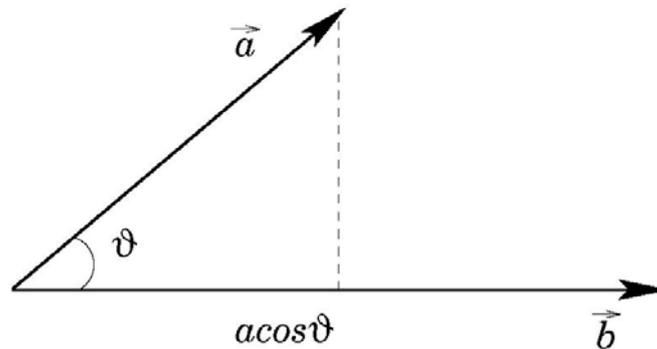


Figura 2.3: Significato geometrico del prodotto scalare: $\vec{a} \cdot \hat{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}/b = a \cos \vartheta$. Il prodotto scalare è quindi nullo quando i 2 vettori sono tra loro ortogonali ($\vartheta = \pi/2$, $\cos(\pi/2) = 0$)

Si noti che i versori $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ sono tali che il prodotto vettore (eseguito nell'ordine ciclico) di 2 di essi consecutivi fornisce sempre il terzo versore (col segno giusto).

Ricordiamo che il prodotto vettore $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ è definito come il vettore perpendicolare al piano individuato dai due vettori \vec{a}, \vec{b} secondo la convenzione che un osservatore orientato come \vec{c} vedrebbe il vettore \vec{a} sovrapporsi al vettore \vec{b} dopo una rotazione in senso positivo (\equiv antiorario) di un angolo minore di π . Dunque, se scambiamo l'ordine in cui eseguiamo il prodotto vettore, il risultato cambierà di segno, cioè, se $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ sarà $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$.

Le singole componenti del prodotto vettore sono:

$$\vec{c} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \quad (2.7)$$

(si noti la ciclicità degli indici). Il modulo del prodotto vettore è $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \vartheta$ e il suo significato geometrico è mostrato in Figura 2.4.

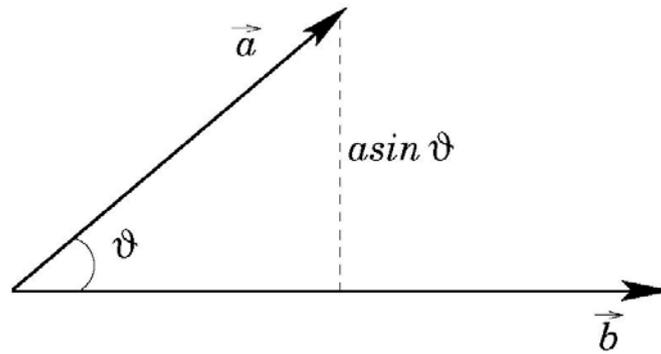


Figura 2.4: Significato geometrico del prodotto vettore: $|\vec{a} \times \vec{b}| = [\vec{a} \times \vec{b}]/b = a \sin \vartheta$. Il prodotto vettore è quindi nullo quando i due vettori sono tra loro paralleli. La direzione del vettore prodotto dei due è perpendicolare al piano da essi individuato (in questo caso il piano del foglio) e il verso è, per come sono disposti i due vettori in questa figura, entrante nel piano stesso (non uscente).

Coordinate polari piane

È conveniente usare coordinate polari quando si trattano problemi che hanno un polo (e.g. in presenza di una forza centrale o di moto attorno ad un punto fisso). Cominciamo per semplicità dalle coordinate polari piane.

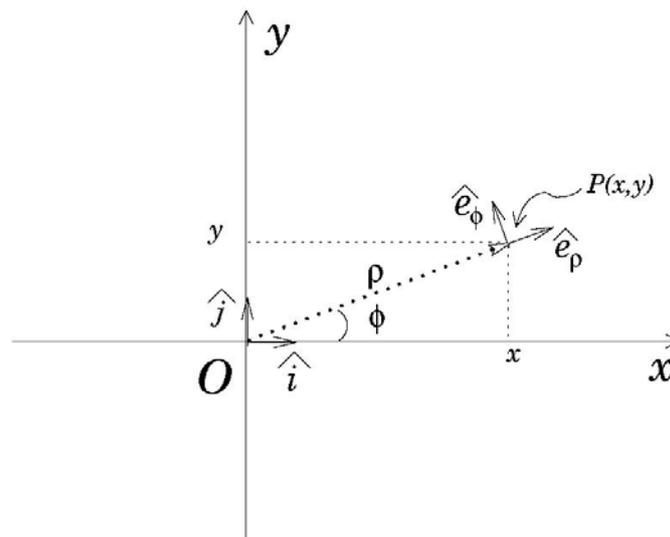


Figura 2.5: Coordinate polari piane e versori relativi

Le relazioni che permettono di passare da un tipo di coordinate all'altro sono

$$x = \rho \cos \varphi \tag{2.8}$$

$$y = \rho \sin \varphi \tag{2.9}$$

$$(0 < \rho \leq \infty \text{ e } 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.10}$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} \text{ se } y > 0 \tag{2.11}$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} + \pi \text{ se } y > 0 \quad (\varphi = 0 \text{ se } y = 0) \quad (2.12)$$

I versori delle coordinate ϱ, φ sono (si noti che quando la coordinate è un angolo il versore si definisce come il vettore di lunghezza 1 che punta nella direzione in cui l'angolo corrispondente cresce: il versore è quindi perpendicolare al raggio – per convenzione gli angoli sono definiti positivi quando sono misurati in senso antiorario):

$$\hat{e}_\varrho = (\cos\varphi, \sin\varphi), \quad \hat{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi) \quad (2.13)$$

che possiamo scrivere anche come:

$$\hat{e}_\varrho = \cos\varphi \hat{i} + \sin\varphi \hat{j}, \quad \hat{e}_\varphi = -\sin\varphi \hat{i} + \cos\varphi \hat{j} \quad (2.14)$$

e per essi valgono le relazioni:

$$\hat{e}_\varrho \cdot \hat{e}_\varphi = -\sin\varphi \cos\varphi + \sin\varphi \cos\varphi = 0, \quad \hat{e}_\varrho \cdot \hat{e}_\varrho = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \quad (2.15)$$

$$\hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_\varphi = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \quad (2.16)$$

come ci aspettiamo che sia trattandosi di versori ortogonali.

L'elemento di superficie nelle rispettive coordinate è:

$$\Delta\sigma = \Delta x \Delta y, \quad \Delta\sigma = \varrho \Delta\varphi \Delta\varrho \quad (2.17)$$

Coordinate polari sferiche

Se dobbiamo trattare con coordinate polari un problema in \mathbb{R}^3 , la terza coordinata z essendo definita in modo che il suo asse coordinato sia perpendicolare al piano (x, y) del problema precedente in modo da formare con esso una terna ortogonale sinistrorsa, usiamo coordinate polari sferiche (Figure 2.6 e 2.7)

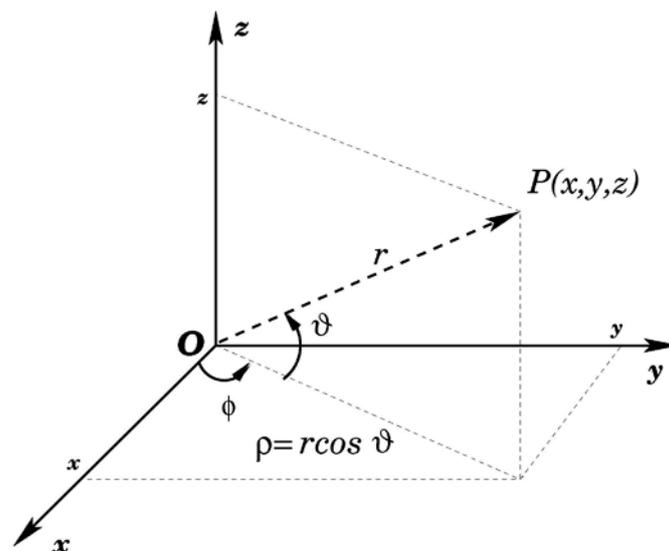


Figura 2.6: Coordinate polari sferiche

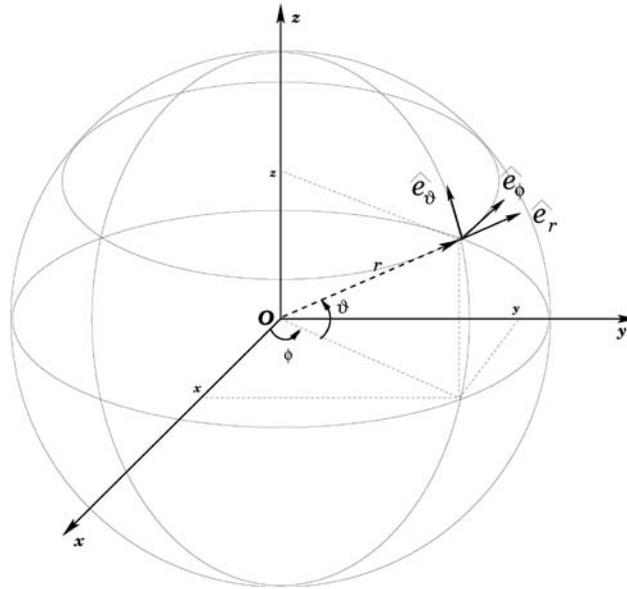


Figura 2.7: Coordinate polari sferiche come le useremmo per individuare un punto sulla superficie della Terra. Il piano individuato da \hat{e}_φ , \hat{e}_ϑ è il piano tangente alla superficie della sfera. Nel caso della Terra è il piano dell'orizzonte dell'osservatore (definito di seguito in Figura 2.9).

È evidente in particolare dalla Figura 2.7 che $r = costante$ identifica la superficie della sfera, $\varphi = costante$ identifica il piano del cerchio meridiano (il cerchio massimo che passa dall'osservatore e dai poli) e $\vartheta = costante$ identifica il piano (ad altezza $z = r \sin\vartheta$ sul piano x, y) che è il piano del cerchio parallelo dell'osservatore, l'osservatore essendo il punto in \mathbb{R}^3 che stiamo considerando.

Le relazioni per il passaggio di coordinate (da polari sferiche a cartesiane) sono:

$$x = r \cos\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \cos\vartheta \sin\varphi, \quad z = r \sin\vartheta \quad (2.18)$$

$$(0 < r \leq \infty \text{ e } 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \text{ per } y > 0 \text{ e } 0 \geq \vartheta \geq -\frac{\pi}{2} \text{ per } y < 0) \quad (2.19)$$

e viceversa:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.20)$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} \text{ se } y > 0 \quad (2.21)$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} + \pi \text{ se } y < 0, \quad \varphi = 0 \text{ se } y = 0 \quad (2.22)$$

$$\vartheta = \arctg \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (z \text{ con il suo segno}) \quad (2.23)$$

I vettori corrispondenti alle coordinate polari sono:

$$\hat{e}_r = (\cos\vartheta \cos\varphi, \cos\vartheta \sin\varphi, \sin\vartheta) \quad \hat{e}_\vartheta = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \quad \hat{e}_\varphi = (-\sin\vartheta \cos\varphi, -\sin\vartheta \sin\varphi, \cos\vartheta) \quad (2.24)$$

e si può verificare che hanno modulo 1 e che sono tra loro ortogonali (cioè il prodotto scalare tra 2 diversi vettori deve essere nullo).

L'elemento di volume nelle diverse coordinate è, rispettivamente:

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \quad \Delta V = (r \cos \vartheta \Delta \varphi)(\Delta r)(r \Delta \vartheta) = r^2 \cos \vartheta \Delta r \Delta \varphi \Delta \vartheta \quad (2.25)$$

Si noti che, come nel caso dei versori degli assi cartesiani il prodotto vettore in ordine ciclico fornisce sempre il terzo versore (col segno giusto)

Costruzione di un sistema di riferimento inerziale

Assumiamo, in prima approssimazione, che un laboratorio sulla superficie della Terra il cui asse z sia definito operativamente dalla direzione del filo a piombo e il cui piano x, y sia definito come perpendicolare ad esso, sia un riferimento inerziale. Il piano x, y è definito anche come il piano dell'orizzonte dell'osservatore (o piano orizzontale) cioè il piano tangente alla superficie della Terra in quel punto. L'asse z punta verso lo Zenit dell'osservatore. Sul piano dell'orizzonte scegliamo gli assi secondo i punti cardinali (Figure 2.8 e 2.9).

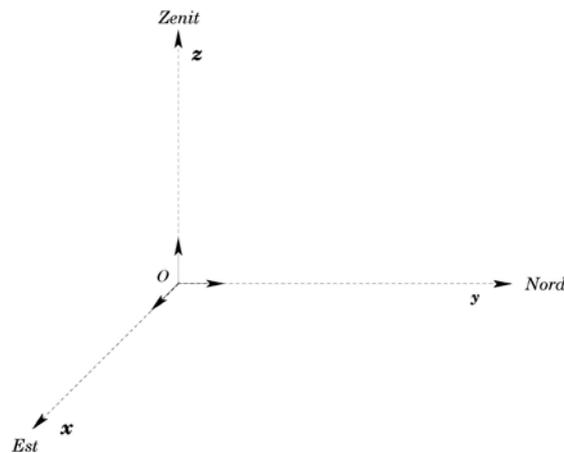


Figura 2.8: Il sistema di riferimento (assunto come inerziale) di un osservatore sulla superficie della Terra

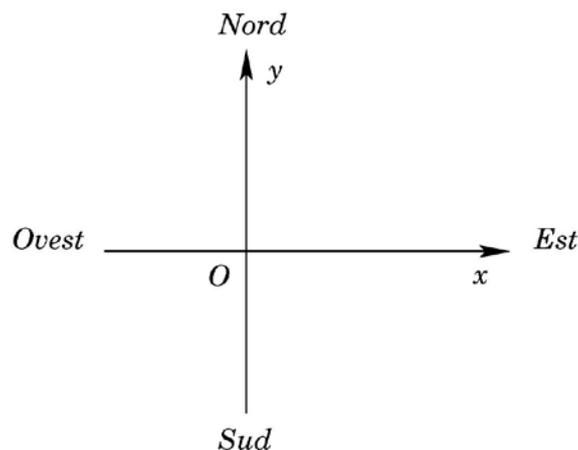


Figura 2.9: Il piano dell'orizzonte (piano orizzontale) di un osservatore sulla superficie della Terra (definito come perpendicolare alla direzione del filo a piombo) con gli assi orientati secondo i locali punti cardinali.

Che il sistema di riferimento di cui sopra sia un riferimento inerziale è senz'altro una approssimazione perché :

- la terra ruota attorno al proprio asse (col periodo di un giorno) e quindi sulla sua superficie non vale la legge di inerzia
- la Terra ruota intorno al sole (col periodo di 1 anno). Anche assumendo che la sua orbita sia circolare e non ellittica come invece è ($e_{\oplus} \simeq 0.017$), e quindi che la sua velocità lineare lungo l'orbita sia costante in modulo ($v_{\oplus} \simeq 30$ km/s), ciononostante la direzione del vettore velocità varia nel tempo mentre la Terra orbita attorno al Sole, e quindi non può costituire un sistema di riferimento inerziale
- il Sole e l'intero sistema solare, Terra compresa, orbitano attorno al centro della nostra galassia (la Via Lattea) e anche se il periodo orbitale è molto lungo (circa 200 milioni di anni) si tratta comunque di un moto accelerato (analogamente a quanto detto sopra per il moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole)

Infine, se consideriamo che la Terra non è un punto massa ma un corpo esteso in rotazione (in prima approssimazione un corpo rigido) si ha che l'asse di rotazione della Terra non è fisso ma:

- precede attorno all'asse di simmetria della Terra con un periodo di circa 400 giorni (moto dei poli)
- precede attorno all'asse perpendicolare al piano dell'orbita della Terra attorno al Sole con un periodo di 26000 anni (precessione lunisolare)

Con queste precauzioni, assumiamo comunque di avere a disposizione un sistema di riferimento inerziale (e.g. Figura 2.8).

3. Leggi fondamentali della dinamica newtoniana

La prima legge della dinamica (legge d'inerzia, definita all'inizio della Sez. 2) è quella che definisce un sistema di riferimento inerziale.

La seconda legge della dinamica (che vale in un riferimento inerziale così definito) stabilisce che sotto l'azione di una forza \vec{F} (qualunque tipo di forza) un corpo acquisisce una accelerazione \vec{a} proporzionale alla forza applicata con una costante di proporzionalità che rappresenta l'inerzia che esso oppone all'azione della forza. Scriviamo:

$$\vec{F} = m_i \vec{a} \quad (3.1)$$

dove m_i è la costante di proporzionalità sopra definita, che chiamiamo *massa inerziale* e spesso semplicemente *massa* (vedi di seguito) per cui la legge (3.1) viene solitamente scritta come:

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (3.2)$$

(in presenza di più forze esse si sommano vettorialmente). Poiché in dinamica newtoniana la massa di un corpo non varia con la sua velocità, possiamo scrivere la (3.2) come $\vec{F} = d(m\vec{v})/dt$ e anche:

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} \quad (3.3)$$

dove abbiamo introdotto la grandezza fisica *quantità di moto lineare del corpo*:

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad (3.4)$$

Quindi, secondo Newton, la forza *cambia* la velocità di un corpo (o la sua quantità di moto lineare), contrariamente a quanto credeva Aristotele, secondo il quale l'effetto di una forza è una velocità, non la variazione della velocità. In particolare quindi la (3.3) dice che se la forza applicata è nulla la quantità di moto lineare si conserva, cioè rimane costante durante il moto (si dice anche che è un integrale del moto).

Dalla (3.2) segue che un sistema di riferimento inerziale, avendo velocità costante, costituisce un sistema tale che la forza totale agente su di esso è nulla (altrimenti acquisterebbe una accelerazione, cosa che non è possibile perché si tratta di un riferimento inerziale) – si parla anche di *sistema isolato*. E se la forza totale è nulla, questo significa che per ogni forza presente nel sistema deve esserci (nello stesso sistema) anche una forza uguale ed opposta (uguale in modulo e direzione, opposta in verso) cosicché la forza totale risulta nulla, come deve essere. Questo fatto prende anche il nome di *principio di azione e reazione* oppure di *terza legge della dinamica*.

Newton scrive anche un'altra legge fondamentale della dinamica – anch'essa valida in un sistema di riferimento inerziale – che lega il *momento* \vec{N} di una forza, definito come:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.5)$$

dove \vec{F} è la forza che agisce sul corpo la cui posizione è individuata dal vettore \vec{r} , alla *quantità di moto angolare* (detta anche *momento angolare*) \vec{L} del corpo stesso:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (3.6)$$

La legge è:

$$\vec{N} = \dot{\vec{L}} \quad (3.7)$$

e ci dice che per cambiare il momento angolare di un corpo occorre che su di esso agisca una forza il cui momento sia diverso da zero. Confrontando la (3.3) con la (3.7) possiamo dire che la forza cambia la quantità di moto lineare di un corpo mentre il momento di una forza cambia la quantità di moto angolare (il momento angolare) di un corpo.

Si noti che il momento di una forza e la derivata rispetto al tempo del momento angolare – che ovviamente hanno le stesse dimensioni fisiche (visto che sono uguali per la (3.7)) – hanno le stesse dimensioni di una energia.

4. La legge di Newton della gravitazione universale

I corpi non soltanto si oppongono all'azione di una forza (tanto più quanto maggiore è la loro *inerzia*) ma in quanto dotati di massa *gravitazionale* sono essi stessi sorgente di una azione verso altri corpi, esercitando una forza (sempre attrattiva) che secondo la legge di Newton della gravitazione universale è:

$$\vec{F}_{grav} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (4.1)$$

dove \vec{r} è il vettore posizione relativa dei due corpi – indicati con l'apice 1, 2 mentre il pedice g ci ricorda che si tratta di massa come “sorgente” di una forza e non come inerzia che si oppone ad una forza. Quindi, secondo Newton due corpi dotati di massa si attraggono con una forza proporzionale al prodotto delle masse (che possiamo pensare come “cariche gravitazionali”), inversamente proporzionale al quadrato della distanza che li separa e diretta lungo la retta che li congiunge. La costante di proporzionalità (che si deve misurare sperimentalmente) si indica con G e vale:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1} \quad (4.2)$$

La legge della gravitazione si chiama universale (e così la costante G) perché vale indipendentemente dai corpi che interagiscono (e.g. governa la caduta dei gravi sulla superficie della Terra e il moto di pianeti e satelliti nel sistema solare).

Un corpo a distanza r dal centro della Terra (che assumiamo perfettamente sferica, omogenea e non rotante) viene attratto da essa con la forza gravitazionale:

$$\vec{F}_{\oplus} = -G \frac{M_{\oplus} m_g}{r^3} \vec{r} \quad (4.3)$$

dove il simbolo \oplus è il simbolo astronomico con cui si indica la Terra) e m_g è la massa gravitazionale del corpo che si trova a distanza r dal centro della Terra.

Si nota in particolare nella forma (4.3) che la forza gravitazionale è una forza centrale: se la Terra è il corpo sorgente la forza è ovunque diretta verso il suo centro; le linee di forza (definite come le linee tangenti in ogni punto al vettore della forza in quel punto) sono radiali e dirette verso il centro della Terra; su ogni sfera a distanza r dal centro della Terra la forza ha lo stesso valore (simmetria sferica); all'aumentare della distanza r la forza diminuisce di intensità come r^{-2} (se la distanza r raddoppia la forza diminuisce di 4 volte.)

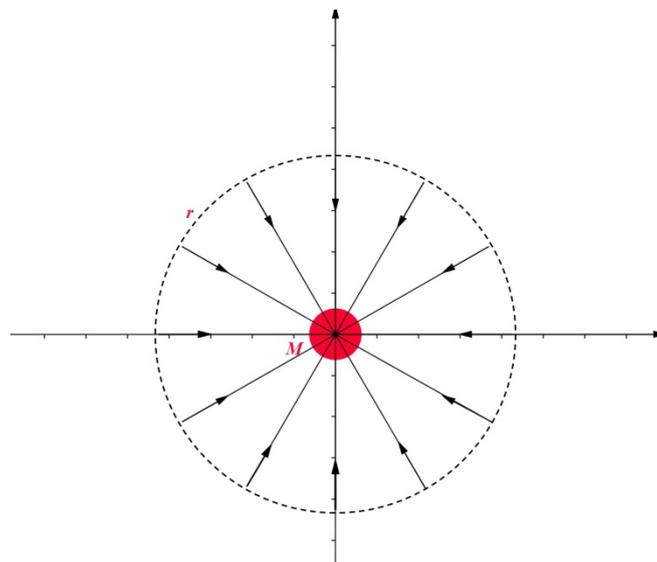


Figura 4.1: Per un corpo di massa M con densità a simmetria sferica le linee di forza (rappresentate da vettori tangenti alla forza, diretti nella stessa direzione e di modulo proporzionale all'intensità della forza) sono radiali e distribuite in modo uniforme e la forza ha la stessa intensità su ogni punto della sfera alla stessa distanza r . La forza gravitazionale

è una forza centrale a simmetria sferica. La diminuzione dell'intensità della forza con il quadrato della distanza r è espressa graficamente con le linee di forza dal fatto che all'aumentare di r diventano meno dense nello spazio.

Anche il corpo m_g attrae la Terra con una forza uguale ed opposta alla (4.4), ma siccome trattiamo di un corpo di massa trascurabile rispetto alla Terra possiamo trascurare la sua reazione sulla Terra e considerare quindi la Terra sia ferma nel riferimento inerziale, la cui origine fissiamo nel centro di massa della Terra.

Usando la seconda legge della dinamica (3.1) con la particolare forza gravitazionale (4.3), scriviamo l'equazione del moto del corpo piccolo:

$$m_i \vec{a} = -G \frac{M_{\oplus} m_g}{r^3} \vec{r} \quad (4.4)$$

dove ora m_i è la massa *inerziale* del corpo piccolo, in quanto esprime l'inerzia che oppone alla forza esercitata su di esso dalla Terra.

È chiaro che da un punto di vista concettuale m_i ed m_g sono completamente diverse tra loro, ma Newton dice subito di aver mostrato sperimentalmente che sono la stessa cosa, cioè che vale:

$$\frac{m_i}{m_g} = 1 \quad (4.5)$$

da cui segue che gli indici i, g si possono eliminare in quanto i due tipi di massa (massa inerziale e massa gravitazionale) sono equivalenti (Principio di equivalenza) e quindi la (4.4) diventa:

$$\vec{a} = -G \frac{M_{\oplus}}{r^3} \vec{r} \quad (4.6)$$

La (4.5) ci dice che tutti i corpi sono attratti dalla Terra (ma sarebbe lo stesso anche per il Sole o per qualunque altro corpo sorgente) con la stessa accelerazione. Si dice che tutti i corpi *cadono* con la stessa accelerazione (Universalità della caduta libera). Si noti che questo vale per un sasso che cade come per un satellite in orbita, cioè "cadere" non significa soltanto cadere "radialmente" o "in verticale", ma anche "orbitare" (es. il satellite LAGEOS –Figura 4.1– "cade" nel campo della Terra; la Luna "cade" nel campo della Terra, la Terra e la Luna "cadono" nel campo del Sole...)



Figura 4.1: Uno dei 2 satelliti LAGEOS in orbita attorno alla Terra ad una distanza dal centro della Terra di circa 2 raggi terrestri (cioè alla quota di circa 1 raggio terrestre). Massa: circa 400 kg; raggio circa 30 cm (0.3 m); 426 retroriflettori laser per essere "inseguiti" dalle stazioni laser a Terra. È l'oggetto reale più vicino che possiamo immaginare al concetto di "particella test" della Fisica. (es: è dato un campo di forze, usiamo una particella test per vedere il suo effetto in un punto qualunque...)

Sulla superficie della Terra, alla distanza di 1 raggio terrestre dal suo centro, l'accelerazione di caduta (4.6) si indica con g e si calcola usando la (4.6) con la massa e il raggio della Terra:

$$M_{\oplus} \simeq 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad R_{\oplus} \simeq 6378 \text{ km} = 6.38 \cdot 10^6 \text{ m} \quad (4.7)$$

da cui (in modulo):

$$g = G \frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \simeq 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5.98 \cdot 10^{24}}{(6.38 \cdot 10^6)^2} \text{ ms}^{-2} \simeq \frac{6.67 \cdot 5.98}{6.38^2} \cdot 10^{(-11+24-12)} \text{ ms}^{-2} \simeq 0.98 \cdot 10^1 \text{ ms}^{-2} \simeq 9.8 \text{ ms}^{-2} \quad (4.8)$$

In ogni punto della superficie terrestre il vettore \vec{g} è radiale e punta verso il centro della Terra (Attenzione: è vero solo nell'assunzione che la Terra non giri sul suo asse).

Caduta dei gravi (o lancio del proiettile) in approssimazione di Terra piatta e non rotante

Assumiamo che la Terra sia piatta. Siamo nel sistema di riferimento inerziale di Figura 2.8. E le linee di forza del campo gravitazionale sono parallele, dirette lungo z . L'equazione del moto di un corpo in caduta è:

$$\ddot{\vec{r}} = -g\hat{k} \quad (4.9)$$

Al tempo iniziale, che assumiamo $t_o = 0$, prendiamo i seguenti valori per il vettore posizione e per il vettore velocità del corpo (caso generale):

$$\vec{r}(o) = (x_o, y_o, z_o) \quad \dot{\vec{r}}(o) = (v_{x_o}, v_{y_o}, v_{z_o}) \quad (4.10)$$

Le 3 equazioni del moto (una per ciascuna componente) sono:

$$\ddot{x}(t) = 0 \quad \ddot{y}(t) = 0 \quad \ddot{z}(t) = -g \quad (4.11)$$

Da queste, integrando una volta (rispetto al tempo), abbiamo le 3 componenti della velocità (in funzione del tempo) usando i valori per le velocità iniziali dati dalle (4.10):

$$\dot{x}(t) = v_{x_o} \quad \dot{y}(t) = v_{y_o} \quad \dot{z}(t) = -gt + v_{z_o} \quad (4.12)$$

e integrando ancora una volta rispetto al tempo otteniamo lo spazio percorso, in funzione del tempo, lungo ciascuna coordinata:

$$x(t) = v_{x_o} t + x_o \quad y(t) = v_{y_o} t + y_o \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z_o} t + z_o \quad (4.13)$$

Il corpo arriverà a terra al tempo t_f che dovrà soddisfare la relazione:

$$0 = z(t_f) = -\frac{1}{2}gt_f^2 + v_{z_o} t_f + z_o \quad (4.14)$$

e quindi:

$$\frac{1}{2}gt_f^2 - v_{z_o} t_f - z_o = 0 \quad (4.15)$$

$$t_f = \frac{v_{z0} \pm \sqrt{v_{z0}^2 + 2gz_0}}{g} = \frac{v_{z0} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gz_0}{v_{z0}^2}} \right)}{g} \quad (4.16)$$

Poiché deve essere $t_f > 0$ (dato che era $t_0 = 0$), essendo $g > 0$, deve anche essere:

$$\text{se } v_{z0} > 0 \Rightarrow t_f = \frac{v_{z0} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gz_0}{v_{z0}^2}} \right)}{g} \quad (4.17)$$

$$\text{se } v_{z0} < 0 \Rightarrow -|v_{z0}| \pm \sqrt{v_{z0}^2 + 2gz_0} > 0 \quad (4.18)$$

Il moto si svolge necessariamente nel piano individuato dalla direzione della accelerazione di gravità (l'asse z) e dal vettore della velocità iniziale del corpo. Per semplicità, e senza per questo perdere di generalità, assumiamo che il moto del corpo si svolga nel piano y, z e consideriamo il caso di un proiettile sparato dall'origine nel piano y, z :

$$\vec{r}(0) = (0,0,0) \quad \dot{\vec{r}}(0) = (0, v_{y0}, v_{z0}) \quad \text{con: } v_{x0} > 0 \text{ e } v_{y0} > 0 \quad (4.19)$$

Scriviamo le equazioni del moto e le integriamo come sopra per trovare la legge oraria (cioè l'andamento nel tempo di ogni coordinata):

$$\ddot{x}(t) = 0 \quad \ddot{y}(t) = 0 \quad \ddot{z}(t) = -g \quad (4.20)$$

$$\dot{x}(t) = 0 \quad \dot{y}(t) = v_{y0} \quad \dot{z}(t) = -gt + v_{z0} \quad (4.21)$$

$$x(t) = 0 \quad y(t) = v_{y0}t \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t \quad (4.22)$$

Se voglio trovare l'equazione della traiettoria percorsa, che sarà una curva di dimensione 1 nel piano (y, z) devo scrivere una relazione tra y e z , e quindi devo eliminare il tempo dalle (4.22):

$$t = \frac{y}{v_{y0}} \quad z = -\frac{1}{2}g \frac{y^2}{v_{y0}^2} + v_{z0} \frac{y}{v_{y0}} \quad (4.23)$$

$$z + \frac{g}{2v_{y0}^2}y^2 - \frac{v_{z0}}{v_{y0}}y = 0 \quad (4.24)$$

e questa è l'equazione di una parabola (Figura 4.2):

$$z = -\frac{g}{2v_{y0}^2}y^2 + \frac{v_{z0}}{v_{y0}}y \quad (4.25)$$

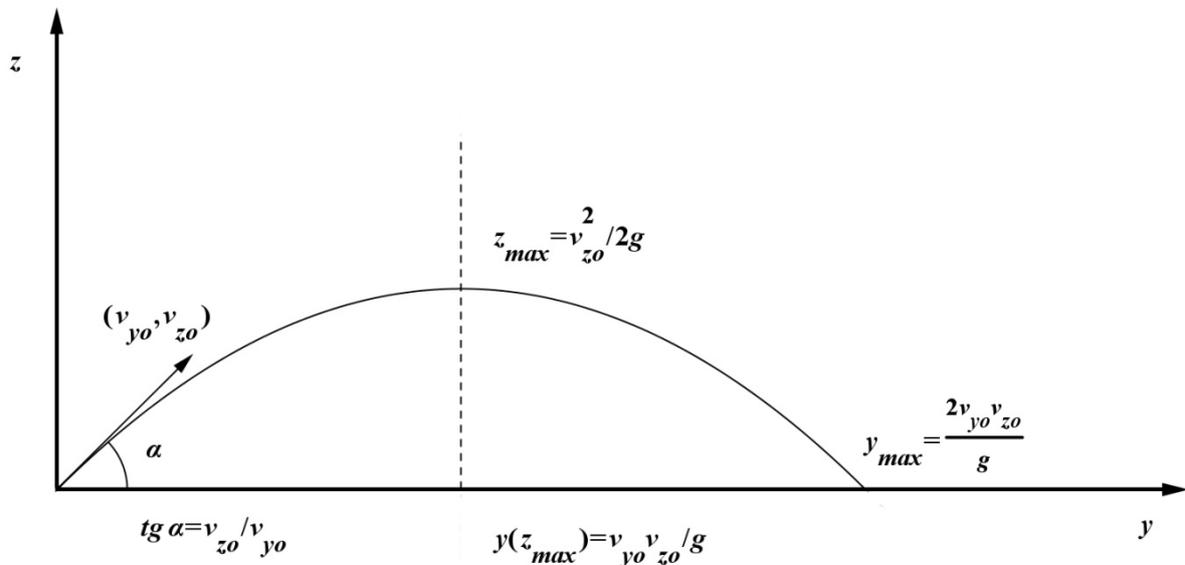


Figura 4.2: La traiettoria percorsa da un proiettile lanciato dall'origine è una parabola di cui sappiamo calcolare l'altezza massima e al gittata (la massima distanza dall'origine quando il proiettile tocca terra)

Per trovare il vertice calcoliamo la sua derivata:

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{g}{v_{y0}^2} y + \frac{v_{z0}}{v_{y0}} \quad (4.26)$$

Dove la derivata si annulla è il vertice della parabola, quindi per:

$$y|_{z_{max}} = \frac{v_{y0} v_{z0}}{g} \quad (4.27)$$

e il valore della funzione z al vertice della parabola (cioè per questo valore di y , è l'altezza massima raggiunta dal proiettile:

$$z_{max} = -\frac{g}{2v_{y0}^2} \left(\frac{v_{y0} v_{z0}}{g} \right)^2 + \frac{v_{z0} v_{y0} v_{z0}}{v_{y0} g} = \frac{v_{z0}^2}{2g} \quad (4.28)$$

che come si vede non dipende dalla velocità iniziale lungo y ma soltanto da quella lungo z . Nell'origine la derivata è

$$\left. \frac{dz}{dy} \right|_{y=0} = \frac{v_{z0}}{v_{y0}} \quad (4.29)$$

come ci aspettiamo che sia geometricamente perché è la direzione impressa al proiettile dal suo vettore velocità iniziale (Figura 4.2).

Dove cadrà il proiettile (gittata)? y_{max} si ha quando di nuovo risulta $z = 0$:

$$z = -\frac{g}{2v_{y0}^2} y_{max}^2 + \frac{v_{z0}}{v_{y0}} y_{max} = 0 \quad (4.30)$$

e quindi:

$$y_{max} = \frac{2v_{y0} v_{z0}}{g} \quad (4.31)$$

Il tempo totale di volo del proiettile è (ricordando che abbiamo assunto come zero il tempo al lancio):

$$t_f = \frac{y_{max}}{v_{y0}} = \frac{2v_{z0}}{g} \quad (4.32)$$

che si poteva ottenere anche da:

$$z(t_f) = -\frac{1}{2}gt_f^2 + v_{z0}t_f = 0 \quad \Rightarrow \quad t_f = \frac{2v_{z0}}{g} \quad (4.33)$$

Cosa si nota del moto lungo y ? La velocità è costante, e quindi anche la quantità di moto lineare, come deve essere secondo la seconda legge della dinamica (3.3) perché lungo la direzione y non agisce nessuna forza (quindi nella direzione y vale la legge d'inerzia).

Cosa cambia se il proiettile viene lanciato con le stesse condizioni iniziali ma dentro un treno che si muove a velocità costante V_{treno} lungo y rispetto al riferimento considerato finora? Si scrivono le stesse equazioni del moto e si trova la stessa soluzione (di nuovo, lungo y vale la legge d'inerzia). Semplicemente l'osservatore fermo "in stazione" misurerà lungo y una velocità $v_{y0} + V_{treno}$ mentre l'osservatore sul treno misurerà nella stessa direzione v_{y0} .

In generale, tra sistemi di riferimento in moto a velocità costante (in modulo direzione e verso l'uno rispetto all'altro) valgono le **trasformazioni dette galileiane**. Indicando con (y, z) le coordinate solidali con il treno che si muove a velocità costante $\vec{V} = (V, 0)$ (quindi nelle direzione y) rispetto al riferimento fisso (stazione) le cui coordinate indichiamo con (y', z') , possiamo scrivere:

$$y'(t) = y(t) + V \quad z'(t) = z(t) \quad (4.34)$$

Cosa cambia se il proiettile viene lanciato con le stesse condizioni iniziali ma dentro un treno che si muove con accelerazione costante $a > 0$ lungo z rispetto al riferimento considerato finora? Si tratta di un riferimento non inerziale e quindi per rispondere dobbiamo prima capire come si scrivono le leggi del moto in un tale riferimento, dato che la (3.1) vale solo in un riferimento inerziale.

Moto del pendolo

Si consideri un corpo puntiforme di massa m sospeso ad un filo di lunghezza ℓ fissa in un laboratorio sulla superficie della Terra assunta piatta e non rotante. Anche il filo e la sospensione si assumono perfetti e senza alcuna forma di dissipazione (Figura 4.3).

L'unica forza in gioco è la locale forza di attrazione gravitazionale e quindi se il corpo viene spostato dalla verticale (posizione di equilibrio) in una qualunque direzione, il suo moto si svolgerà nel piano individuato dai due vettori forza gravitazionale e vettore spostamento dalla verticale. Nella posizione verticale il corpo è in equilibrio perché la forza di attrazione gravitazionale della Terra è controbilanciata dal filo di sospensione che esercita una reazione vincolare uguale ed opposta.

Poiché il moto si svolge attorno al punto di sospensione, oltre ad essere piano, è naturale scegliere di usare coordinate polari piane. Definiamo ℓ, ϑ come in Figura 4.3 con le solite convenzioni sul segno degli angoli.

Poiché la lunghezza ℓ del filo è fissa il problema ha un solo **grado di libertà**¹: basta dare l'angolo ϑ di deviazione dalla verticale per individuare il corpo sospeso.

Il moto si svolge in lungo l'arco di circonferenza di raggio ℓ e centro nel punto di sospensione; scegliamo quindi la coordinata curvilinea s come in Figura. L'origine e il segno di s devono essere coerenti con l'origine e il segno di ϑ : nella posizione individuata da $\vartheta > 0$ come in Figura, sarà $s = \ell\vartheta > 0$.

Scomponiamo la forza gravitazionale nelle 2 componenti radiale (lungo $\vec{\ell}$) e trasversa (perpendicolare ad $\vec{\ell}$ nel verso in cui ϑ cresce – direzione del versore \hat{e}_ϑ come definito in Sez. 2), facendo attenzione al segno (la componente trasversa della forza è negativa).

Dovremmo scrivere 2 equazioni di moto, una per ciascuna componente, ma è chiaro che quella lungo $\vec{\ell}$ ci dirà semplicemente che la reazione del filo controbilancia la forza gravitazione (ridotta del fattore $\cos\vartheta$ rispetto a quando il corpo si trova lungo la verticale). Scriviamo quindi l'equazione del moto lungo la coordinata $s = \ell\vartheta$:

$$-mg\sin\vartheta = m\ell\ddot{\vartheta} \quad (4.35)$$

da cui (notare che la massa del corpo non compare)

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{\ell} \sin\vartheta = 0 \quad (4.36)$$

¹ I **gradi di libertà** di un sistema sono il numero di coordinate necessarie per individuare completamente la posizione del sistema nello spazio fisico delle configurazioni (in generale lo spazio \mathbb{R}^3)

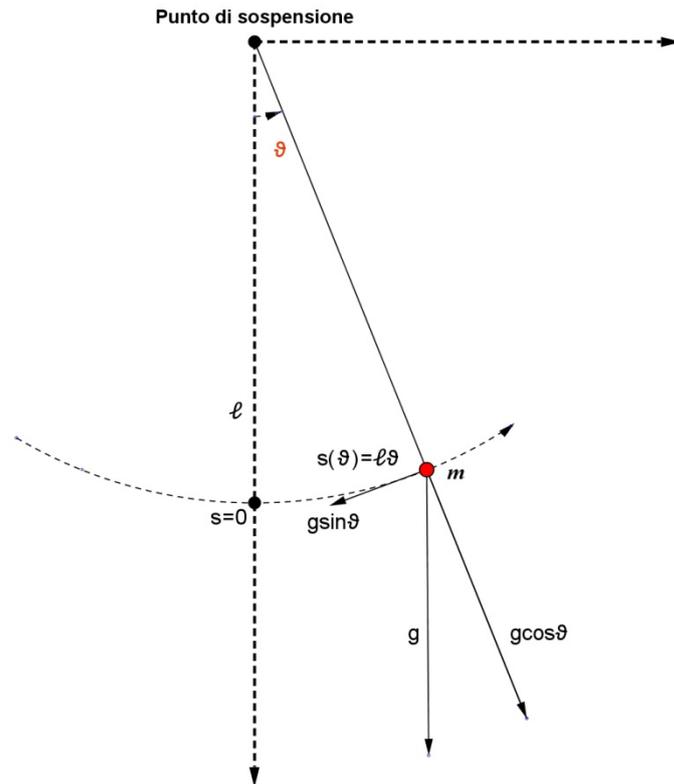


Figura 4.3: Il moto del pendolo si svolge in 1 sola dimensione lungo la coordinata $s(\vartheta)$ che misuriamo dal punto di equilibrio del pendolo (dove $s = 0$) in senso antiorario (positivo), in modo che $s(\vartheta)$ abbia lo stesso segno dell'angolo ϑ . La forza $g \sin \vartheta$ che agisce lungo la coordinata $s(\vartheta)$ è quindi diretta in verso negativo.

In particolare, nel caso di piccole oscillazioni ($\sin \vartheta \approx \vartheta$ per piccoli valori di ϑ) si ha:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{\ell} \vartheta \approx 0 \tag{4.37}$$

che è l'equazione del moto del pendolo nell'approssimazione delle piccole oscillazioni. Dalla (4.) si noti che dimensionalmente $[\ddot{\vartheta}] = [rad/s^2] = [s^{-2}]$ (gli angoli non hanno dimensione ma conviene annotarli in radianti quando compaiono) e quindi deve essere anche $[\vartheta g/\ell] = [rad/s^2]$ (in ogni equazione di fisica tutti i membri devono avere le stesse dimensioni) e perciò $[g/\ell] = [s^{-2}]$, che è una frequenza (inverso di un tempo) al quadrato e, se moltiplicata per radianti significa una velocità angolare al quadrato.

Ricordando che le funzioni seno e coseno hanno la proprietà che derivando 2 volte si riottiene la funzione stessa cambiata di segno :

$$\frac{d(\sin \vartheta)}{d\vartheta} = \cos \vartheta \qquad \frac{d(\cos \vartheta)}{d\vartheta} = -\sin \vartheta \tag{4.38}$$

$$\frac{d^2(\sin \vartheta)}{d\vartheta^2} = \frac{d(\cos \vartheta)}{d\vartheta} = -\sin \vartheta \qquad \frac{d^2(\cos \vartheta)}{d\vartheta^2} = \frac{d(\sin \vartheta)}{d\vartheta} = \cos \vartheta \tag{4.39}$$

e notando che se ϑ è una funzione del tempo $\vartheta(t)$ e la derivata è fatta rispetto al tempo e non rispetto all'angolo stesso, si ha:

$$\frac{d(\sin\vartheta)}{dt} = \dot{\vartheta}\cos\vartheta \qquad \frac{d(\cos\vartheta)}{dt} = -\dot{\vartheta}\sin\vartheta \qquad (4.40)$$

$$\frac{d^2(\sin\vartheta)}{dt^2} = \frac{d(\dot{\vartheta}\cos\vartheta)}{dt} = -\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta \qquad \frac{d^2(\cos\vartheta)}{dt^2} = \frac{d(-\dot{\vartheta}\sin\vartheta)}{dt} = -\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta \qquad (4.41)$$

e $\dot{\vartheta}$ ha le dimensioni di rad/s , cioè si tratta una velocità angolare, che indichiamo con il simbolo ω .

Proviamo perciò a scrivere una soluzione dell'equazione del moto del pendolo (4.37) come:

$$\vartheta = \vartheta_0 \cos\omega t \qquad (4.42)$$

(at tempo $t = 0$ il pendolo è spostato rispetto alla verticale di un angolo ϑ_0). Inserendola nell'equazione del moto abbiamo:

$$\dot{\vartheta} = -\omega\vartheta_0\sin\omega t \qquad \ddot{\vartheta} = -\omega^2\vartheta_0\cos\omega t \quad e \quad \text{cioè} \quad \ddot{\vartheta} = -\omega^2\vartheta \quad e \quad \text{cioè} \quad \ddot{\vartheta} + \omega^2\vartheta = 0 \qquad (4.43)$$

Abbiamo quindi trovato una soluzione dell'equazione del pendolo (4.37) –equazione valida solo per piccole oscillazioni– del tipo $\vartheta = \vartheta_0 \cos\omega t$ dove ϑ_0 è l'angolo di spostamento dalla verticale all'istante iniziale e vale:

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell} \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad (4.44)$$

cioè $\omega = \sqrt{g/\ell}$ è la velocità angolare del pendolo, e quindi il suo periodo di oscillazione (= il tempo impiegato per fare un giro completo di 2π radianti andando alla velocità angolare ω) è:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad (4.45)$$

che risulta dipendere soltanto dalla lunghezza del filo di sospensione (oltre che dalla locale accelerazione di gravità), ma non dalla ampiezza delle oscillazioni.

Sebbene questo sia vero solo per piccole oscillazioni (quando il moto è descritto dall'equazione (4.37), in cui $\sin\vartheta$ è stato sostituito da ϑ), si tratta di una scoperta fondamentale (fatta da Galileo, probabilmente nel Duomo di Pisa osservando il moto dei candelabri appesi a dall'altissimo soffitto e rilasciato dopo l'accensione). L'importanza della scoperta sta nel fatto di poter disporre di un "oggetto" che compie la stessa azione in maniera ripetitiva e ad un tasso di ripetitività regolare, cioè di un orologio che infatti dopo non molti anni (ma Galileo era già morto), una volta reso di dimensioni modeste e risolto il problema di mantenere le oscillazioni (con la carica), entrò in moltissime case. E fu la prima volta nella storia che un orologio piuttosto preciso divenne alla portata di quasi tutti.

5. Lavoro ed energia

In un tempo infinitesimo dt un corpo compie uno spostamento infinitesimo $d\vec{s}$ e su di esso agisce una forza (totale) \vec{F} . Definiamo $d\mathcal{L}$:

$$d\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{s} \qquad (5.1)$$

come il lavoro infinitesimo compiuto dalla forza \vec{F} nel tempo infinitesimo dt (il lavoro ha le dimensioni di $[\text{kg}][\text{m}]^2[\text{s}]^{-2}$, che sono le dimensioni di una energia). Dalla (5.1) si nota che il lavoro compiuto è massimo quando forza e spostamento sono paralleli (il prodotto scalare è massimo), mentre è nullo quando essi sono ortogonali.

Passando dall'infinitesimo al finito, il lavoro compiuto dalla forza \vec{F} nell'andare dal punto A al punto B della traiettoria del corpo, è:

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = \int_A^B d\mathcal{L} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (5.2)$$

Se la forza \vec{F} è una forza *conservativa* (i.e. non ci sono forme di dissipazione nel sistema) allora il lavoro compiuto dipende solo dai punti tra i quali viene calcolato, e non dal particolare percorso scelto per andare da un punto all'altro. In questo caso possiamo definire una grandezza, che chiamiamo *energia potenziale* la cui differenza tra i punti A e B è esattamente uguale ed opposta al lavoro compiuto dalla forza \vec{F} per andare da un punto all'altro (lavoro ed energia potenziale hanno evidentemente le stesse dimensioni fisiche). Quindi:

$$U(B) - U(A) \equiv -\mathcal{L}_{A \rightarrow B} \quad (5.3)$$

Energia potenziale

Più precisamente, scelto un punto di riferimento \vec{P}_0 , possiamo definire l'energia potenziale in un generico punto \vec{P} dalla relazione (in tutto simile alla (5.3)):

$$U(\vec{P}) - U(\vec{P}_0) = - \int_{\vec{P}_0}^{\vec{P}} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (5.4)$$

e quindi:

$$U(\vec{P}) = - \int_{\vec{P}_0}^{\vec{P}} \vec{F} \cdot d\vec{s} + U(\vec{P}_0) \quad (5.5)$$

da cui si evince che l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva $U(\vec{P}_0)$ che è il valore dell'energia potenziale in uno specifico punto \vec{P}_0 che abbiamo scelto come riferimento e rispetto al quale calcoliamo l'energia potenziale in ogni altro punto. Sceglieremo il punto di riferimento in modo che l'energia potenziale in quel punto sia nulla.

Il significato fisico dell'energia potenziale è chiaro: se per andare dal punto di riferimento ad un punto \vec{P} qualunque occorre fare del lavoro *contro* la forza (interna) del sistema il corpo avrà in quel punto una energia potenziale positiva (esattamente pari al lavoro *immesso* nel sistema). Se invece per andare dal punto di riferimento al punto \vec{P} il lavoro viene fatto dalla forza \vec{F} interna al sistema, allora il corpo perderà parte dell'energia potenziale che aveva nel punto di riferimento e quindi nel punto di arrivo avrà una energia potenziale negativa (perché l'ha persa rispetto a quella, nulla, che aveva nel punto di riferimento).

È chiaro dalla definizione (5.5) che data una forza \vec{F} per calcolare l'energia potenziale di un corpo di massa m soggetto a questa forza occorrerà per prima cosa scegliere il livello \vec{P}_0 al quale riferirla, cioè il livello di energia potenziale nulla.

Conservazione dell'energia

Calcoliamo la differenza di energia potenziale (5.4) usando la seconda legge delle dinamiche (3.2) (ricordo che siamo in un sistema di riferimento inerziale):

$$\begin{aligned} U(\vec{P}) - U(\vec{P}_0) &= - \int_{\vec{P}_0}^{\vec{P}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{P}}^{\vec{P}_0} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{P}}^{\vec{P}_0} m\vec{a} \cdot d\vec{s} = m \int_{\vec{P}}^{\vec{P}_0} \vec{a} \cdot d\vec{s} = m \int_{\vec{P}}^{\vec{P}_0} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} \\ &= m \int_{\vec{P}}^{\vec{P}_0} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_{v(\vec{P})}^{v(\vec{P}_0)} d\vec{v} \cdot \vec{v} = m \int_{v(\vec{P})}^{v(\vec{P}_0)} d\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

avendo usato: $\vec{F} = m\vec{a}$, $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, $\vec{v} = d\vec{s}/dt$ e avendo definito $v(\vec{P}_0) \equiv v_0$. Definiamo ora energia cinetica di un corpo di massa m che si muove con velocità \vec{v} la grandezza (sempre positiva):

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (5.7)$$

e la (5.6) diventa:

$$\begin{aligned} U(\vec{P}) - U(\vec{P}_0) &= T(\vec{P}) - T(\vec{P}_0) \\ U(\vec{P}) + T(\vec{P}) &= U(\vec{P}_0) + T(\vec{P}_0) \end{aligned} \quad (5.8)$$

che esprime la conservazione dell'energia –potenziale più cinetica– tra due punti qualunque dello stato del sistema. Questo deriva dal fatto che abbiamo assunto di essere in presenza di una forza conservativa, altrimenti non avremmo potuto scrivere la (5.4) da cui siamo partiti per arrivare alla (5.8).

Calcolo dell'energia potenziale di un corpo nel campo gravitazionale della Terra

- *Calcolare l'energia potenziale di un corpo di massa m sulla superficie della Terra (assunta come piatta e non rotante) soggetto alla sola attrazione gravitazionale della Terra stessa.*

Scegliamo come sistema di riferimento inerziale quello in 2 dimensioni mostrato in Figura 5.1 perché in generale il moto si svolgerà nel piano individuato dalla accelerazione di gravità \vec{g} e dal vettore della velocità iniziale del corpo, che abbiamo indicato in Figura come piano (y, z) . In questo caso tuttavia, dovendo calcolare l'energia potenziale, non studieremo il moto del corpo e la sua traiettoria e quindi non ci interessano le sue condizioni iniziali. In effetti, dato che la forza gravitazionale agisce solo lungo z avremmo potuto considerare soltanto questa coordinata.

Per il livello di riferimento dell'energia potenziale (il \vec{P}_0 della (5.5)) è naturale scegliere il punto $\vec{P}_0 = (y, 0)$, cioè quello in cui il corpo si trova ad altezza nulla da terra, dove l'accelerazione locale di gravità \vec{g} è bilanciata dalla resistenza del terreno, quindi la forza totale agente sul corpo è nulla e così anche la sua energia potenziale. Scelto questo come livello zero, usiamo la definizione (5.5) per calcolare l'energia potenziale del corpo nel punto $\vec{P} = (y, z)$:

$$\begin{aligned}
 U(\vec{P}) = U(y, z) &= - \int_{\vec{P}_0}^{\vec{P}} m \vec{g} \cdot d\vec{r} = - \int_{\vec{P}_0}^{\vec{P}} m(0, -g) \cdot (dy, dz) = - \int_{\vec{P}_0}^{\vec{P}} -mg dz \\
 &= +mg \int_{\vec{P}_0(y, 0)}^{\vec{P}(y, z)} dz' = mg \int_0^z dz' = mg[z']_0^z = mgz
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

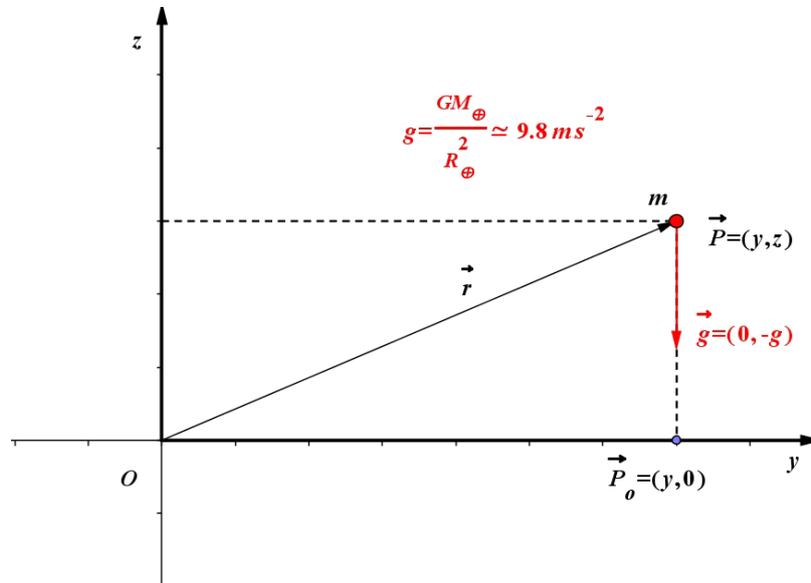


Figura 5.1: Un corpo di massa m si trova sulla superficie della Terra (assunta come piatta e non rotante) nel punto $\vec{P}(y, z)$ di un sistema di riferimento inerziale come disegnato in figura. Si chiede di calcolare la sua energia potenziale gravitazionale.

Abbiamo visto che se si usa correttamente la formulazione vettoriale si trova automaticamente il risultato col segno giusto. Notare che, essendo il vettore posizione del corpo $\vec{r} = (y, z)$ il suo differenziale infinitesimo è $d\vec{r} = (dy, dz)$, che possiamo pensare come uno spostamento piccolo ma finito nelle due direzioni del piano $\Delta\vec{r} = (\Delta y, \Delta z)$, facendo poi il passaggio al limite.

Naturalmente in questo caso, dato che l'unica forza in gioco (quella gravitazionale) agisce lungo z , ci si poteva semplificare la vita limitandoci a considerare la sola coordinata z . Avendo scelto il livello con $z = 0$ come livello di riferimento dove l'energia potenziale del corpo è nulla, scriveremmo semplicemente:

$$U(z) = - \int_0^z (-mg) dz' = +mg \int_0^z dz' = mgz \tag{5.10}$$

Lo scopo del calcolo (5.9) è di imparare a fare il conto anche in casi più generali.

Dalle (5.9) e (5.10) vediamo che, come ci si aspettava, l'energia potenziale gravitazionale del corpo quando si trova ad una altezza z sopra il piano orizzontale è positiva: chi ha sollevato il corpo dal piano orizzontale fino ad una altezza z ha compiuto del lavoro *contro* la forza gravitazionale e quindi ha immesso energia nel sistema, che il corpo una volta a quella altezza possiede *in potenza*. Notiamo inoltre che nella (5.9), pur avendo fatto il conto nel piano y, z l'energia potenziale del corpo dipende soltanto dalla sua altezza da terra, rappresentata nelle nostre notazioni dalla coordinata z , e non dal punto lungo l'asse y del piano orizzontale in cui esso si trova (dovunque il corpo si trovi nel laboratorio la sua energia potenziale gravitazionale è sempre la stessa fintanto che si trovi sempre alla stessa altezza z dal suolo).

- Calcolare l'energia potenziale di un corpo di massa m a distanza r dal centro di massa della Terra (assunta come puntiforme) soggetto alla sola attrazione gravitazionale della Terra stessa.

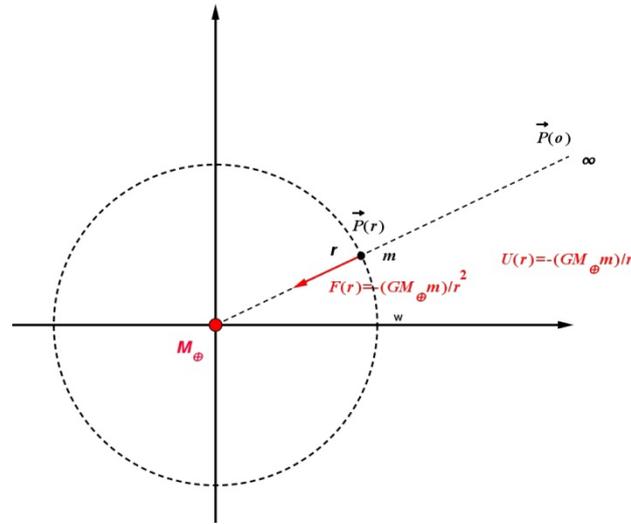


Figura 5.2: Un corpo di massa m si trova a distanza r dalla superficie della Terra, assunta come puntiforme e nell'origine di un sistema di riferimento inerziale. Si chiede di calcolare la sua energia potenziale gravitazionale.

Il campo gravitazionale ha simmetria sferica (Figura 4.1) attorno alla massa centrale (in questo caso la Terra di massa M_{\oplus}), perciò calcoleremo l'energia potenziale del corpo m tra due punti a diversa distanza da M_{\oplus} lungo una direzione radiale qualunque.

Scegliamo come livello di riferimento per il calcolo dell'energia potenziale quello a distanza infinita da M_{\oplus} perché l'attrazione gravitazionale della Terra all'infinito è nulla. Abbiamo:

$$U(r) = - \int_{\infty}^r \left(-\frac{GM_{\oplus}}{r'^2}\right) dr' = GM_{\oplus} \int_{\infty}^r (r')^{-2} dr' = GM_{\oplus} \left(\frac{r^{-1}}{-1}\right) = -\frac{GM_{\oplus}}{r} \quad (5.11)$$

Come mai, trattandosi sempre dell'energia potenziale di un corpo nel campo della Terra abbiamo due risultati diversi (la (5.10) e la (5.11)) e addirittura di segno opposto? Facciamo il conto come illustrato in Figura 5.3 usando la (5.11) nell'approssimazione $h \ll R_{\oplus}$:

$$\begin{aligned} U(R_{\oplus} + h) - U(R_{\oplus}) &= -\frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus} + h} + \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} = -\frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus} \left(1 + \frac{h}{R_{\oplus}}\right)} \simeq -\frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} \left(1 - \frac{h}{R_{\oplus}}\right) + \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} \\ &\simeq \frac{GM_{\oplus}mh}{R_{\oplus}^2} \simeq mgh \end{aligned} \quad (5.12)$$

Come si vede, purché il corpo m si trovi ad una quota bassa rispetto al raggio della terra (che equivale a fare l'approssimazione di Terra piatta) la sua energia potenziale è bene approssimata dalla (5.10) che si ottiene a partire dalla formula più generale (5.11).

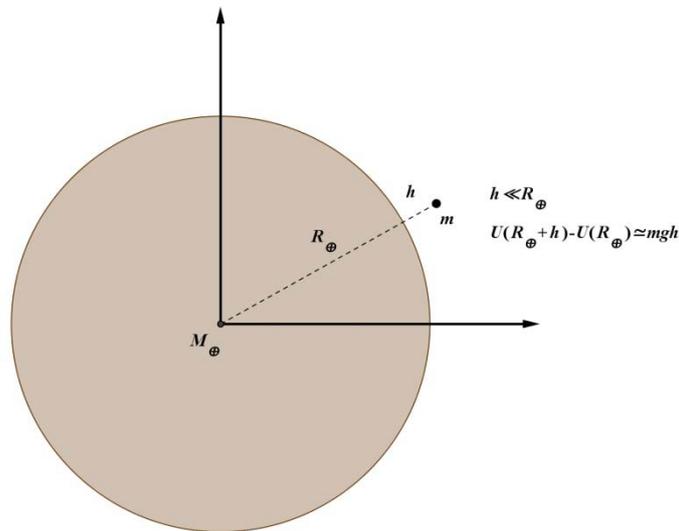


Figura 5.3: Energia potenziale gravitazionale di un corpo di massa m ad una quota $h \ll R_{\oplus}$ dalla superficie della Terra (Terra sferica)

L'oscillatore armonico

Esercizio: calcolo dell'energia potenziale di un corpo soggetto ad una forza elastica

- *Calcolare l'energia potenziale di un corpo puntiforme di massa m vincolato a muoversi lungo una sola direzione (l'asse x) e collegato all'origine tramite una molla di costante elastica di richiamo k tale che quando il corpo si trova ad una data distanza x dall'origine la molla lo richiama verso l'origine con una forza proporzionale all'allungamento della molla in quel punto. Si consideri il caso ideale in cui la molla ha lunghezza di riposo nulla, nel deformarsi non dissipa alcuna energia e inoltre si trova in un vuoto perfetto (la densità residua dell'aria è nulla e quindi il moto del corpo non è soggetto ad alcun attrito). Il moto si svolge in un sistema di riferimento inerziale*

Dal testo del problema deduciamo che l'unica forza agente sul corpo, nell'unica coordinata x dove il moto è possibile, ha la forma:

$$F = -kx \tag{5.13}$$

(la costante elastica ha le dimensioni $[k]=[\text{forza}]/[\text{spostamento}]=[\text{N}]/[\text{m}]=[\text{kgms}^{-2}]/[\text{m}]=[\text{kg s}^{-2}]$). La (5.13) è la forza elastica.

È naturale scegliere come punto di riferimento per l'energia potenziale l'origine, dove la forza è nulla. Quando il corpo si trova ad una distanza generica x dall'origine la sua energia potenziale (rispetto all'origine) è:

$$U(x) = -\int_0^x (-kx') dx' = k \int_0^x x' dx' = \frac{1}{2} kx^2 \tag{5.14}$$

L'energia totale E del corpo (che si conserva) in una qualunque posizione è quindi:

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = E \quad (\text{costante del moto}) \quad (5.15)$$

Notare la differenza concettuale tra la funzione energia $E = E(x, \dot{x})$ che dipende in ogni punto dalla posizione e dalla velocità del corpo, e il valore costante E di questa funzione che deve avere lo stesso valore numerico durante tutto il moto. In questo caso si dice anche che l'energia è **un integrale primo del moto**.

L'equazione del moto (3.2), con la forza (5.13) è:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (5.16)$$

che riscriviamo nella forma

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (5.17)$$

avendo introdotto la grandezza fisica $\omega = \sqrt{k/m}$ che ha le dimensioni $[\omega] = [s^{-1}]$ e dipende soltanto dalle caratteristiche fisiche dell'oscillatore: la sua costante elastica e la sua massa. La (5.17) ha 2 soluzioni indipendenti, tipo coseno o tipo seno. Possiamo scrivere la soluzione generale come:

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (5.18)$$

con le costanti c_1, c_2 (aventi le dimensioni di lunghezze) oppure come:

$$x(t) = a \cos(\omega t + \alpha) \quad (5.19)$$

dove le costanti a, α sono ampiezza e fase. Essendo:

$$\cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cdot \cos \alpha - \sin \omega t \cdot \sin \alpha \quad (5.20)$$

si ha che le costanti coinvolte nei due casi sono legate dalle relazioni:

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{tg } \alpha = -\frac{c_1}{c_2} \quad (5.21)$$

Le due costanti necessarie vengono determinate dando posizione e velocità al tempo iniziale. ω è la frequenza propria (o naturale) di oscillazione dell'oscillatore, determinata da k e da m e indipendente dalle condizioni iniziali. Possiamo usare la soluzione nella forma (5.19) nella funzione energia (5.15) per calcolare il suo valore (useremo anche la derivata temporale della (5.19)). Risulta:

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \quad (5.22)$$

cioè, dato un oscillatore di frequenza naturale ω , l'energia cresce col quadrato dell'ampiezza di oscillazione.

Per esercizio vediamo come le costanti della soluzione (5.19) si ricavano dalle condizioni iniziali di posizione e velocità:

$$x(t=0) = x_0 \quad e \quad \dot{x}(t=0) = v_0 \quad (5.23)$$

Dalla (5.19) al tempo $t = 0$ abbiamo:

$$x(0) = a \cos(0 + \alpha) = a \cos \alpha = x_0 \quad (5.24)$$

Derivando la (5.19) rispetto al tempo e considerando il tempo $t = 0$ abbiamo:

$$\dot{x}(t) = -\omega a \sin(\omega t + \alpha) \quad \dot{x}(0) = -\omega a \sin \alpha = v_0 \quad (5.25)$$

Dal sistema di 2 equazioni:

$$x_0 = a \cos \alpha \quad v_0 = -\omega a \sin \alpha \quad (5.26)$$

ricaviamo subito la fase α :

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_0}{\omega x_0} \quad (5.27)$$

e per ottenere l'ampiezza a usiamo i quadrati delle (5.26) e la relazione trigonometrica $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ottenendo:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{v_0^2}{\omega^2 a^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad (5.28)$$

Consideriamo un oscillatore armonico con 2 gradi di libertà: un corpo di massa m è collegato ad una molla di costante elastica k che lo richiama verso l'origine con una forza proporzionale alla distanza da essa, la costante di proporzionalità essendo la costante elastica della molla, e si può muovere nel piano x, y . Le 2 equazioni del moto sono:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad m\ddot{y} + ky = 0 \quad (5.29)$$

cioè si tratta di 2 moti oscillatori indipendenti nelle 2 direzioni con la stessa frequenza di oscillazione $\omega = \sqrt{k/m}$, come nel caso dell'analogo oscillatore armonico unidimensionale. Scriviamo le 2 soluzioni nella forma (5.19) avendo questa volta 4 costanti, 2 ampiezze e 2 fasi, (ampiezza e fase per la componente x più ampiezza e fase per la componente y) determinate dalle condizioni iniziali dei vettori posizione e velocità del corpo nel piano al tempo zero, che sono 4 :

$$x(t) = a_x \cos(\omega t + \alpha_x) \quad y(t) = a_y \cos(\omega t + \alpha_y) \quad (5.30)$$

L'energia totale risulta essere la somma delle energie dei 2 moti oscillatori nelle 2 direzioni:

$$E(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k y^2 = E(x, \dot{x}) + E(y, \dot{y})$$

e la conservazione dell'energia si applica separatamente ad entrambi:

$$E(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = E \quad E(x, \dot{x}) = E_x \quad E(y, \dot{y}) = E_y \quad E = E_x + E_y \quad (5.31)$$

Per la (5.22) sarà:

$$E_x = \frac{1}{2} m \omega^2 a_x^2 \quad E_y = \frac{1}{2} m \omega^2 a_y^2 \quad (5.32)$$

quindi la traiettoria nel piano deve essere racchiusa dentro un rettangolo centrato nell'origine e di semilati a_x, a_y . Le 2 equazioni (5.30) danno la legge oraria lungo le due direzioni. Per trovare l'equazione della traiettoria percorsa dal corpo nel piano, che deve essere del tipo $f(x, y) = \text{costante}$, occorre eliminare il tempo dalle (5.30). Per fare questo riscriviamo le (5.30) avendo cambiato l'origine dei tempi $t \rightarrow t' + t_0$ in modo che nella nuova variabile t' la fase in x al tempo zero risulti nulla e quella in y sia la differenza, i.e.:

$$\omega t + \alpha_x = \omega t' \quad \omega t + \alpha_y = \omega t' + \alpha_y - \alpha_x \quad (5.33)$$

Nella nuova variabile t' abbiamo per le 2 leggi orarie:

$$x(t') = a_x \cos(\omega t') \quad y(t') = a_y \cos(\omega t' + \alpha_y - \alpha_x) \quad (5.34)$$

da cui si vede bene l'importanza che gioca la differenza di fase $\Delta\alpha = \alpha_y - \alpha_x$. Se $\Delta\alpha = -\pi/2$ abbiamo:

$$x(t') = a_x \cos(\omega t') \quad y(t') = a_y \cos(\omega t' - \pi/2) = a_y \sin(\omega t') \quad (5.35)$$

e quindi l'equazione della traiettoria è

$$\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} = 1 \quad (5.36)$$

che è l'equazione di una ellisse centrata nell'origine di semiassi a_x, a_y racchiusa quindi nel rettangolo individuato sopra. Se invece $\Delta\alpha = 0$, si ha $x = y$ e cioè la traiettoria si riduce alla diagonale del rettangolo percorsa avanti e indietro dalla massa oscillante.

Si può dimostrare che eliminando il tempo dalle (5.34) si ottiene, per l'equazione generale della traiettoria dell'oscillatore nel piano:

$$\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} - \frac{2xy}{a_x a_y} \cos \Delta\alpha = \sin^2 \Delta\alpha \quad (5.37)$$

che è l'equazione di una ellisse centrata nell'origine il cui asse maggiore è orientato in modo generico e che per qualunque orientazione è vincolata ad essere iscritta dentro il rettangolo.

Consideriamo il caso più interessante di due masse m_1, m_2 collegate da una molla di costante elastica k per il momento lungo una sola direzione x ; le masse hanno coordinate x_1, x_2 rispettivamente e la molla ha lunghezza a riposo nulla.

Energia totale:

$$E_{tot} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

Sistema del centro di massa:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Non ci sono forze esterne (il sistema è isolato):

$$\ddot{x}_{CM} = 0 \quad (m_1 + m_2)\dot{x}_{CM} = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = \text{costante}$$

Se mettiamo l'origine nel centro di massa, e definiamo

$$x_{diff} = x_2 - x_1$$

abbiamo:

$$x_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} x_{diff} \quad x_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} x_{diff}$$

e per le velocità:

$$\dot{x}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{x}_{diff} \quad \dot{x}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{x}_{diff}$$

e quindi l'energia totale si riscrive come:

$$E_{tot} = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{x}_{diff} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{x}_{diff} \right)^2 + \frac{1}{2} k x_{diff}^2$$

Definendo la **massa ridotta** del sistema come:

$$\mathcal{M} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

risulta

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \mathcal{M} \dot{x}_{diff}^2 + \frac{1}{2} k x_{diff}^2$$

e il moto delle 2 masse si è ridotta a quello di un solo oscillatore di massa pari alla massa ridotta, stessa costante elastica e distanza dal centro di richiamo pari alla distanza relativa delle due masse. La frequenza naturale di oscillazione della massa ridotta è quindi

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mathcal{M}}}$$

che è la frequenza delle oscillazioni differenziali delle 2 masse l'una rispetto all'altra.

Caso in 2 dimensioni

Molecole biatomiche composte di atomi di isotopi diversi

6. Equazioni del moto in un riferimento accelerato

La legge della dinamica (3.2) vale in un riferimento inerziale (e in tutti quelli in moto a velocità costante –in modulo, direzione e verso– rispetto ad esso).

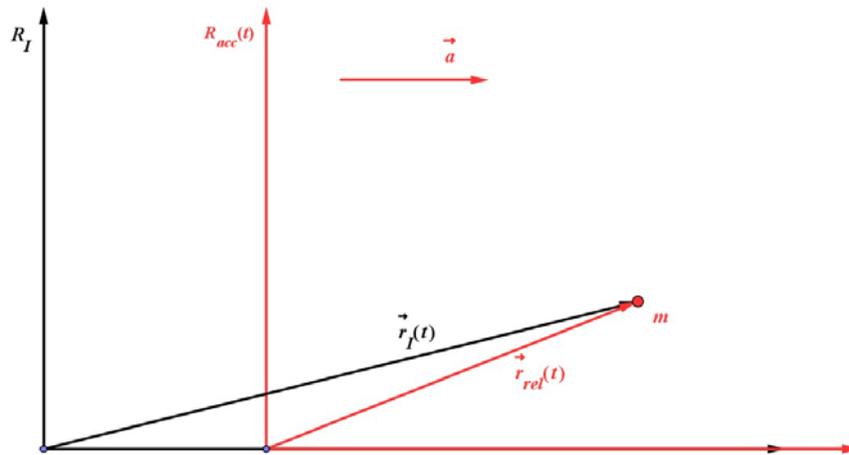


Figura 6.1: Un riferimento in moto accelerato rispetto al riferimento inerziale

Consideriamo ora un riferimento in moto accelerato (in rosso in Figura 6.1) rispetto al riferimento inerziale R_I ; all'interno del riferimento accelerato si trova un corpo di massa m di cui i due osservatori (quello del riferimento inerziale e quello del riferimento accelerato) scrivono le equazioni del moto. Sia \vec{F} la forza cui il corpo è soggetto nel riferimento inerziale. L'osservatore di questo riferimento scriverà –in accordo con la (3.2):

$$\ddot{\vec{r}}_I = \frac{\vec{F}}{m} \quad (6.1)$$

In ogni istante l'accelerazione del corpo rispetto al riferimento inerziale sarà la somma vettoriale della sua accelerazione rispetto al riferimento accelerato, che indichiamo come $\ddot{\vec{r}}_{rel}$ (useremo sempre il pedice *rel* ad indicare il moto relativo al riferimento non inerziale), più l'accelerazione del riferimento accelerato stesso:

$$\ddot{\vec{r}}_I = \ddot{\vec{r}}_{rel} + \vec{a} \quad (6.2)$$

Dalle (6.1) e (6.2) otteniamo:

$$m\ddot{\vec{r}}_{rel} = \vec{F} - m\vec{a} \quad (6.3)$$

che è l'equazione del moto del corpo nel riferimento accelerato. Essa dice nel riferimento in moto accelerato, in aggiunta alla forza \vec{F} che agisce sul corpo nel riferimento inerziale agisce anche la forza $-m\vec{a}$, detta *forza inerziale* (perché proporzionale alla massa m che è la *massa inerziale* del corpo (vedi la (3.2)): il corpo all'interno del riferimento accelerato è soggetto ad una accelerazione uguale ed opposta a quella del riferimento accelerato stesso (nel caso di un corpo di dimensioni finite questa accelerazione è applicata nel centro di massa).

Passeggeri sull'autobus

All'interno dell'autobus che frena tutti i passeggeri vengono accelerati *in avanti* con accelerazione *uguale ed opposta* a quella con cui l'autista ha frenato – applicata a ciascuno di essi nel proprio centro di massa. Se invece l'autista accelera i passeggeri vengono accelerati *all'indietro*, sempre tutti con accelerazione uguale ed opposta a quella con cui l'autista ha accelerato. Possiamo assumere che su ogni passeggero non agisca

alcuna altra forza (la gravità locale è controbilanciata dalla reazione del terreno) per cui, se l'autobus andasse a velocità costante (senza accelerare né frenare) i passeggeri non sarebbero soggetti ad alcuna forza.

Gravità locale, ascensore di Einstein e astronave

Un osservatore che si trovi chiuso dentro un ascensore fermo sulla superficie della Terra (Figura 6.2, approssimazione di Terra piatta, campo gravitazionale uniforme, linee di forza dell'accelerazione gravitazionale parallele e uniformi) vedrà i corpi cadere con l'accelerazione locale di gravità $\vec{g} = (0, -g)$ verso i suoi piedi. Un osservatore che si trovi chiuso dentro un'astronave nello spazio vuoto (i.e. lontana da qualsiasi massa) in moto con accelerazione costante $-\vec{g} = (0, g)$ (fornita da opportuni razzi che l'osservatore non vede), se rilascia delle masse le vedrà muoversi con accelerazione $\vec{g} = (0, -g)$, cioè verso i suoi piedi, esattamente come l'osservatore chiuso dentro l'ascensore sulla superficie della Terra.

Infatti, quello dell'astronave è un riferimento accelerato (come l'autobus discusso sopra) in assenza di ogni altra forza (Figura 6.3), quindi per la (6.3) ogni corpo al suo interno sarà soggetto ad una accelerazione uguale ed opposta a quella del riferimento accelerato (l'astronave).

Possiamo concludere che *localmente* (solo *localmente*, altrimenti le linee di forza del campo gravitazionale non sono più esattamente parallele: cioè deve valere altezza dell'ascensore \ll raggio della Terra), la presenza della gravità locale terrestre è del tutto equivalente ad un riferimento che si muova di moto accelerato nello spazio vuoto con accelerazione uguale ed opposta alla locale accelerazione di gravità.

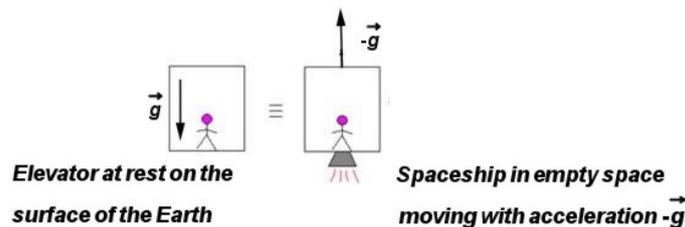


Figura 6.2: "L'ascensore di Einstein" fermo sulla superficie della Terra, in approssimazione di Terra piatta (campo gravitazionale uniforme, linee di forza parallele e uniformi) e astronave in moto accelerato con accelerazione $-\vec{g}$ nello spazio vuoto, lontano ad qualsiasi massa (il moto uniformemente accelerato dell'astronave viene mantenuto dai razzi)

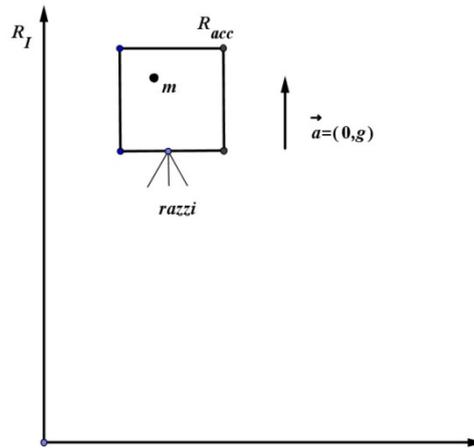


Figura 6.3: Astronave che si muove con accelerazione $\vec{a} = (0, g)$ lontana da ogni corpo celeste. La forza che accelera l'astronave è fornita dai razzi ad essa applicati. Attenzione: i razzi agiscono sulla superficie esterna dell'astronave e *non* sulla massa m al suo interno. Oltre alla forza dei razzi non ci sono altre forze; l'equazione del moto è la (6.3) con $\vec{F} = \vec{0}$.

Consideriamo adesso "l'ascensore di Einstein" in caduta libera sulla superficie della Terra (Figura 6.4) con accelerazione $\vec{g} = (0, -g)$ –per caduta libera si intende un moto governato dalla locale accelerazione di gravità. Si tratta di un riferimento accelerato e la sua accelerazione è quella indicata come \vec{a} nella (6.3). Un corpo di massa m all'interno dell'ascensore è anch'esso soggetto alla locale accelerazione di gravità, dato che è immerso anch'esso nel campo gravitazionale della Terra insieme all'ascensore. Nel riferimento inerziale il corpo m è soggetto quindi alla forza $\vec{F} = m\vec{g}$. L'equazione del moto del corpo m nel riferimento accelerato si scrive (seguendo la (6.3)):

$$m\ddot{r}_{rel} = \vec{F} - m\vec{g} = m\vec{g} - m\vec{g} = \vec{0} \quad (6.4)$$

e ci dice che all'interno dell'ascensore il moto della massa m relativamente all'ascensore stesso è nullo, cioè la forza gravitazionale (alla quale sia l'ascensore che la massa m sono soggetti) non ha alcun effetto dinamico all'interno dell'ascensore stesso.

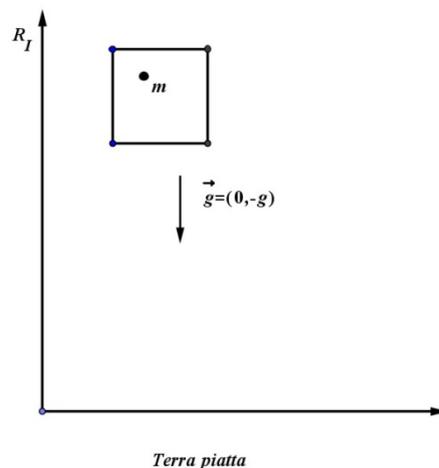


Figura 6.4: “L’ascensore di Einstein” in caduta libera sulla superficie della Terra, in approssimazione di Terra piatta in vicinanza della superficie terrestre (altezza di caduta molto piccola rispetto al raggio terrestre $h \ll R_{\oplus}$, campo gravitazionale uniforme, linee di forza parallele e uniformi; si trascura anche la dipendenza del modulo della accelerazione locale di gravità con l’altezza)

Questo fatto non ci sorprende: visto che nel campo gravitazionale della Terra tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione (Sez 4: principio di equivalenza e universalità della caduta libera) anche l’ascensore di Einstein e la massa m al suo interno cadono allo stesso modo (i.e. con la stessa accelerazione) e quindi –se le loro velocità iniziali sono le stesse– non devono avere nessun moto l’uno rispetto all’altro (Nota: per il moto dell’ascensore ci riferiamo al suo centro di massa e assumiamo che rispetto ad esso l’ascensore inteso come corpo rigido non abbia alcun moto di rotazione). La novità del punto di vista di Einstein sta nel notare che dentro un riferimento in caduta libera (cioè che cade con l’accelerazione di gravitazionale locale) la gravità non ha alcun effetto dinamico.

Quindi per l’osservatore dentro l’ascensore di Einstein è come se la gravità non ci fosse, e quindi è equivalente ad un osservatore che si trovi dentro un’astronave che “galleggia” nello spazio vuoto (cioè che ha velocità nulla rispetto allo spazio fisso). Nessuno dei due osservatori “sente” alcuna forza gravitazionale (il primo perché sta cadendo insieme a tutto il suo laboratorio con l’accelerazione gravitazionale, costante e uniforme –localmente– e quindi non registra alcun moto relativo, il secondo perché si trova nello spazio vuoto dove non ci sono masse e quindi non c’è nessuna forza gravitazionale) e per ogni forza non gravitazionale entrambi usano le stesse leggi fisiche e scrivono quindi le stesse equazioni del moto. Ciò vale in qualunque posizione si trovi l’astronave e a qualsiasi velocità (nulla oppure costante in modulo direzione e verso) essa si muova rispetto allo spazio fisso (Figura 6.5).

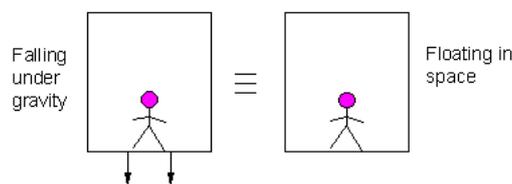


Figura 6.5: “L’ascensore di Einstein” in caduta libera sulla superficie della Terra (stesse approssimazioni di Figura 6.4) è equivalente ad una astronave fissa (o anche in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso) nello spazio vuoto lontana da qualunque massa. I due osservatori non registrano la presenza di alcuna forza gravitazionale e, in presenza di forze non gravitazionali, scriverebbero le stesse leggi fisiche e le stesse equazioni del moto.

Finché l’ascensore non tocca Terra, l’osservatore al suo interno non è in grado di sapere se sta cadendo sulla superficie della Terra oppure invece “galleggia” nello spazio vuoto (lontano da qualsiasi massa) o si muove con vettore velocità costante rispetto ad esso. Quindi, un riferimento in caduta libera in un campo gravitazionale è *localmente* equivalente ad un riferimento inerziale e al suo interno la gravità non ha effetti dinamici.

7. Equazioni del moto in un riferimento rotante

Un riferimento rotante (e.g. attorno all’asse z), anche se a velocità angolare costante non è un riferimento inerziale, e quindi in esso non vale l’equazione fondamentale della dinamica (3.2). Indichiamo con R_I il riferimento inerziale; con R_{rot} il riferimento rotante. Al tempo iniziale i 2 riferimenti coincidono; poi R_{rot} gira attorno all’asse z con velocità angolare $\vec{\omega} = (0,0,\omega)$ rispetto ad R_I . L’equazione fondamentale da

usare è quella che permette di calcolare, per un qualunque vettore \vec{G} del riferimento rotante, la sua derivata temporale rispetto al riferimento inerziale in funzione di quella relativa al riferimento rotante (che indichiamo col pedice *rel*). Vale:

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{G} \quad (7.1)$$

che si spiega a partire dalla rotazione di un piccolo angolo e poi passando al limite. Se applichiamo la (7.1) ad un vettore posizione \vec{r} che sia fisso rispetto al riferimento rotante (e quindi $(d\vec{r}/dt)_{rel} = \vec{0}$) otteniamo:

$$\dot{\vec{r}}_I = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (7.2)$$

che è la ben nota relazione che fornisce la velocità $\dot{\vec{r}}_I \equiv \vec{V}_I$ di rotazione di ogni punto del sistema rotante rispetto al riferimento inerziale (non rotante). In generale, se il corpo si muove anche rispetto al riferimento rotante avremo:

$$\vec{V}_I = \vec{V}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (7.3)$$

Dalla (7.3), derivando rispetto al tempo e usando la (7.1) arriviamo a scrivere l'equazione del moto nel riferimento rotante:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{V}_I}{dt}\right)_I &= \left(\frac{d\vec{V}_I}{dt}\right)_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{V}_I = \left(\frac{d\vec{V}_I}{dt}\right)_{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{V}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \\ &= \left(\frac{d\vec{V}_{rel}}{dt}\right)_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{rel} + (\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Per la (3.2):

$$\left(\frac{d\vec{V}_I}{dt}\right)_I = \frac{\vec{F}}{m} \quad (7.5)$$

dove \vec{F} è la forza presente nel sistema di riferimento inerziale (non rotante). Dalla (7.4), con la (7.5), risulta:

$$m\vec{a}_{rel} = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (7.6)$$

La (7.6) è la legge del moto che vale nel riferimento rotante. Le 2 forze che compaiono in aggiunta alla forza \vec{F} del riferimento inerziale sono la forza di Coriolis (che è non nulla solo se il corpo si muove rispetto al riferimento rotante) e la forza centrifuga. Si chiamano forze inerziali in quanto sono proporzionali alla massa inerziale (come la forza che compare nel riferimento accelerato – vedi la (6.3)).

Deviazione di un proiettile

Immaginiamo per semplicità di fare l'esperimento al polo Nord. Un osservatore spara un proiettile orizzontalmente davanti a sé in una data direzione, per colpire un determinato bersaglio. A causa della forza di Coriolis, qualunque sia la direzione di sparo il proiettile viene deviato alla destra dell'osservatore che spara. L'effetto della gravità locale, che produce il moto parabolico del proiettile illustrato nella Figura 4.2, è irrilevante per la deviazione che stiamo studiando. Non la consideriamo e questo equivale al caso di una gittata molto grande per cui durante il tempo di volo considerato l'effetto della gravità locale è irrilevante.

Trascurando la resistenza dell'aria il proiettile viaggia a velocità costante nella direzione dello sparo (perché in quella direzione non agisce nessuna forza e quindi la quantità di moto si conserva), perciò anche l'accelerazione di Coriolis è costante.

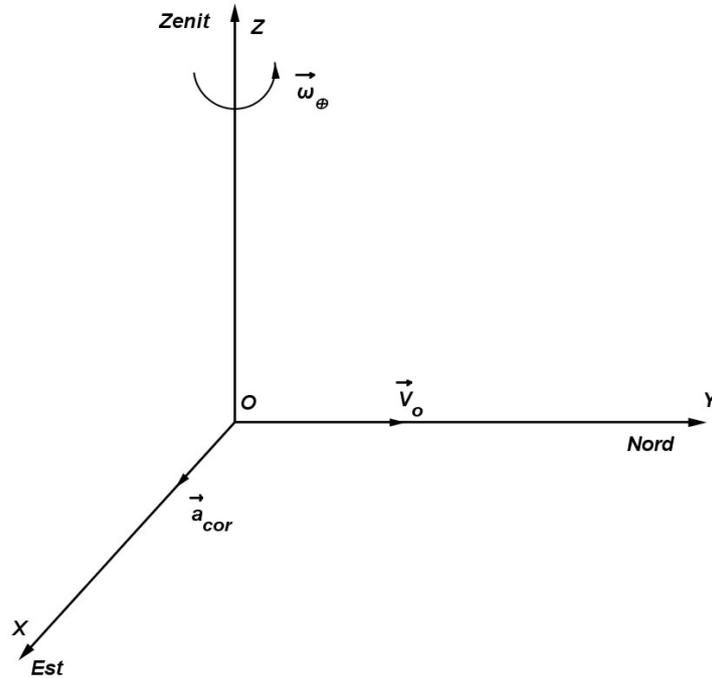


Figura 7.1: L'osservatore si trova al Polo Nord della Terra in rotazione e il proiettile viene sparato in direzione Nord del piano dell'orizzonte. L'accelerazione di Coriolis agisce verso destra rispetto alla direzione del lancio, in questo caso verso Est nel piano dell'orizzonte. Nella direzione del lancio del proiettile non ci sono forze e quindi la sua quantità di moto lineare in quella direzione si conserva. Non consideriamo l'effetto della gravità locale lungo la direzione Z perché non è rilevante ai fini del calcolo della deviazione del proiettile causata dalla accelerazione di Coriolis.

Assumiamo il caso, mostrato in Figura 7.1, in cui il proiettile viene sparato dall'origine verso la direzione Nord del piano dell'orizzonte (le conclusioni che seguono sono generali e non dipendono da questa particolare scelta). L'accelerazione di Coriolis agisce sempre verso destra rispetto alla direzione della velocità di sparo:

$$\vec{a}_{cor} = -2\vec{\omega}_{\oplus} \times \vec{V}_0 = (2\omega_{\oplus}V_0, 0, 0) \quad (7.7)$$

$$\vec{V}(t) = (2\omega_{\oplus}V_0t, V_0, 0) \quad (7.8)$$

L'angolo di deviazione dopo un tempo di volo t_{volo} si calcola come segue:

$$\vec{s}(t) = (\omega_{\oplus}V_0t^2, V_0t, 0) \quad (7.9)$$

Se la durata complessiva del volo è t_{volo} l'angolo di deviazione (verso destra) di cui occorrerà tenere conto se si vuole centrare il target è:

$$\psi_{dev} = \frac{s_X(t_{volo})}{s_Y(t_{volo})} = \frac{\omega_{\oplus}V_0t_{volo}^2}{V_0t_{volo}} = \omega_{\oplus}t_{volo} \quad (7.10)$$

Nell'emisfero Nord il Sole sorge ad Est, culmina a Sud e tramonta da Ovest, quindi nel riferimento di Figura 7.1 basato sui punti cardinali si muove in senso orario; si tratta di un moto apparente, dovuto al fatto che la Terra ruota attorno al suo asse, rispetto alle stelle fisse da Ovest verso Est, cioè in senso antiorario (che è quello convenzionalmente adottato come positivo). Quindi il proiettile (per un dato tempo di volo) viene deviato (rispetto all'osservatore sulla terra) di un angolo uguale ed opposto a quello di cui la Terra ha ruotato rispetto alle stelle fisse nello stesso intervallo di tempo. Ergo, il proiettile rispetto alle stelle fisse NON ha subito alcuna deviazione.

Si noti che nell'emisfero australe il vettore velocità angolare della Terra non cambia ovviamente di verso, perciò se si definiscono i punti cardinali sull'orizzonte come nell'emisfero boreale e l'asse Z perpendicolare al piano dell'orizzonte (quindi diretto come $-\vec{\omega}_{\oplus}$) –che è quello che si fa– si ha che in questa terna il Sole sorge ad Est, culmina a Nord e tramonta ad Ovest.

Cosa succede ad un proiettile sparato da un osservatore al Polo Sud? E all'equatore? E ad una qualunque latitudine?

Nell'emisfero Sud, siccome la terna è definita come nell'emisfero Nord, in questa terna il vettore velocità angolare di rotazione della Terra è negativo (l'asse Z dell'osservatore al Polo Sud punta verso il Polo Sud, mentre il vettore di rotazione della Terra punta sempre verso il Polo Nord), si deduce dalla definizione (7.7) della accelerazione di Coriolis che, per una stessa velocità iniziale \vec{V}_0 essa cambia di segno e quindi l'osservatore che spara il proiettile al Polo Sud dovrà tenere conto –se vorrà colpire il bersaglio– che esso verrà deviato verso sinistra della direzione in cui è stato sparato, non verso destra come accade nell'emisfero Nord.

Per capire cosa succede ad una latitudine intermedia basta tenere conto del fatto che nella solita terna dell'osservatore a latitudine ϑ nell'emisfero boreale il vettore di rotazione della Terra $\vec{\omega}_{\oplus}$ è inclinato sul piano dell'orizzonte dell'osservatore di un angolo pari alla sua latitudine come mostrato in Figura 7.2. Solo la componente di $\vec{\omega}_{\oplus}$ perpendicolare al vettore velocità del proiettile, di modulo $\omega_{\oplus} \sin \vartheta$, contribuirà alla accelerazione di Coriolis (definita nella (7.6)), e quindi nel caso –in tutto analogo al precedente– ma per una generica latitudine $0 < \vartheta < \pi/2$ l'angolo di deviazione dopo un tempo di volo $t_{volò}$ è:

$$\psi_{dev}(\vartheta) = \omega_{\oplus} \sin \vartheta t_{volò} \quad (7.11)$$

che per $\vartheta = \pi/2$, cioè al polo Nord, fornisce il risultato precedente (7.10). Notare che anche in questo caso l'angolo di deviazione è esattamente uguale ed opposto a quello di rotazione del piano dell'orizzonte dell'osservatore sulla superficie della Terra a latitudine ϑ rispetto alle stelle fisse, dato che esso ruota a velocità angolare $\omega_{\oplus} \sin \vartheta$ (solo la componente di $\vec{\omega}_{\oplus}$ perpendicolare al piano dell'orizzonte contribuisce alla sua rotazione).

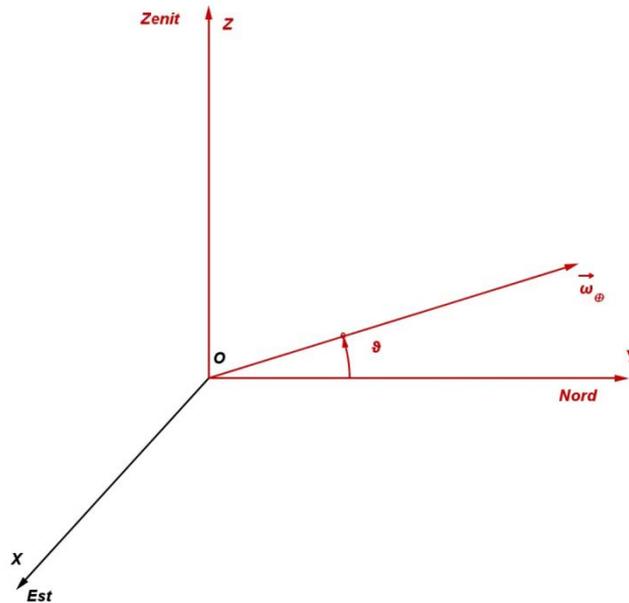


Figura 7.2: Direzione del vettore di rotazione della Terra $\vec{\omega}_{\oplus}$ per un osservatore che si trovi ad una latitudine ϑ nell'emisfero Nord (i vettori in rosso giacciono nello stesso piano Y, Z che è il piano del meridiano dell'osservatore).

Deviazione dei gravi verso Est

Un corpo in caduta da una altezza h sulla superficie della Terra se la Terra fosse perfettamente sferica e non rotante cadrebbe sempre lungo l'asse Z del riferimento dell'osservatore diretta verso il centro della Terra. Siccome la Terra ruota dobbiamo tenere conto della accelerazione di Coriolis.

In questo caso, poiché la velocità del corpo in caduta è perpendicolare al piano dell'orizzonte, la componente di $\vec{\omega}_{\oplus}$ che dà un contributo non nullo alla accelerazione di Coriolis è quella ad essa perpendicolare, cioè $\omega_{\oplus} \cos \vartheta$ (notate la differenza rispetto al caso del proiettile discusso sopra). La deviazione sarà quindi nulla ai poli e massima all'equatore (il contrario appunto del caso del proiettile). L'accelerazione di Coriolis è per definizione perpendicolare al piano individuato da $\vec{\omega}_{\oplus}$ e dal vettore velocità di caduta del grave; questo piano (come si può capire dalla Figura 7.2, è il piano del meridiano dell'osservatore. La deviazione causata dalla accelerazione di Coriolis avverrà dunque lungo l'asse Est-Ovest. Per stabilire se verso Est oppure verso Ovest occorre eseguire correttamente il prodotto vettore che definisce l'accelerazione di Coriolis (vedi la (7.6) nel riferimento non inerziale quale è quello della Terra in rotazione.

Facendo con attenzione il prodotto vettore e ricordando che il vettore $\vec{\omega}_{\oplus}$ non cambia di segno nell'emisfero Sud si vede che anche per un osservatore nell'emisfero Sud la deviazione è verso Est.

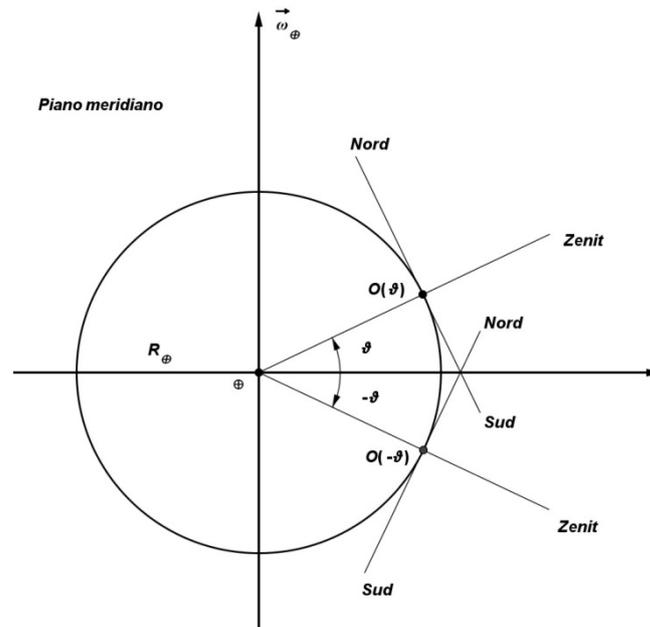


Figura 7.3: Orizzonte di 2 osservatori sulla superficie terrestre alla stessa longitudine, ma con latitudine ϑ opposta (uno nell'emisfero Nord e l'altro nell'emisfero Sud). L'intersezione del piano dell'orizzonte con il piano meridiano (il cerchio massimo –centrato quindi nel centro della Terra– che passa per i poli e per l'osservatore) è la direzione Nord-Sud del piano dell'osservatore (mostrato in Figura 2.9); l'asse perpendicolare al foglio e passante per l'origine $O(\vartheta)$ oppure $O(-\vartheta)$ è quindi l'asse Est-Ovest, con la direzione verso Est uscente dal foglio e quella verso Ovest entrante. Questa figura può essere usata tra l'altro per trovare la direzione della accelerazione di Coriolis e in generale per capire le differenze tra fenomeni nell'emisfero Nord e Sud.

Coriolis ed effetto dei venti sul volo degli aerei

La circolazione globale dei venti alle alte quote (circa 10 km) alle quali viaggiano gli aerei di linea nei voli intercontinentali avviene dall'equatore verso i poli. La velocità non nulla dei venti rispetto al sistema di riferimento rotante con la Terra (e quindi non inerziale) causa la forza di Coriolis (secondo l'equazione del moto (7.6)). Nell'emisfero Nord la forza di Coriolis spinge i venti verso Est e quindi "aiuta" gli aerei quando viaggiano verso Est mentre li ostacola quando vanno verso Ovest, determinando una maggiore o minore durata del volo a seconda che si viaggi in un senso o nell'altro.

La cosa cambia oppure no nell'emisfero australe? Partire dalla Figura (7.3).

Variazione della accelerazione locale di gravità con la latitudine

Ogni corpo sulla superficie della Terra è soggetto, oltre che alla attrazione gravitazionale da parte della Terra, anche alla forza centrifuga dovuta alla sua rotazione diurna. La componente radiale della accelerazione centrifuga fa diminuire l'accelerazione locale totale che si misura (visto che non possiamo fermare la rotazione terrestre). Quindi avremo

$$= g(\vartheta) = g_{polo} \left(1 - \frac{\omega_{\oplus}^2 R_{\oplus}}{g_{polo}} \cos^2 \vartheta \right) \quad (7.12)$$

essendo ϑ la latitudine, $\omega_{\oplus} \simeq 2\pi/(86164 \text{ s})$ la velocità angolare di rotazione della Terra (rispetto alle stelle fisse) e $R_{\oplus} \simeq 6400 \text{ km} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$ il suo raggio, con un massimo ai poli e un minimo all'equatore.

Deflessione del filo a piombo verso Sud

L'accelerazione centrifuga per ogni corpo sulla superficie della Terra in rotazione giace nel piano meridiano dell'osservatore (Figura 7.4) e a latitudine ϑ vale:

$$a_c = \omega_{\oplus}^2 R_{\oplus} \cos\vartheta \quad (7.13)$$

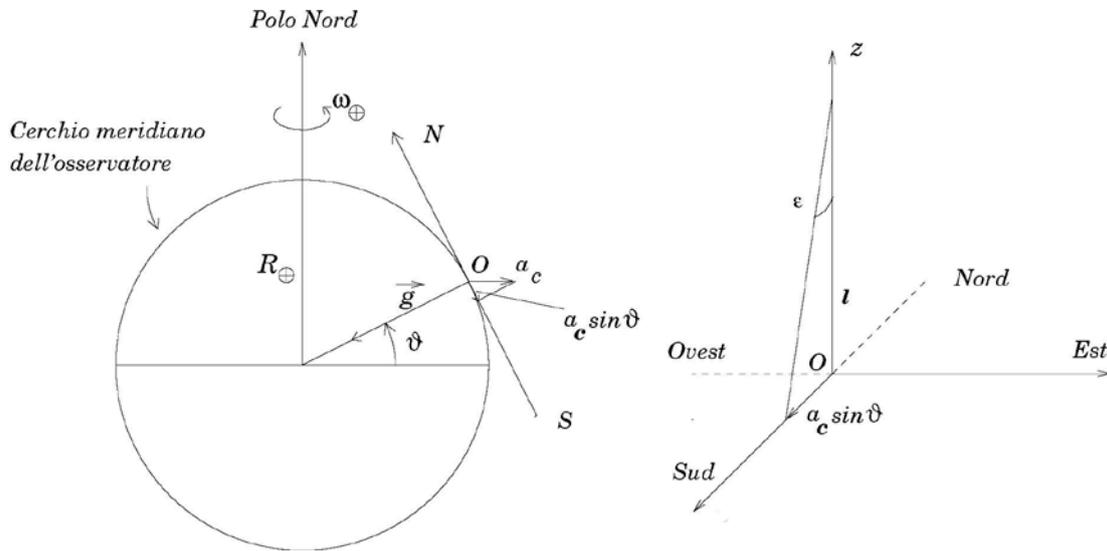


Figura 7.4: Deflessione del filo a piombo verso Sud. Per "filo a piombo" si intende la posizione di equilibrio di un pendolo sulla superficie della Terra in rotazione, che costituisce un riferimento non inerziale nel quale valgono le equazioni del moto (7.6)

La sua componente sul piano orizzontale (i.e il piano dell'orizzonte dell'osservatore) è diretta verso SUD lungo la direzione Nord-Sud del piano dell'orizzonte (in Figura 7.4 è mostrata la proiezione sul piano dell'orizzonte della accelerazione centrifuga \vec{a}_c):

$$a_{cNordSud} = a_c \sin\vartheta = \omega_{\oplus}^2 R_{\oplus} \cos\vartheta \sin\vartheta = \frac{1}{2} \omega_{\oplus}^2 R_{\oplus} \sin 2\vartheta \quad (7.14)$$

Quando il filo a piombo si sposta verso Sud in risposta a quella accelerazione, l'accelerazione locale di gravità che è diretta verso il centro della Terra avrà anche una componente in direzione Sud-Nord, opposta a quella centrifuga e il filo a piombo sarà in equilibrio quando le due si eguaglieranno in modulo (in Figura 7.4 immaginate di disegnare il vettore \vec{g} , diretto verso il centro di massa della Terra, per il punto che rappresenta la proiezione lungo l'asse Nord-Sud della accelerazione centrifuga \vec{a}_c ; si vede subito che in questo caso il vettore \vec{g} ha anche una componente lungo l'asse Nord-Sud diretta da Sud verso Nord). La componente Sud-Nord della accelerazione di gravità è legata all'angolo ϵ di deflessione del filo verso Sud e vale (ϵ è comunque un angolo piccolo):

$$g_{SudNord} = g \sin\epsilon \simeq g\epsilon \quad (7.15)$$

Nella parte destra della Figura 7.4, se non ci fosse l'accelerazione di Coriolis $a_c \sin\vartheta$ il pendolo sarebbe in equilibrio nell'origine, l'angolo ϵ sarebbe nullo e l'accelerazione di gravità \vec{g} non avrebbe alcuna componente sul piano orizzontale. Se invece si tiene conto che il riferimento è non inerziale e c'è l'accelerazione $a_c \sin\vartheta$ (in direzione Nord-Sud) è evidente che c'è una deflessione ϵ e quindi compare al componente (7.15) della accelerazione di gravità in sul piano orizzontale in direzione Sud-Nord.

Il pendolo sarà in equilibrio quando queste due accelerazioni (di uguale direzione e verso opposto) avranno lo stesso modulo. Uguagliando la (7.14) e la (7.15) troviamo l'angolo ε di deviazione verso Sud di un filo a piombo (cioè di un qualunque pendolo) alla latitudine ϑ : il filo a piombo non punta esattamente verso il centro della Terra ma viene deflesso verso Sud dell'angolo

$$\varepsilon \simeq \frac{\omega_{\oplus}^2 R_{\oplus}}{2g} \sin 2\vartheta \quad (7.16)$$

Dato che non possiamo fermare la rotazione della Terra la direzione del filo a piombo definisce operativamente la verticale locale.

Cosa succede per un filo a piombo nell'emisfero australe?

Il pendolo di Foucault

Avendo appurato che all'equilibrio un pendolo sulla superficie della Terra in rotazione viene deviato verso Sud, ci chiediamo se –quando il pendolo è in oscillazione e quindi ha una velocità non nulla rispetto alla Terra– l'accelerazione di Coriolis che ne risulta secondo la (7.6) ha effetti sul suo moto e quali.

Trascuriamo sia la resistenza del mezzo (l'aria) sia altri smorzamenti dovute a perdite di energia, ad esempio per attrito interno al filo di sospensione o nel suo punto di attacco.

Consideriamo il pendolo in oscillazione a partire dalla posizione iniziale di Figura 4.3 (rilasciato con velocità iniziale nulla) e assumiamo di aver scelto come direzione del moto quella da Nord verso Sud. Il piano di oscillazione scelto è quindi il piano Y, Z della Figura 7.2 e non c'è nessuna perdita di generalità in questa scelta: è soltanto comoda. Dopo metà periodo di oscillazione il pendolo si troverà alla estremità opposta (con velocità nulla). Durante questa metà periodo la sua velocità aumenta da zero ad un massimo (nella posizione verticale), e quindi diminuisce fino a tornare a zero; il verso è sempre lo stesso. Il vettore velocità angolare della Terra è diretto come in Figura 7.2 e quindi (secondo la (7.6)) l'accelerazione di Coriolis durante questa metà del periodo orbitale è diretta lungo l'asse Est-Ovest da Est verso Ovest, quindi al termine di questa metà oscillazione il pendolo si troverà a Sud un po' spostato verso Ovest. Durante la seconda metà del periodo di oscillazione il moto sarà identico salvo che la velocità del pendolo cambia di segno, così anche l'accelerazione di Coriolis e alla fine di questa seconda metà di oscillazione il pendolo si troverà a Nord un po' spostato verso Est. Ne deriva che in un periodo di oscillazione completo il piano del pendolo ha compiuto una piccola oscillazione da Est verso Ovest (in senso orario, cioè opposto a quello di rotazione della Terra).

Semplificando le cose e immaginando di essere al polo Nord, si vede che il piano del pendolo compie una rotazione completa da Est verso Ovest esattamente in un giorno (sidereo) della Terra, cioè in un periodo di rotazione della Terra rispetto alle stelle fisse (il problema è analogo a quello del proiettile).

Ad una latitudine ϑ dell'emisfero Nord il piano del pendolo ruota da Est verso Ovest con una velocità angolare $\omega_{\oplus} \sin \vartheta$. Alla latitudine di Parigi $\vartheta_{\text{Parigi}} \simeq 48^{\circ} 50' \simeq (48 + 50/60)^{\circ} \simeq 48.8^{\circ} \simeq 0.85$ rad, dove Foucault fece per la prima volta l'esperimento (Figura 7.6), il piano del pendolo faceva una rotazione completa in un tempo più lungo di un giorno sidereo (cioè del periodo che impiegherebbe al Polo)

$$T_{\text{Foucault}} \simeq \frac{2\pi}{\omega_{\oplus} \sin \vartheta_{\text{Parigi}}} \simeq 1.14 \cdot 10^5 \text{sec} = 1.14 \cdot \frac{10^5}{86164} \text{giorni siderei} = 1.3 \text{giorni siderei} \quad (7.17)$$

Nota: Solo la componente orizzontale della velocità del pendolo contribuisce alla rotazione del suo piano di oscillazione. Quale effetto produce la componente verticale della velocità del pendolo?



Figura 7.6: Il pendolo di Foucault nel Pantheon di Parigi. Siccome l'attrito dell'aria e altre perdite (interne al filo e nel suo punto di attacco) che non abbiamo considerato nella nostra trattazione, smorzerebbero il moto del pendolo ne deduciamo che questo pendolo di Foucault esposto al Pantheon di Parigi deve avere un sistema attivo di rifornimento energetico che ne compensa lo smorzamento.

Moto di satelliti artificiali e pianeti

Il problema dei 2 corpi gravitazionale è definito come il problema di 2 masse puntiformi soggette alla loro mutua attrazione gravitazionale –secondo la legge di Newton della gravitazione universale (4.1)– nello spazio fisico a 3 dimensioni (il sistema è isolato). Il problema è integrabile e si può quindi risolvere analiticamente.

La prima cosa da notare è che la forza di attrazione gravitazionale (4.1) è una forza centrale (cioè diretta lungo la congiungente dei 2 corpi). Questo significa che il *momento della forza*, definito come:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (7.18)$$

dove \vec{F} è la forza che agisce sul corpo la cui posizione è individuata dal vettore posizione \vec{r} , è nullo per una forza centrale come quella gravitazionale (4.1) perché \vec{r} ed \vec{F} nel caso di una forza centrale sono ovviamente parallele, cioè:

$$\vec{M}_{grav} = \vec{r} \times \vec{F}_{grav} = \vec{r} \times \left(-\frac{Gm_1m_2}{r^3} \vec{r} \right) = \vec{0} \quad (7.19)$$

Per la legge fondamentale della dinamica newtoniana (3.7) deduciamo dalla (7.19) che la quantità di moto angolare (il momento angolare) del corpo, cioè il vettore

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (7.20)$$

ha derivata temporale nulla e quindi è costante durante tutto il moto (si dice che è un integrale del moto). Trattandosi di un vettore, essere una costante del moto significa che deve essere costante in direzione modulo e verso. Esso manterrà quindi direzione, modulo e verso iniziali:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}_{grav} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}(t) = \overrightarrow{cost} = \vec{L}(t=0) = \vec{r}_0 \times \vec{p}_0 = m \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 \quad (7.21)$$

dove \vec{r}_0 e \vec{v}_0 sono, rispettivamente i vettori posizione e velocità iniziali del corpo soggetto alla forza gravitazionale. Il momento angolare \vec{L} è quindi un vettore perpendicolare al piano individuato dai vettore posizione e velocità iniziali e quindi, se la sua direzione non cambia nel tempo neppure il piano del moto (individuato dai vettori posizione e velocità) cambia nel tempo. Possiamo scrivere che:

In presenza di forze centrali (come appunto la forza gravitazionale) il moto è sempre piano, il piano del moto è fisso nel tempo durante tutto il moto ed è quindi determinato dalle condizioni iniziali (i vettori posizione e velocità al tempo iniziale fissano il piano del moto). Se ci mettiamo nel piano del moto abbiamo quindi soltanto 2 equazioni del moto da risolvere.

Semplifichiamo ora il problema dei 2 corpi gravitazionale considerando il moto di un *satellite artificiale* intorno alla Terra cioè di un corpo di massa m trascurabile rispetto a quella dell'altro ($m \ll M_\oplus$); il satellite non ha alcuna influenza sul moto della Terra mentre viceversa si muove sotto l'effetto della sua attrazione gravitazionale. Assumiamo inoltre che l'orbita del satellite sia circolare (Figura 7.7).

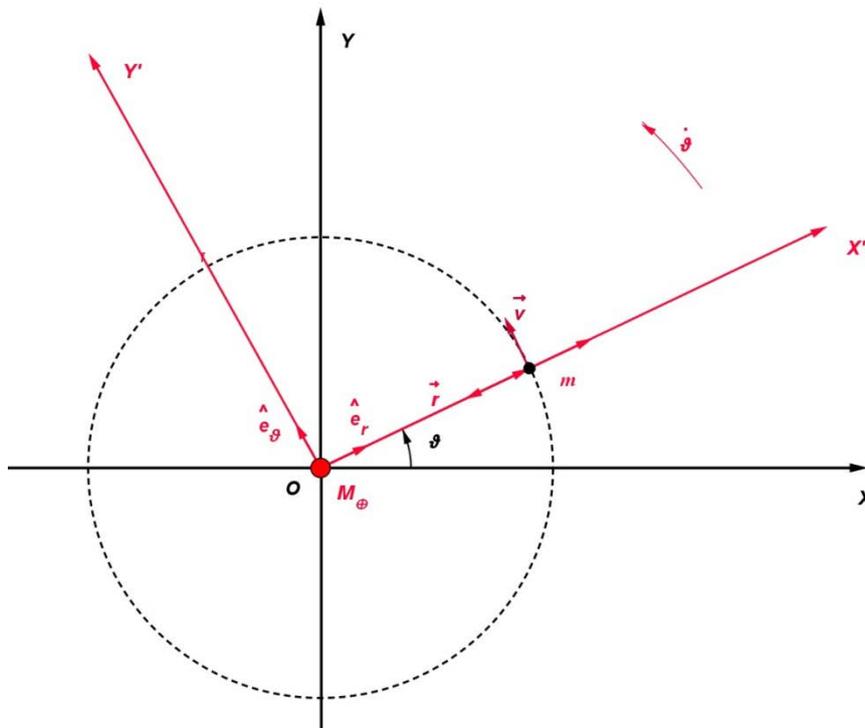


Figura 7.7: Satellite artificiale in orbita attorno alla Terra. Sappiamo che il moto del satellite deve essere piano e che in questo caso la Terra deve stare ferma (perché la massa del satellite è trascurabile). Assumiamo anche che la sua orbita sia circolare. Il piano X, Y è il piano del moto (detto piano orbitale) e il sistema di riferimento OXY è inerziale. Invece il sistema di riferimento $OX'Y'$ che ruota con il satellite con la velocità angolare n è un riferimento non inerziale (il vettore della velocità angolare del satellite, di modulo $\dot{\vartheta}$ è perpendicolare al piano orbitale e di verso uscente verso il lettore). Si dimostra nel testo (vedi la (7.24)) che la velocità angolare orbitale è costante e che anche il modulo della velocità lineare orbitale è costante, come è naturale che sia per la simmetria dell'orbita circolare rispetto alla massa centrale puntiforme.

Scriviamo l'equazione del moto del satellite nel riferimento rotante (non inerziale) e usiamo, come è naturale, coordinate polari piane (Cap. 2) che in questo caso indichiamo con r, ϑ i cui versori $\hat{e}_r, \hat{e}_\vartheta$ (che variano nel tempo con il moto del corpo) sono indicati in Figura 7.7. Il vettore posizione è:

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \quad (7.22)$$

da cui il vettore velocità si ottiene derivando rispetto al tempo e tenendo conto che il versore \hat{e}_r varia nel tempo (si vedano le (2.13), dove si usavano i simboli ρ, φ) e che $\dot{r} = 0$, cioè il modulo del vettore posizione del satellite rispetto alla Terra è costante perché l'orbita è stata assunta circolare:

$$\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r = r\dot{\vartheta}\hat{e}_\vartheta \quad (7.23)$$

(vedi Figura 7.7 per la rappresentazione grafica del vettore velocità orbitale). Con la (7.22) e la (7.23) il vettore momento angolare (7.20), che abbiamo visto essere un integrale del moto, si scrive:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} = mr\hat{e}_r \times r\dot{\vartheta}\hat{e}_\vartheta = mr^2\dot{\vartheta}\hat{e}_z \quad (7.24)$$

dove \hat{e}_z , che è il versore del momento angolare, è perpendicolare al piano del moto di Figura 7.7 (in verso uscente) e non varia nel tempo. Dalla (7.24), poiché il momento angolare è un integrale del moto e l'orbita è circolare (r costante), segue che la velocità angolare orbitale $\dot{\vartheta}$ è una costante, e quindi che anche il modulo v della velocità orbitale \vec{v} (7.23) è costante (si noti che invece la sua direzione identificata dal versore \hat{e}_ϑ varia nel tempo).

L'equazione del moto è la (7.6) dove la forza del riferimento inerziale è quella di attrazione gravitazionale da parte della Terra e la forza di Coriolis è nulla perché nel riferimento rotante con il satellite il satellite è fermo. Scriviamo:

$$m\ddot{\vec{r}}_{rel} = -\frac{GM_\oplus m}{r^2}\hat{e}_r + m\dot{\vartheta}^2 r\hat{e}_r = \vec{0} \quad (7.25)$$

dove l'accelerazione del satellite rispetto al riferimento rotante è ovviamente nulla, visto che è fermo rispetto ad esso. La (7.25) è quindi una equazione scalare nella sola direzione del versore radiale \hat{e}_r e si scrive nella forma:

$$\dot{\vartheta}^2 r^3 = GM_\oplus \quad (7.26)$$

che è la **terza legge di Keplero** scritta nel caso semplificato che stiamo studiando di un satellite di massa trascurabile rispetto alla Terra in orbita circolare di raggio r attorno ad essa con velocità angolare costante $\dot{\vartheta}$: se abbiamo diversi satelliti artificiali su orbite circolari di diverso raggio attorno alla Terra, il rapporto tra il quadrato del periodo orbitale $P = 2\pi/\dot{\vartheta}$ e il cubo del raggio orbitale è una costante (pari al prodotto della costante di gravitazione universale per la massa del corpo centrale, in questo caso quella della Terra).

Dalla velocità orbitale (7.23), usando la terza legge di Keplero per la velocità angolare $\dot{\vartheta}$ possiamo scrivere la velocità orbitale del satellite lungo la sua orbita in funzione del raggio orbitale, e risulta:

$$v = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r}} \quad (7.27)$$

cioè la velocità lineare orbitale di un satellite in orbita circolare intorno alla Terra diminuisce come la radice quadrata del raggio orbitale, quindi, più bassa è l'orbita del satellite più velocemente esso si muove lungo la sua orbita.

Da questo fatto seguono apparenti **“paradossi”**. Consideriamo l’effetto dell’atmosfera residua lungo l’orbita del satellite. Infatti, sebbene la maggior parte della atmosfera terrestre sia confinata nei primi 10 km di altezza dalla superficie, una atmosfera residua di densità vai via più bassa si estende fino a qualche migliaio di chilometri. A tali altezze il satellite orbita nel mezzo atmosferico e subisce una forza (in direzione opposta alla direzione del moto lungo l’orbita) proporzionale al quadrato della sua velocità (cioè alla velocità relativa tra il satellite e le particelle dell’atmosfera) e all’area A della superficie che il satellite oppone al moto relativo delle particelle (la sezione di superficie perpendicolare alla velocità):

$$F_{atmosfera} \simeq \rho A v^2 \text{ kg m sec}^{-2} \quad (7.28)$$

e quindi l’accelerazione che si oppone al moto lungo l’orbita è:

$$a_{atmosfera} \simeq \rho \frac{A}{m} v^2 \text{ m sec}^{-2} \quad (7.29)$$

Questa accelerazione che si oppone al moto farà necessariamente perdere energia al satellite e poiché, come calcoliamo di seguito con la (7.30), essa è negativa e inversamente proporzionale al raggio orbitale, perdere energia significa per il satellite avere una energia più negativa (il cui modulo aumenta) e quindi perdere di quota. Ma per un raggio orbitale minore la velocità orbitale (7.27) aumenta e pertanto –in un apparente paradosso– il satellite che ci si aspetterebbe essere “frenato” dalla resistenza dell’atmosfera residua in realtà viene da essa accelerato.

Quanto vale **l’energia totale del satellite in orbita**? La domanda è importante perché ci dice quanta energia gli deve essere fornita al momento del lancio sulla superficie. L’energia totale è la somma dell’energia cinetica (con la velocità (7.27)) più quella potenziale gravitazionale (nel campo della Terra), per la quale usiamo la (5.11), ricordando che in quel caso era calcolata per unità di massa. Abbiamo quindi per l’energia del satellite artificiale in orbita circolare di raggio r attorno alla Terra:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GM_{\oplus} m}{r} = \frac{1}{2} m \frac{GM_{\oplus}}{r} - \frac{GM_{\oplus} m}{r} = -\frac{GM_{\oplus} m}{2r} \quad (7.30)$$

Si noti che per il satellite in orbita chiusa attorno alla Terra **l’energia totale è negativa**.

Applicando la conservazione dell’energia tra il tempo del lancio del satellite dalla superficie della Terra e un qualunque tempo con il satellite in orbita otteniamo il valore della velocità che il razzo lanciatore deve essere in grado di fornire per mettere il satellite in quell’orbita. Abbiamo:

$$E_{lancio} = E \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_{lancio}^2 - \frac{GM_{\oplus} m}{R_{\oplus}} = -\frac{GM_{\oplus} m}{2r} \Rightarrow v_{lancio} = \sqrt{2GM_{\oplus}} \left(\frac{1}{R_{\oplus}} - \frac{1}{2r} \right) \quad (7.31)$$

Assumendo il caso più semplice di un satellite in orbita molto bassa (tipo lo Sputnik, il primo satellite lanciato dai russi nell’ottobre del 1957), cioè $r = R_{\oplus} + h = R_{\oplus} (1 + h/R_{\oplus}) \simeq R_{\oplus}$ abbiamo:

$$v_{orbita\ bassa} \simeq \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}} \simeq \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{6.4 \cdot 10^6}} \text{ m sec}^{-1} \simeq 7.9 \cdot 10^3 \text{ m sec}^{-1} \\ \simeq 7.9 \text{ km sec}^{-1} \quad (7.32)$$

cioè la velocità da fornire al lancio è quella di un satellite in orbita circolare “raso terra”. Si noti che il valore di v_{lancio} non dipende dalla massa del satellite, ma la sua energia cinetica sì, e il razzo deve essere in grado di fornirla, per questo i russi fecero il primo tentativo con lo Sputnik che pesava solo 82 kg.

E se invece volessimo far sfuggire il satellite dal campo gravitazionale terrestre? Appliciamo la conservazione dell’energia tra il tempo del lancio per far fuggire il satellite e quello in cui il satellite raggiunge una distanza infinita dalla Terra (quindi l’energia potenziale gravitazionale è nulla) e la raggiunge con velocità nulla (e quindi ha energia cinetica nulla). Abbiamo:

$$E_{\text{fuga}} = E_{\infty} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}mv_{\text{fuga}}^2 - \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} = 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\text{fuga}} = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}} \quad (7.33)$$

Il confronto della (7.33) con la (7.32) è sorprendente perché:

$$v_{\text{fuga}} = \sqrt{2} \cdot v_{\text{orbita bassa}} \simeq 1.4 \cdot 7.9 \text{ km sec}^{-1} \simeq 11.2 \text{ km sec}^{-1} \quad (7.34)$$

cioè, per poter sfuggire al campo gravitazionale terrestre (e quindi entrare nel campo gravitazionale del Sole e andare ad esplorare altri pianeti) bastano solo 3.2 km/sec in più dei 7.9 km/sec indispensabili per entrare in orbita bassissima attorno alla Terra. Questo ci dice che il problema principale è uscire dalla “buca” del potenziale di attrazione gravitazionale della Terra; fatto questo, andare molto più lontano è in proporzione piuttosto facile dal punto di vista dell’energia di lancio. Comprendiamo quindi che mettere in orbita una enorme stazione spaziale come la ISS (International Space Station), anche se a soli 350 km da Terra, sia impresa difficile e costosa dal punto di vista del lancio.

Si noti che per esplorare altri pianeti del Sistema Solare con delle sonde artificiali occorre considerare dapprima il sistema Terra-sonda (di massa del tutto trascurabile) e metterla in orbita bassa attorno alla Terra (con la velocità (7.27)); quindi il sistema Terra-Sole-sonda e si usano razzi sufficienti per far uscire la sonda dal campo gravitazionale della Terra (non si deve andare all’infinito, ma ad una distanza sufficiente dalla Terra per cui il campo gravitazionale dominante diventi quello del Sole; occorre fornire circa i 3.2 km/sec calcolati sopra); quindi il sistema Sole-pianeta da visitare-sonda e viaggiare (sempre in base alla gravità) verso di esso; infine il sistema pianeta da visitare-sonda per mettere la sonda in orbita attorno ad esso oppure per discendervi (per alcune manovre occorrerà disporre di razzi).

I risultati ottenuti per il satellite artificiale in orbita circolare attorno alla Terra qui valgono anche nel caso di pianeti di massa trascurabile rispetto al Sole in orbita circolare attorno ad esso; basta sostituire la massa del Sole $M_{\odot} \simeq 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ al posto di quella della Terra $M_{\oplus} \simeq 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. In generale questi risultati valgono per qualsiasi corpo centrale attorno al quale orbitino corpi di massa trascurabile rispetto ad esso su orbite circolari. Abbiamo considerato ciascun problema dei 2 corpi come isolato, cioè l’interazione gravitazionale tra i corpi orbitanti è stata trascurata, il che equivale ad assumere che le orbite dei vari corpi siano abbastanza distanziate l’una dall’altra da rendere le mutue interazioni (la forza gravitazionale decresce col quadrato della distanza relativa) sufficientemente piccole da rendere validi –nelle nostre approssimazioni– i risultati trovati.

Si noti che il caso della Luna in orbita attorno alla Terra –anche trascurando il Sole (cioè considerando il sistema Terra-Luna come isolato) e il fatto che l’orbita lunare non è esattamente circolare– sarebbe

approssimato piuttosto male nella nostra ipotesi di un satellite di massa trascurabile attorno alla Terra perché la massa della Luna è $M_{luna} \simeq 7.35 \cdot 10^{22} \text{ kg} \simeq 1/81 M_{\oplus}$.

Sappiamo che la circonferenza è un caso particolare di ellisse e che, per **la prima legge di Keplero**, le orbite dei pianeti attorno al Sole, sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei 2 fuochi. Lo stesso vale ovviamente per le orbite dei satelliti attorno alla Terra, siano essi la Luna oppure satelliti artificiali messi in orbita dall'uomo, come ad esempio i satelliti geosincroni per la meteorologia e le telecomunicazioni oppure (a quota molto più bassa) la stazione spaziale internazionale.

Per la definizione e le proprietà dell'ellisse si veda la Figura 7.8 e relativa didascalia.

Consideriamo il caso generale di un primario di massa M e un secondario di massa m , entrambi puntiformi. Manteniamo per il momento l'approssimazione $m \ll M$ ma consideriamo il caso in cui l'orbita sia ellittica, non necessariamente circolare. La terza legge di Keplero è analoga alla (7.23) del caso particolare di orbita circolare ma siccome la velocità angolare $\dot{\theta}$ non è più costante lungo l'orbita nella terza legge di Keplero compariranno il suo valore medio, noto come *moto medio* e indicato come $n \equiv \langle \dot{\theta} \rangle = 2\pi/P$ e il semiasse maggiore a dell'ellisse

$$n^2 a^3 = GM_{\oplus} \tag{7.35}$$

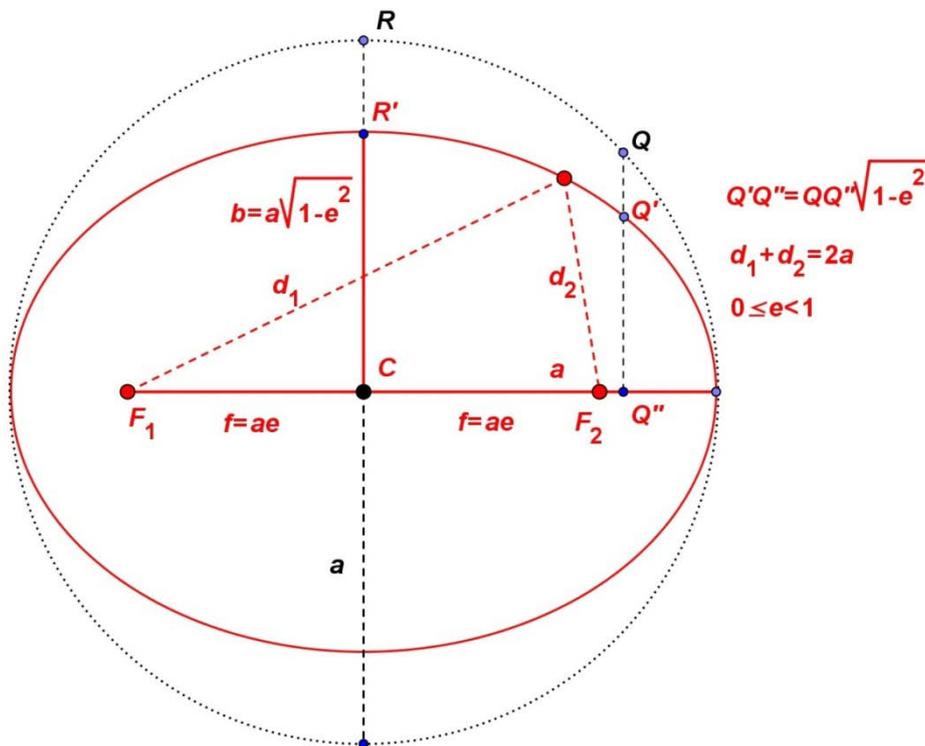


Figura 7.8: Ellisse con fuochi F_1, F_2 , semiasse maggiore a e semiasse minore $b = \sqrt{1 - e^2} a$ dove $0 \leq e < 1$ è l'eccentricità dell'ellisse. Ciascun fuoco dista dal centro di simmetria C dell'ellisse la distanza (detta distanza focale) $f = ae$. L'ellisse è definita come il luogo dei punti la cui distanza dai due fuochi ha somma pari all'asse maggiore: $d_1 + d_2 = 2a$. Si può anche definire a partire dalla circonferenza di raggio pari al semiasse maggiore prendendo ogni punto della circonferenza, proiettandolo sull'asse maggiore dell'ellisse e riducendo la distanza da esso del fattore $\sqrt{1 - e^2}$. Il semiasse maggiore è anche il valor medio del raggio orbitale (la distanza di un punto sull'ellisse dal fuoco): per il fuoco: la distanza del punto rosso sull'ellisse da F_1 varia da un minimo di $a - f = a(1 - e)$ ad un massimo di

$a + f = a(1 + e)$ e pertanto vale in media a (che nel caso dell'orbita circolare è semplicemente il raggio dell'orbita). Si noti che basta dare a, e per definire una ellisse. È anche evidente che se $e = 0$ i due fuochi coincidono col centro di simmetria e l'ellisse coincide con la circonferenza, che è quindi un caso particolare di ellisse. Prendendo un sistema di assi cartesiani x, y centrati in C e diretti lungo i semiassi maggiore e minore rispettivamente, l'ellisse è descritta dall'equazione: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. L'ellisse (incluso il caso particolare della circonferenza) è una conica. Le coniche con $e > 1$ sono iperboli, quelle con $e = 1$ sono parabole, quelle con $0 \leq e < 1$ sono ellissi (circonferenze se $e = 0$).

Il fatto che la velocità angolare non sia costante lungo l'ellisse si esprime anche come la *legge delle aree* (nota anche come **seconda legge di Keplero**): "il vettore posizione di un pianeta attorno al Sole spazza, lungo la sua orbita ellittica, aree uguali in tempi uguali". Questa "legge" è in realtà conseguenza del fatto che il modulo del momento angolare orbitale è un integrale del moto (se il vettore momento angolare \vec{L} è un integrale del moto (vedi la (7.21)), esso deve essere costante in modulo, direzione e verso. Nel caso dell'orbita ellittica il vettore velocità lineare del corpo lungo l'orbita \vec{v} si scrive:

$$\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\vartheta}\hat{e}_\vartheta \quad (7.36)$$

che generalizza la (7.23) in quanto il modulo del raggio vettore posizione lungo l'ellisse non è costante. Tuttavia la componente radiale del vettore velocità non contribuisce al vettore momento angolare:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} = mr\hat{e}_r \times (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\vartheta}\hat{e}_\vartheta) = mr\hat{e}_r \times (r\dot{\vartheta}\hat{e}_\vartheta) = mr^2\dot{\vartheta}\hat{e}_z \quad (7.37)$$

che quindi ha la stessa espressione (7.24) che aveva nel caso dell'orbita circolare, ricordando però che sebbene il modulo di \vec{L} sia costante:

$$L = mr^2\dot{\vartheta} = \text{costante} \quad (7.38)$$

poiché r varia lungo l'orbita ellittica, anche $\dot{\vartheta}$ dovrà variare. La (7.38) ci dice anche di più: $\dot{\vartheta}$ deve variare come l'inverso del quadrato della distanza dal corpo centrale, che comincia ad assomigliare alla legge delle aree di Keplero. Se definiamo la **velocità areolare** del corpo orbitante come l'area spazzata dal suo raggio vettore nell'unità di tempo e ragioniamo come in Figura 7.9 concludiamo che la velocità areolare, essendo proporzionale al momento angolare secondo la relazione:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{L}{m} \quad (7.39)$$

è anch'essa una costante del moto, il che non è altro che la cosiddetta legge delle aree o seconda legge di Keplero enunciata sopra.

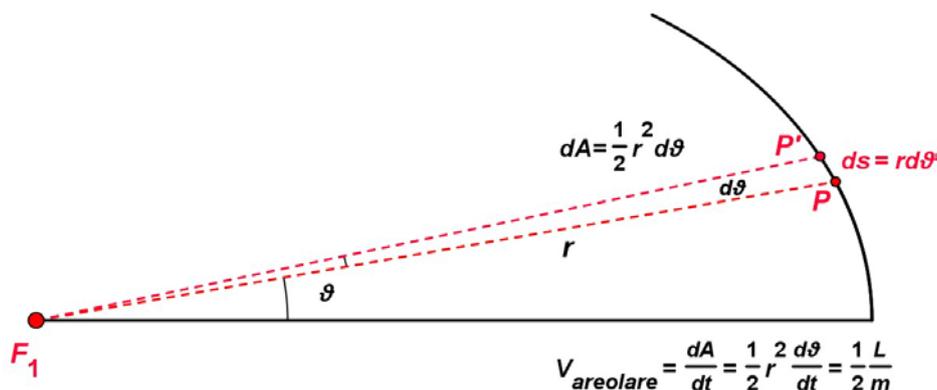


Figura 7.9: Relazione tra velocità areolare e modulo del momento angolare (per unità di massa). La figura mostra un arco dell'ellisse di Figura 7.8, con il corpo che si sposta dal punto P al punto P' percorrendo l'archetto elementare $ds = r d\theta$ dove $d\theta$ è l'angolo elementare spazzato dal raggio vettore \vec{r} durante questo spostamento del corpo. L'area elementare spazzata è quella del triangolo $F_1 P P'$ e quindi vale $dA = (1/2)r \cdot r ds = (1/2)r^2 d\theta$. Derivandola rispetto al tempo otteniamo l'area spazzata nell'unità di tempo, che è appunto la velocità areolare: $dA/dt = (1/2)r^2 \dot{\theta}$. E dal confronto con la (7.38) vediamo che la velocità areolare è, a meno di una costante numerica, il momento angolare orbitale per unità di massa del corpo orbitante, come mostrato in Figura. Quindi, siccome il momento angolare è una costante del moto anche la velocità areolare lo è. Il fatto che l'area spazzata dal raggio vettore sia costante è un altro modo di esprimere la seconda legge di Keplero secondo la quale il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali.

Quanto **all'energia del satellite in orbita**, che nel caso di orbita circolare era data dalla (7.30), nel caso di orbita ellittica contiene il semiasse maggiore (il raggio medio dell'orbita) e si scrive:

$$E = -\frac{GM_{\oplus}m}{2a} \quad (7.40)$$

Consideriamo ora cosa succede nel caso in cui la massa del secondario non sia trascurabile rispetto a quella del primario. Il **centro di massa** del sistema è:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{M\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{M + m} \quad (7.41)$$

dove i vettori \vec{r}_1 ed \vec{r}_2 sono i raggi vettori del primario di massa M e del secondario di massa m . Se mettiamo l'origine nel centro di massa ($\vec{r}_{CM} = \vec{0}$) e definiamo il vettore posizione relativa del corpo m rispetto al corpo M come $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, abbiamo (Figura 7.10):

$$\vec{r}_1 = -\frac{m}{M+m}\vec{r} \quad \vec{r}_2 = \frac{M}{M+m}\vec{r} \quad (7.42)$$

e quindi

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m}{M} \quad (7.43)$$

da cui è evidente che se la massa m è trascurabile rispetto ad M il valore di r_1 va a zero, il centro di massa coincide con la massa M e quindi il moto del secondario si svolge attorno ad essa. In generale, entrambe le masse ruoteranno attorno al comune centro di massa con la stessa velocità angolare come mostrato in Figura 7.10, in orbita circolare o in generale ellittica.

Dalla (7.41), derivando rispetto al tempo abbiamo:

$$\dot{\vec{r}}_{CM} = \frac{M\dot{\vec{r}}_1 + m\dot{\vec{r}}_2}{M+m} = \overrightarrow{\text{costante}} \quad (7.44)$$

perché il sistema è isolato, non ci sono forze esterne che agiscano su di esso e quindi il centro di massa deve avere velocità (e quantità di moto lineare) costanti. Se poi, come nel nostro caso (e come in Figura 7.10) mettiamo l'origine degli assi nel centro di massa:

$$\dot{\vec{r}}_{CM} = \vec{0} \Rightarrow M\dot{\vec{r}}_1 + m\dot{\vec{r}}_2 = \vec{0}, \quad M\dot{\vec{r}}_1 = -m\dot{\vec{r}}_2 \quad (7.45)$$

da cui vediamo che le quantità di moto dei due corpi mentre orbitano al centro di massa sono sempre uguali in modulo e antiparallele; le velocità sono anch'esse antiparallele e in rapporto fisso pari al rapporto inverso tra le masse (il corpo più massiccio gira più piano e quello meno massiccio più veloce). È intuitivo che le ellissi percorse dai due corpi abbiano la stessa eccentricità.

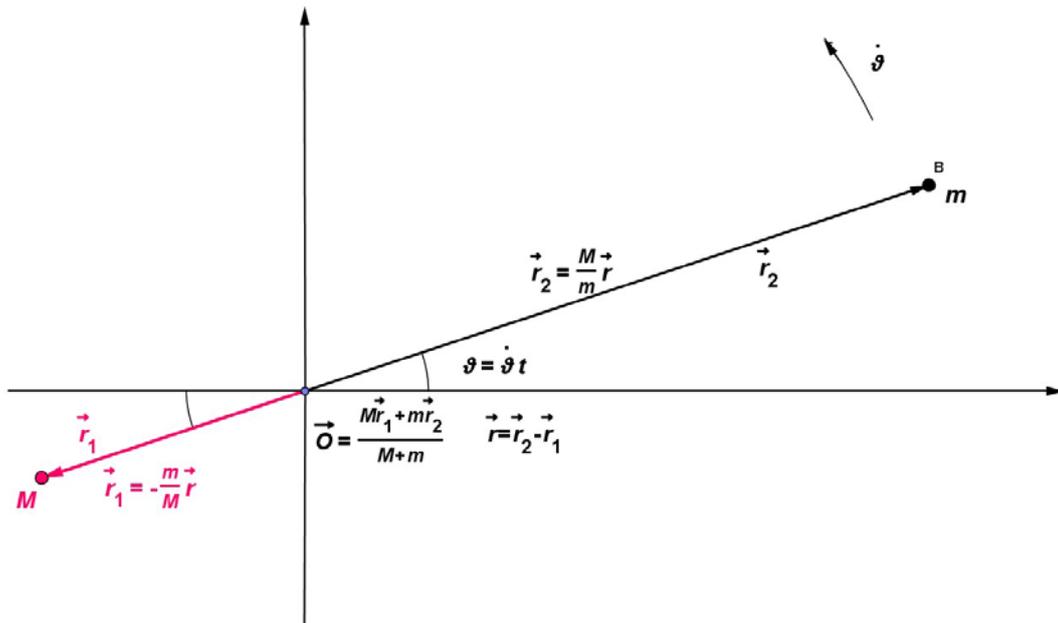


Figura 7.10: Due corpi (puntiformi) di massa M ed m , soggetti alla loro mutua interazione gravitazionale, separati dal vettore \vec{r} (con piede in M e testa in m) e con il centro di massa nell'origine degli assi. In questo sistema i vettori posizione di ciascun corpo si scrivono come in Figura e il rapporto tra i loro moduli è uguale al rapporto inverso delle masse: $r_1/r_2 = m/M$. Entrambe le masse ruotano attorno al comune centro di massa la cui quantità di moto si conserva (perché il sistema è isolato. Avendo messo l'origine nel centro di massa questa quantità di moto è nulla e quindi (per le (7.45)) i vettori velocità dei due corpi sono sempre opposti l'uno all'altro e il loro rapporto sempre uguale al rapporto inverso delle masse.

La terza legge di Keplero varrà, invece che nella forma (7.35), nella forma più generale:

$$n^2 a^3 = G(M + m) \quad (7.46)$$

in cui la costante di gravitazione universale risulta moltiplicata per la massa totale dei due corpi (non soltanto per la massa del primario). In questa forma non era in effetti nota neppure a Keplero, il quale trascurava la massa dei pianeti rispetto al Sole (anche nel caso di Giove) e quindi trovava che il rapporto tra il cubo dei semiassi maggiori e il quadrato dei periodi era GM_\odot e pertanto aveva lo stesso valore per tutti i pianeti.

Quando si tratta il moto di due corpi, e può risultare difficile visualizzare il loro moto contemporaneamente, è molto utile introdurre il **concetto di massa ridotta** \mathcal{M} definita come il prodotto diviso per la somma delle masse dei due corpi:

$$\mathcal{M} = \frac{Mm}{M + m} \quad (7.47)$$

Usiamo la massa ridotta per descrivere il moto dei due corpi attorno al comune centro di massa al moto di un solo corpo (Figura 7.11).

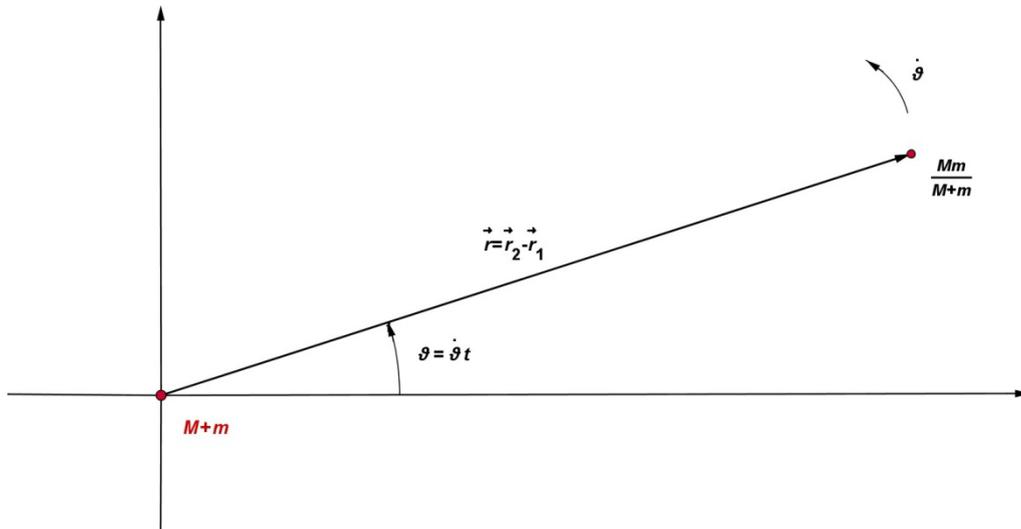


Figura 7.11: Il sistema a due corpi di Figura 7.10 è stato ridotto ad un solo corpo usando la massa ridotta $\mathcal{M} = Mm/(M + m)$. Nell'origine si trova (fissa) la massa totale del sistema $M_{totale} = M + m$ mentre la massa ridotta \mathcal{M} , con raggio vettore pari al vettore posizione relativa della massa m rispetto alla massa M , $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, ruota attorno ad essa con la velocità angolare istantanea $\dot{\vartheta}$ (come in Figura 7.10).

Nel caso $m \ll M$ la massa ridotta coincide con la massa del secondario:

$$\mathcal{M} = \frac{Mm}{M(1 + m/M)} = \frac{m}{1 + m/M} \simeq m \quad (7.48)$$

quindi, la massa ridotta del sistema Terra-satellite artificiale è la massa del satellite artificiale, il cui moto abbiamo visto essere facile da descrivere perché avviene attorno alla Terra fissa.

Se consideriamo l'energia totale del sistema data dalla (7.40), e la riscriviamo usando la massa ridotta (7.47), abbiamo:

$$E = -\frac{G\mathcal{M}M_{totale}}{2a} \quad (7.49)$$

che è appunto l'energia del sistema di Figura 7.11 dove le due masse sono la massa ridotta $\mathcal{M} = Mm/(M + m)$ e la massa totale $M_{totale} = (M + m)$ il cui prodotto Mm compariva nell'energia (7.47) del sistema di due corpi.

8. Dinamica del corpo rigido

Si consideri un corpo di massa totale M formato da N particelle ciascuna di massa m_i con $i = 1, \dots, N$. Il corpo si dice rigido se le distanze mutue tra tutte le particelle che lo compongono sono fisse. Per semplicità ci riferiamo a corpi rigidi formati da un numero finito di particelle discrete, eseguendo sommatorie sull'indice $i = 1, \dots, N$. Per corpi rigidi continui la sommatoria verrà sostituita da opportuni integrali.

Gradi di libertà

N particelle indipendenti in \mathbb{R}^3 hanno $3N$ gradi di libertà (per individuare univocamente la posizione di ogni particella in \mathbb{R}^3 occorrono 3 coordinate. Se però ognuna di esse è vincolata rigidamente a tutte le altre, la posizione del corpo rigido è fissata quando siano fissati 3 suoi punti purché non allineati: fissati 3 punti non allineati il corpo non ha più alcuna possibilità di muoversi e ogni altro suo punto è fissato rispetto ai 3 dati. Si parla infatti di triangolazione: ad esempio, la posizione di un punto sulla superficie della Terra è determinata col metodo GPS (Global Positioning System) rispetto a 3 satelliti del sistema GPS la cui posizione è misurata istante per istante con metodi di inseguimento da apposite stazioni di Terra; se nel punto di interesse si trova un ricevitore GPS, dal segnale dei 3 satelliti che forniscono la propria posizione esso può calcolare la posizione sulla Terra in cui si trova.

Per fissare 3 punti di un corpo rigido vi vogliono 6 numeri: 3 per il primo punto, 2 per il secondo (perché la distanza dal primo è fissata), 1 per il terzo punto perché le sue distanze dal primo e dal secondo sono fissate. Geometricamente possiamo dire che, una volta fissato il primo punto P_1 (date le sue 3 coordinate), il secondo P_2 deve trovarsi ad una distanza fissa da P_1 , e quindi deve stare sulla superficie della sfera centrata in P_1 (e quindi per individuarlo bastano 2 coordinate), il terzo P_3 deve trovarsi a distanza fissata sia da P_1 che da P_2 , e quindi anche dal segmento $\overline{P_1P_2}$, e cioè su una circonferenza, per cui basta una sola coordinata per individuarne univocamente la posizione. È chiaro che se P_3 si trovasse lungo la retta che passa per P_1 e P_2 non servirebbe a fissare la posizione del corpo rigido, perché esso potrebbe ancora ruotare lungo la retta passante per i 3 punti allineati.

È dimostrato quindi che un corpo rigido ha 6 gradi di libertà.

Angoli di Eulero e rotazioni nel piano

Riferiamo il corpo rigido ad un sistema di riferimento inerziale. Sia \vec{r}_i $i = 1, \dots, N$ il vettore posizione della corrispondente particella di massa m_i rispetto al riferimento inerziale scelto. Il centro di massa del corpo rigido sarà individuato in questo riferimento dal raggio vettore:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad M = \sum_i m_i \quad (8.1)$$

dove la sommatoria si intende estesa su $i = 1, \dots, N$. In assenza di forze esterne applicate al centro di massa del corpo sarà, per la (3.2):

$$M \dot{\vec{r}}_{CM} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \overrightarrow{\text{costante}} \quad (8.2)$$

cioè la quantità di moto lineare del corpo si conserva. Traslando rigidamente il sistema di riferimento inerziale in modo che la sua origine coincida con il centro di massa del corpo rigido il moto rettilineo uniforme (8.2) si annulla eliminando 3 dei 6 gradi di libertà del corpo, che resterà libero soltanto di ruotare attorno al suo centro di massa.

Qualunque sia il moto di rotazione del corpo rigido attorno al centro di massa, in ogni istante il suo stato rispetto al riferimento inerziale centrato nel suo centro di massa (per un satellite artificiale si parla di *assetto del satellite*) è noto dati i 3 **angoli di Eulero** (Figura 8.1).

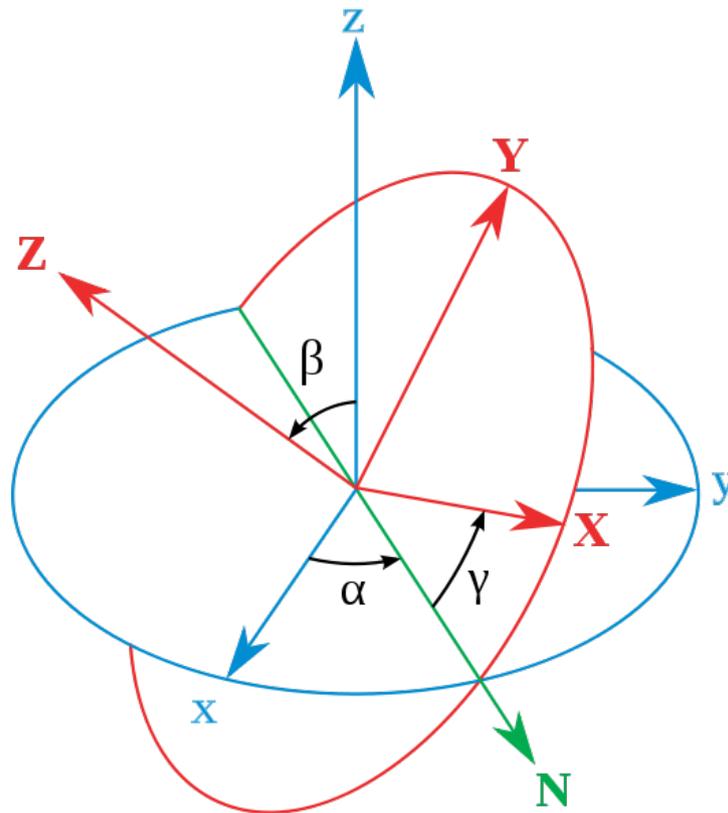


Figura 8.1: I 3 angoli α, β, γ – noti come *angoli di Eulero*– identificano univocamente la posizione del **corpo rigido** solidale con il sistema di riferimento disegnato in **rosso** rispetto al **sistema di riferimento inerziale** disegnato in **azzurro**. L'origine degli assi coincide con il centro di massa del corpo rigido. La linea N disegnata in verde è la linea di intersezione tra il piano X, Y del corpo e il piano x, y del riferimento inerziale e si chiama *linea dei nodi*. In ogni istante la posizione del **corpo rigido** rispetto al **riferimento inerziale** è nota dati i valori in quell'istante degli angoli di Eulero α, β, γ .

Si può passare dal riferimento inerziale a quello solidale con il corpo rigido con 3 rotazioni, ciascuna in senso antiorario, dei 3 angoli di Eulero (Figura 8.1): la prima rotazione di un angolo α attorno all'asse z del **riferimento inerziale**; la seconda rotazione di un angolo β attorno alla **linea dei nodi N** ; la terza rotazione di un angolo γ attorno all'asse Z del **riferimento solidale con il corpo rigido**. Viceversa, volendo passare dal riferimento solidale con il corpo a quello inerziale basta eseguire le 3 rotazioni in sequenza invertita (terza, seconda, prima) e in senso orario, quindi con gli angoli cambiati di segno $(-\gamma, -\beta, -\alpha)$ per la convenzione sui segni degli angoli.

Ciascuna di esse è una rotazione del piano come in (Figura 8.2) dove il passaggio dagli assi coordinati (x, y) a quelli (x', y') è dato dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta \\ y' = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta \end{cases} \quad (8.3)$$

che si può più semplicemente scrivere in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

dove il prodotto si esegue riga-per-colonna (così dalla (8.4) si ottengono le (8.3)). Notare che la riga e la colonna devono avere lo stesso numero di elementi, in questo caso 2. Per eseguire la rotazione correttamente è importante il segno meno davanti al seno dell'angolo di rotazione: cambiando verso di rotazione l'angolo cambia segno (positivo per la rotazione in verso antiorario, negativo per la rotazione in senso orario) e quindi il seno cambia segno (a differenza del coseno).

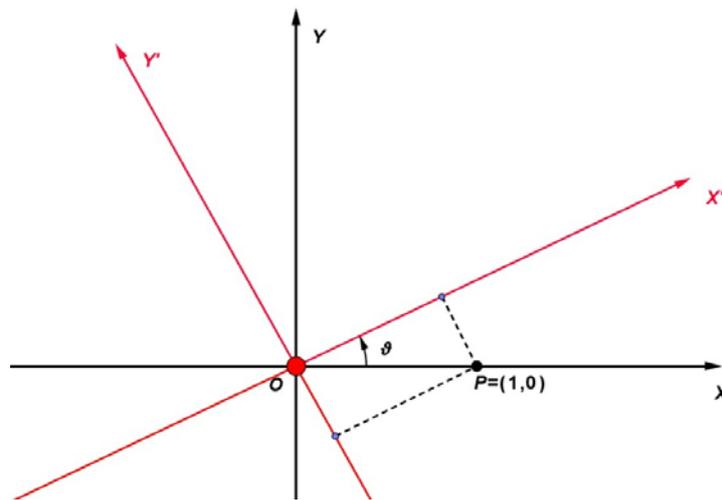


Figura 8.2: Nel piano del foglio si passa dal sistema (x, y) al sistema (x', y') ruotato rispetto ad esso di un angolo ϑ in senso antiorario. I punti (vettori) del piano restano fissi. Ciascun punto può essere scritto dando le sue coordinate sia rispetto agli assi fissi che a quelli ruotati. Si chiede di scrivere le relazioni che permettono di passare dalle une alle altre.

Per verificare che le (8.3), (8.4) rappresentino correttamente la rotazione disegnata in Figura 8.2 facciamo il calcolo nel caso particolare in cui il punto di cui si vogliono scrivere le coordinate nel sistema sia $P = (1, 0)$. Come mostrato in Figura, nel riferimento ruotato (x', y') le coordinate dello stesso punto (cioè, sono gli assi che ruotano mentre il punto rimane fisso) sono $P = (\cos \vartheta, -\sin \vartheta)$ come in effetti ci danno le relazioni che abbiamo scritto.

È importante stabilire se in problema dato si ruotano gli assi e i punti (vettori) restano fissi, oppure viceversa. Nel primo caso vogliamo sapere come le coordinate dello stesso punto (vettore) si scrivono nei due sistemi di riferimento; nel secondo caso vogliamo lasciare fisso il sistema di riferimento, ruotare fisicamente il vettore e scrivere le coordinate del vettore ruotato rispetto allo stesso sistema di assi. Si tratta di capire il problema che si sta affrontando. La differenza sta solo nel segno di ϑ e quindi di $\sin \vartheta$ nelle (8.3), (8.4).

Le (8.3), (8.4) ci permettono di passare dalle coordinate di ogni punto nel riferimento fisso a quelle dello stesso punto nel riferimento ruotato. Viceversa, possiamo scrivere il passaggio dalle coordinate nel riferimento ruotato a quelle nel riferimento fisso spostando solo il segno meno:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

Energia cinetica di rotazione, momento angolare e momento di inerzia di un corpo rigido

Nel seguito useremo spesso le seguenti relazioni tra vettori.

Per il prodotto **scalare** tra 2 vettori di cui uno è a sua volta il risultato del prodotto vettore di 2 vettori vale:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (R8.1)$$

cioè si possono ruotare ciclicamente i vettori mantenendo fissi i simboli prodotto scalare e prodotto vettore. Notare che si è un numero, non di un vettore.

Per il prodotto **vettore** tra 2 vettori di cui uno è a sua volta il risultato del prodotto vettore di 2 vettori vale:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (R8.2)$$

In questo caso si tratta di un vettore e non di uno scalare.

Consideriamo un sistema di riferimento inerziale con origine degli assi nel centro di massa del corpo rigido. Ogni particella del corpo ha massa m_i con $i = 1, \dots, N$ e raggio vettore posizione \vec{r}_i e il corpo ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ attorno all'origine-centro di massa. Non c'è alcun moto di traslazione. L'energia cinetica di rotazione è:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \quad (8.6)$$

Il vettore velocità $\dot{\vec{r}}_i$ rispetto al riferimento inerziale si scrive (vedi la (7.2)):

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \quad (8.7)$$

da cui:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_i m_i \cdot (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} \quad (8.8)$$

dove

$$\vec{L} = \sum_i m_i \cdot (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) \quad (8.9)$$

è il vettore del momento angolare del corpo, ottenuto come somma del momento angolare di tutte le particelle che lo compongono, che possiamo scrivere come:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \cdot (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) = \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i (\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)) \quad (8.10)$$

Se \hat{n} è il versore che indica la direzione del vettore velocità angolare del corpo scriviamo:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{n} \quad (8.11)$$

e usando la (8.10) nella (8.8) otteniamo:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \omega^2 \left(\sum_i m_i (r_i^2 - (\hat{n} \cdot \vec{r}_i)^2) \right) \quad (8.12)$$

Definiamo la grandezza tra parentesi (che ha le dimensioni fisiche [$kg \ m^2$]) come:

$$I_{\hat{n}} = \sum_i m_i (r_i^2 - (\hat{n} \cdot \vec{r}_i)^2) \quad (8.13)$$

e la chiamiamo **momento di inerzia del corpo rispetto all'asse \hat{n}** . Si ha:

$$T = \frac{1}{2} I_{\hat{n}} \omega^2 \quad (8.14)$$

cioè, l'energia cinetica di rotazione di un corpo rigido che ruoti con velocità angolare ω è 1/2 per la velocità angolare al quadrato per il momento di inerzia del corpo rispetto alla direzione del vettore di rotazione.

Il momento di inerzia di una massa m rispetto ad un asse \hat{n} è definito in Fisica come il prodotto della massa per la distanza minima al quadrato da quell'asse, che si scrive –vedi Figura 2.4:

$$I_{\hat{n}} = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \hat{n}) \cdot (\vec{r}_i \times \hat{n}) \quad (8.15)$$

La (8.15) e la (8.13) sono uguali. Per dimostrarlo definiamo un vettore ausiliario $\vec{p} = \vec{r}_i \times \hat{n}$ e usiamo le (R8.1), (R8.2):

$$\begin{aligned} I_{\hat{n}} &= \sum_i m_i \vec{p} \cdot (\vec{r}_i \times \hat{n}) = \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{p}) = \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot (\hat{n} \times (\vec{r}_i \times \hat{n})) = \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot (\vec{r}_i - \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{r}_i)) \\ &= \sum_i m_i (r_i^2 - (\hat{n} \cdot \vec{r}_i)^2) \end{aligned} \quad (8.16)$$

Torniamo al momento angolare nella forma (8.10). Se ne scriviamo le 3 componenti abbiamo 3 relazioni lineari con le 3 componenti del vettore velocità angolare:

$$\begin{cases} L_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\ L_y = I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \\ L_z = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z \end{cases} \quad (8.17)$$

essendo:

$$I_{xx} = \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) \quad I_{yy} = \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) \quad I_{zz} = \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2) \quad (8.18)$$

$$I_{xy} = - \sum_i m_i x_i y_i \quad I_{xz} = - \sum_i m_i x_i z_i \quad I_{yz} = - \sum_i m_i y_i z_i \quad (8.19)$$

Dalle (8.19) si nota che:

$$I_{xy} = I_{yx} \quad I_{xz} = I_{zx} \quad I_{yz} = I_{zy} \quad (8.20)$$

Possiamo scrivere le (8.17) come prodotto di matrici (analogamente alle (8.4) nel caso di 2 equazioni):

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \mathbb{I} \vec{\omega} \quad (8.21)$$

dove con il simbolo \mathbb{I} abbiamo indicato la matrice:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (8.22)$$

le cui componenti hanno tutte le dimensioni di un momento di inerzia e che viene anche chiamato tensore d'inerzia del corpo. Come si vede dalle (8.18), (8.19) le sue componenti coinvolgono le coordinate (oltre alle masse) di tutte le particelle che compongono il corpo rigido, ed esprimono quindi proprietà specifiche del corpo. È naturale perciò scrivere le coordinate in un riferimento fisso con il corpo, in modo che non varino nel tempo e che gli elementi della matrice (8.22) siano tutti costanti.

La matrice (8.22) ha 9 componenti ma soltanto 6 sono indipendenti (per le relazioni (8.19)). In questo caso si può dimostrare che è sempre possibile trovare un sistema di assi cartesiani rispetto ai quali gli elementi fuori diagonale siano nulli e la matrice si riduca alla forma diagonale:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (8.23)$$

Da un punto di vista fisico questo significa scegliere come sistema di assi solidali con il corpo i suoi assi principali di inerzia (in modo da rispettarne le simmetrie). I coefficienti I_1, I_2, I_3 sono dati dalle (8.18) ma con le coordinate riferite agli assi principali di inerzia del corpo, e si chiamano infatti momenti principali di inerzia del corpo. Dalle (8.18), scritte nel sistema degli assi principali di inerzia x, y, z e ricordando che $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ si ha:

$$I_1 = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) \quad I_2 = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) \quad I_3 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (8.24)$$

cioè, essendo $(y_i^2 + z_i^2)$ la distanza minima della particella i -esima dall'asse x , $(z_i^2 + x_i^2)$ la sua distanza minima dall'asse y e $(x_i^2 + y_i^2)$ la sua distanza minima dall'asse z si vede che i momenti principali

di inerzia (8.24) non sono altro che i momenti di inerzia del corpo rispetto a questi assi secondo la definizione classica (8.15).

Una volta individuati gli assi principali di inerzia del corpo, la (8.21) con la (8.23) ci da:

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \omega_x \\ I_2 \omega_y \\ I_3 \omega_z \end{pmatrix} \quad (8.25)$$

e per l'energia cinetica di rotazione, dalla (8.12) abbiamo (usando le (8.25)):

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} I_1 \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_z^2 \quad (8.26)$$

che la esprime come somma dell'energia cinetica di rotazione attorno a ciascuno dei 3 assi principali di inerzia del corpo. Ad esempio, se consideriamo la Terra come uno sferoide oblato in rotazione attorno all'asse z con velocità angolare ω e chiamiamo I_3 il suo momento d'inerzia rispetto a questo asse, abbiamo:

$$\vec{L} = (0, 0, I_3 \omega) \quad T = \frac{1}{2} I_3 \omega^2 \quad (8.27)$$

È utile scrivere la componente del vettore momento angolare \vec{L} di un corpo rigido che ruota con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega \hat{n}$ lungo la direzione del vettore velocità angolare (indicata dal versore \hat{n}). Dalla (8.10) abbiamo:

$$\begin{aligned} L_{\hat{n}} = \vec{L} \cdot \hat{n} &= \hat{n} \cdot \sum_i m_i (\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)) = \omega \hat{n} \cdot \sum_i m_i (\hat{n} r_i^2 - \vec{r}_i (\hat{n} \cdot \vec{r}_i)) = \\ &= \omega \sum_i m_i (r_i^2 - (\hat{n} \cdot \vec{r}_i)^2) \end{aligned} \quad (8.28)$$

che per la (8.16) si scrive:

$$L_{\hat{n}} = I_{\hat{n}} \omega \quad (8.29)$$

Dimostriamo ora una relazione importante tra il momento di inerzia di un corpo rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa e quello rispetto ad un asse parallelo al primo ma passante per un punto generico. Sia a l'asse passante per un generico punto P del corpo e b quello ad esso parallelo passante per il centro di massa CM . Prendiamo un sistema di assi cartesiani solidali col corpo con origine in P . In esso scriviamo il momento di inerzia rispetto all'asse a (come dalla definizione (8.15))

$$I_a = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \hat{n}_a)^2 \quad (8.30)$$

In questo riferimento il centro di massa è individuato dal vettore \vec{r}_{CM} (definito come nella (8.1)):

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Se chiamo \vec{r}_i' il vettore posizione della particella i -esima rispetto al centro di massa, per la somma dei vettori con la regola del parallelogramma vale:

$$\vec{r}'_i + \vec{r}_{CM} = \vec{r}_i \quad (8.31)$$

Allora la (8.30) si può scrivere come:

$$\begin{aligned} I_a &= \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \hat{n}_a)^2 = \sum_i m_i [(\vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}) \times \hat{n}_a]^2 \\ &= \sum_i m_i (\vec{r}'_i \times \hat{n}_a)^2 + (\vec{r}_{CM} \times \hat{n}_a)^2 \sum_i m_i \\ &\quad + 2(\vec{r}_{CM} \times \hat{n}_a) \sum_i m_i (\vec{r}'_i \times \hat{n}_a) = I_b + M (\vec{r}_{CM} \times \hat{n}_a)^2 - 2(\vec{r}_{CM} \times \hat{n}_a) \left(\hat{n}_a \times \sum_i m_i \vec{r}'_i \right) \\ &= I_b + M (\vec{r}_{CM} \times \hat{n}_a)^2 \end{aligned} \quad (8.32)$$

Infatti:

$$\sum_i m_i \vec{r}'_i = \vec{0} \quad (8.33)$$

perché le \vec{r}'_i sono riferite al centro di massa e in questo riferimento le coordinate del centro di massa sono tutte nulle.

La relazione (8.32) è nota anche come teorema di Huygens-Steiner.

Calcoliamo il momento di inerzia in alcuni casi di interesse generale.

Consideriamo un cilindro con raggio di base R , altezza h e densità di massa costante ρ (massa per unità di volume). La massa del cilindro è:

$$M = \text{densità} \cdot \text{volume} = \rho (\pi R^2 h) \quad (8.34)$$

Il momento d'inerzia del cilindro rispetto al suo asse di simmetria è

$$I_{\text{cilindro asse simmetria}} = \int_0^R (2\pi r \rho h) dr r^2 = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi h \rho (R^4/4) = MR^2/2 \quad (8.35)$$

che vale anche per un disco piatto (rispetto al suo asse di simmetria, cioè l'asse passante per il centro di massa e perpendicolare al piano del disco), che è il caso particolare di un cilindro con $h \ll R$.

Per un disco molto sottile il momento d'inerzia si può calcolare in modo più semplice assumendo di conoscere la densità di massa superficiale σ (che ha le dimensioni $[\sigma] = [kg m^{-2}]$). In questo caso (vedi Figura 8.3) si ha:

$$I_{\text{disco sottile asse perp}} = \int_0^R \sigma (2\pi r dr) r^2 = 2\pi \sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi \sigma R^4/4 = (\sigma \pi R^2) R^2/2 = MR^2/2 \quad (8.36)$$

da cui si vede che ritroviamo il risultato (8.35), come era da aspettarsi perché un disco sottile di raggio R è anche un cilindro con raggio di base R ed altezza trascurabile rispetto ad esso.

Per lo stesso disco sottile calcoliamo ora il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa ma giacente nel piano del disco (Figura 8.4). Consideriamo l'elemento di massa suggerito in Figura:

$$dm = \sigma(r d\vartheta) dr \tag{8.37}$$

la cui distanza minima dall'asse rispetto al quale stiamo calcolando il momento d'inerzia è $r \sin \vartheta$. Quindi:

$$I_{\text{disco sottile asse piano disco}} = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta = \frac{\sigma R^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta = (\pi) \left(\frac{\sigma R^4}{4} \right) = (\sigma \pi R^2) R^2 / 4 = MR^2 / 4 \tag{8.38}$$

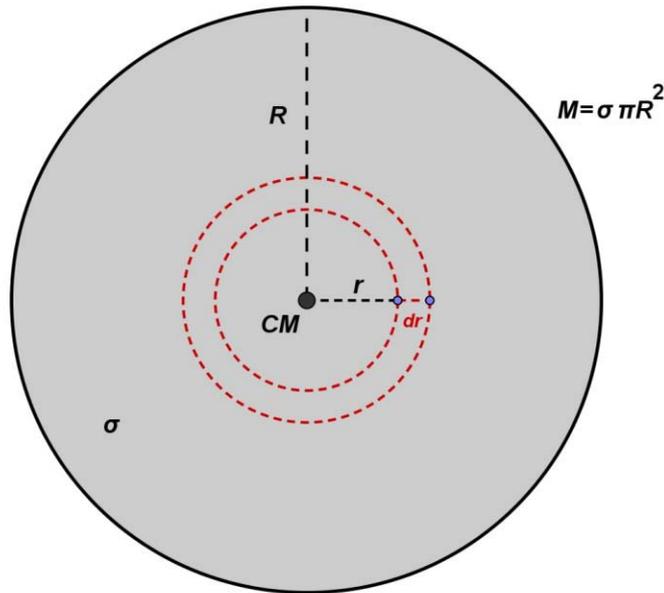


Figura 8.3: Dato un disco sottile di densità superficiale uniforme σ e raggio R si calcola il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa CM e perpendicolare al piano del disco a partire dalla massa elementare $dm = \sigma(2\pi r dr)$ della corona circolare indicata in rosso –che si trova a distanza r dall'asse rispetto al quale si calcola il momento d'inerzia– e quindi integrando su tutto il raggio del disco.

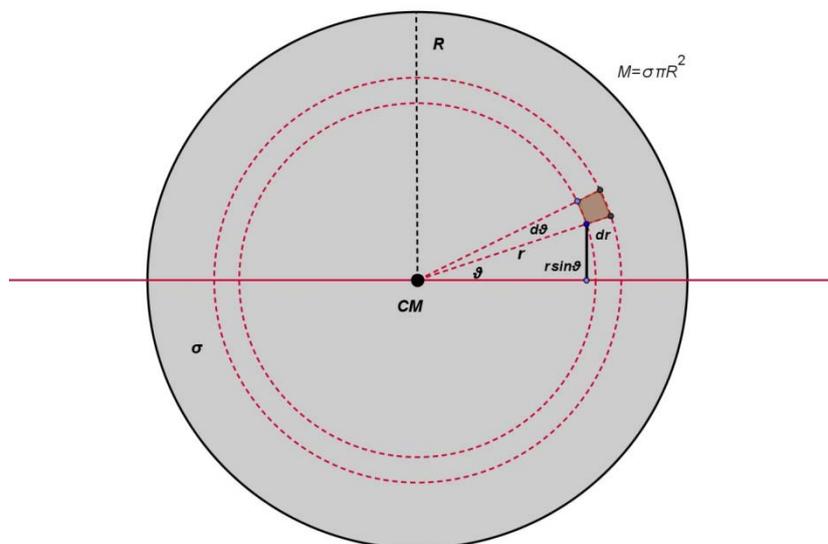


Figura 8.4: Per un disco sottile come in Figura 8.3 si chiede ora di calcolare il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa CM ma giacente nel piano del disco. Per simmetria attorno al CM possiamo scegliere un qualunque asse per esso. Prendiamo quello orizzontale (disegnato in rosso). Prendiamo come elemento di massa quello racchiuso nel poligono indicato in scuretto, la cui minima distanza dall'asse in questione è $r \sin \vartheta$. È chiaro che in questo caso per intergere su tutto il disco occorrerà fare un integrale doppio: su r per $0 \leq r \leq R$ e su ϑ per $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$.

Un disco sottile è il caso particolare di un cilindro di altezza trascurabile rispetto al raggio di base. Un cilindro sottile è il caso particolare di un cilindro il cui raggio di base è trascurabile rispetto all'altezza. Per un cilindro sottile di densità di massa lineare λ ($[\lambda] = [kg\ m^{-1}]$) e altezza h ($M = \lambda h$) il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa e perpendicolare all'asse del cilindro è:

$$I_{cilindro\ sottile\ piano\ perp} = 2 \int_0^{h/2} (\lambda dz) z^2 = 2\lambda \int_0^{h/2} z^2 dz = 2\lambda(h^3/24) = \frac{1}{12} Mh^2 \quad (8.39)$$

Come si vede dalle (8.38) e (8.39), per il momento d'inerzia nel piano perpendicolare all'asse di simmetria, nel caso del disco sottile interviene solo il raggio R mentre nel caso del cilindro sottile interviene solo l'altezza h .

Nel caso generale di un cilindro per il quale R ed h sono comparabili risulta calcoliamo il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il CM e perpendicolare all'asse di simmetria (che chiamiamo x) come segue. Sia z l'asse di simmetria del cilindro con origine nel CM . Affettiamo il cilindro lungo z in tanti dischetti elementari, ciascuno di spessore dz . Per ognuno di essi dobbiamo calcolare il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa e parallelo ad x (come in Figura 8.2, da cui si ottiene il risultato (8.38)) e poi, per il teorema di Huygens-Steiner, gli dobbiamo sommare il contributo *massa del disco x distanza minima dall'asse x al quadrato*, che integrando per tutta l'altezza del cilindro ci da il contributo (8.39). Otteniamo così il risultato generale:

$$I_{cilindro\ piano\ perp} = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} Mh^2 = \frac{1}{12} M(3R^2 + h^2) \quad (8.40)$$

Se avessimo calcolato solo il secondo termine, ad esempio il dischetto elementare ad altezza $z = 0$ darebbe contributo nullo, mentre è evidente che esso ha un momento d'inerzia non nullo rispetto ad un asse orizzontale che passi per il suo centro di massa (vedi Figura 8.4).

Usiamo la (8.35) per risolvere il seguente problema. Un cilindro di massa M e raggio R rotola senza strisciare lungo un piano inclinato di altezza h . Con quale velocità il cilindro arriva a terra? La condizione di rotolamento dice che la velocità di rotazione del cilindro attorno al suo asse dipende dalla velocità lineare con cui si sposta lungo il piano inclinato, che ovviamente aumenta man mano che rotola fino ad un valore finale che è quello che vogliamo calcolare. Quindi, in ogni istante deve valere la seguente relazione tra la velocità lineare e il periodo di rotolamento $P = 2\pi/\omega$ (ω è la velocità angolare con la quale il cilindro rotola sul piano inclinato):

$$V(t)P(t) = 2\pi R \Rightarrow \omega(t) = V(t)/R \quad (8.41)$$

Usiamo la conservazione dell'energia (energia iniziale = energia finale) con la (8.14) per l'energia di rotazione del cilindro attorno al suo asse e la (8.35) per il momento d'inerzia del cilindro attorno al suo asse di simmetria:

$$Mg\hbar = \frac{1}{2}MV_{finale}^2 + \frac{1}{2}I(\omega_{finale})^2 = \frac{1}{2}MV_{finale}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{V_{finale}}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}MV_{finale}^2 + \frac{1}{4}MV_{finale}^2 = \frac{3}{4}MV_{finale}^2 \quad (8.42)$$

quindi, il cilindro che rotola senza strisciare su un piano inclinato di altezza \hbar arriva a terra con la velocità:

$$V_{finale} = \sqrt{\frac{4}{3}g\hbar} \quad (8.43)$$

Consideriamo ora una sfera di raggio R e densità costante ρ . La massa della sfera è:

$$M = \rho\left(\frac{4}{3}\right)\pi R^3 \quad (8.44)$$

Per calcolare il momento d'inerzia della sfera rispetto ad un qualunque asse passante per il centro di massa scegliamo l'asse z e partiamo dall'elemento di massa (ϑ è la latitudine):

$$dm = \rho(2\pi r \cos\vartheta)(r d\vartheta) dr \quad (8.45)$$

la cui distanza minima dall'asse z è $r \cos\vartheta$. Il momento di inerzia della sfera rispetto all'asse z è:

$$I_{sfera} = 2 \cdot 2\pi\rho \left(\int_0^R r^4 dr\right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos^3\vartheta d\vartheta\right) = \left(\frac{4}{5}\right)\pi\rho R^5 \left(\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2\vartheta) d(\sin\vartheta)\right) = \left(\frac{4}{5}\right)\pi\rho R^5 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{5}MR^2 \quad (8.46)$$

Per ragioni di simmetria la sfera non ha alcun asse preferenziale, tutti gli assi si equivalgono e quindi questo è il momento di inerzia della sfera.

Equazioni di Eulero e precessione libera della Terra

La legge di Newton (3.7) si applica anche al corpo rigido per i suoi moti di rotazione attorno ad un punto fisso:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N} \quad (8.47)$$

dove \vec{N} è il momento rispetto al punto fisso della forza agente sul corpo (in presenza di più forze si calcola il momento di ciascuna forza e si sommano vettorialmente tutti i momenti applicati). Questa equazione vale è scritta in un sistema di riferimento inerziale. Per usare il riferimento solidale con il corpo (e in particolare quello degli assi principali d'inerzia) ricordiamo la (7.1), che permette di scrivere la derivata temporale del vettore momento angolare nel riferimento inerziale in relazione a quella nel riferimento fisso con il corpo rigido:

$$\left(\dot{\vec{L}}\right)_{RI} = \left(\dot{\vec{L}}\right)_{body-fixed} + \vec{\omega} \times \vec{L} \quad (8.48)$$

Dalla (8.47), usando la (8.48) per la derivata temporale del momento angolare nel riferimento inerziale, abbiamo le equazioni di Eulero, che scriviamo componente per componente:

$$\begin{cases} N_x = I_1 \dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z (I_2 - I_3) \\ N_y = I_2 \dot{\omega}_y - \omega_z \omega_x (I_3 - I_2) \\ N_z = I_3 \dot{\omega}_z - \omega_x \omega_y (I_1 - I_2) \end{cases} \quad (8.49)$$

Un esempio molto significativo che si ottiene applicando queste equazioni è la precessione libera dell'asse di rotazione della Terra.

In prima approssimazione la Terra può essere considerata come uno sferoide oblato (Figura 8.5) con raggio equatoriale R_e , raggio polare R_p e $R_e > R_p$. L'equatore è una circonferenza di raggio R_e e lo sferoide Terra si ottiene dall'ellisse di semiasse maggiore R_e e semiasse minore R_p (piano y, z di Figura) facendole fare un giro completo attorno all'asse z (cioè al suo semiasse minore). Ci aspettiamo che i momenti di inerzia rispetto ad un qualunque asse passante per il centro di massa della Terra e giacente nel piano equatoriale siano tutti uguali tra loro (per ragioni di simmetria rispetto all'asse z . In particolare sarà $I_x = I_y$). È invece evidente che il momento di inerzia rispetto all'asse z sarà diverso da I_x . Ci aspettiamo anche che sia $I_z > I_x$ perché nella zona equatoriale c'è della massa più lontana dall'asse z (e nel momento di inerzia conta il prodotto di ogni elemento di massa per la sua distanza (minima) al quadrato dall'asse rispetto al quale il momento d'inerzia viene calcolato. In effetti si trova (anche se qui non lo dimostriamo) che:

$$I_x = \frac{1}{5} M_{\oplus} (R_e^2 + R_p^2) \quad I_z = \frac{2}{5} M_{\oplus} R_e^2 \quad (8.50)$$

avendo assunto una distribuzione di massa omogenea e avendo indicato con M_{\oplus} la massa totale della Terra.

La Terra ruota attorno al proprio asse con un periodo (rispetto alle stelle fisse) un poco minore di 24 *hr*. Il punto è che l'asse di rotazione propria della Terra non coincide esattamente con il suo asse di simmetria (l'asse z), e quindi il vettore velocità angolare di rotazione delle Terra (indicato in rosso in Figura (8.5)) ha anche 2 piccole componenti non nulle nel piano x, y (la componente z è quella corrispondente ad un periodo di circa 24 *hr*)

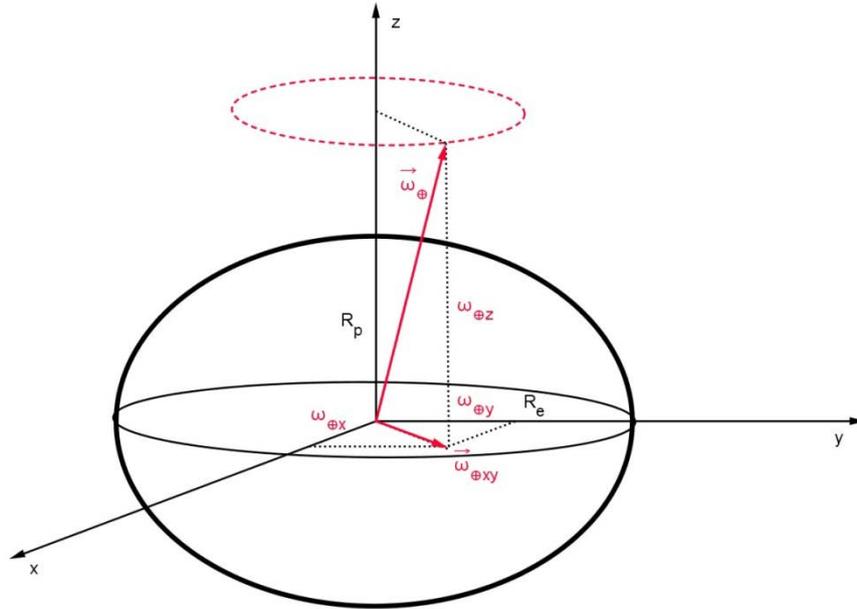


Figura 8.5: La Terra è in prima approssimazione uno sferoide oblato, con

Il problema è proprio scoprire cosa succede in questo caso, anche in assenza di qualunque altro momento esterno (cioè, la Terra si assume isolata e quindi “libera” dall’azione di momenti di forze). Nel sistema di riferimento “body-fixed”, cioè fisso con la Terra, i cui 3 assi coincidano con gli assi principali di inerzia (come in Figura 8.5), le equazioni del moto della Terra attorno al suo centro di massa saranno le equazioni di Eulero (8.49) dove i momenti delle forze esterne saranno nulli e vale anche $I_y = I_x$, e quindi si ha (abbiamo tralasciato il simbolo \oplus usato in Figura per indicare la Terra):

$$\begin{cases} 0 = I_x \dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z (I_x - I_z) \\ 0 = I_x \dot{\omega}_y - \omega_z \omega_x (I_z - I_x) \\ 0 = I_z \dot{\omega}_z \end{cases} \quad (8.51)$$

Dalla terza equazione delle (8.51) si ha che $\omega_z = \text{costante}$, cioè il periodo di rotazione di circa 24 hr non subisce alcuna variazione. Dalle prime 2 equazioni delle (8.51), derivando una volta ancora rispetto al tempo abbiamo:

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_x = \dot{\omega}_y \left[\omega_z \frac{I_x - I_z}{I_x} \right] \\ \ddot{\omega}_y = -\dot{\omega}_x \left[\omega_z \frac{I_x - I_z}{I_x} \right] \end{cases} \quad (8.52)$$

Usando per $\dot{\omega}_y$ e $\dot{\omega}_x$ le prime 2 equazioni delle (8.51), le (8.52) danno:

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_x + \omega_x \left[\omega_z \frac{I_x - I_z}{I_x} \right] = 0 \\ \ddot{\omega}_y + \omega_y \left[\omega_z \frac{I_x - I_z}{I_x} \right] = 0 \end{cases} \quad (8.53)$$

le quali ci dicono che le due piccole componenti ω_x, ω_y (vedi Figura 8.5) oscillano entrambe con la stessa velocità angolare, che chiamiamo Ω , data da a:

$$\Omega = \omega_z \frac{I_x - I_z}{I_x} \quad (8.54)$$

Il che significa che il piccolo vettore $\vec{\omega}_{xy}$ che giace nel piano x, y (indicato in rosso in Figura 8.5) compie un moto circolare uniforme nello stesso piano, al quale corrisponde un moto di precessione del vettore $\vec{\omega}_{\oplus}$ attorno all'asse di simmetria della Terra stessa (come mostrato in Figura dalla circonferenza tratteggiata), cioè il vettore di rotazione propria della Terra si muove dentro la Terra stessa con questo moto di precessione, che si chiama precessione libera (perché si ha in assenza di momenti esterni). Si noti che siccome $\frac{I_x - I_z}{I_x} < 0$, il segno di Ω è opposto a quello di ω_z , cioè la precessione avviene in verso opposto a quello della rotazione diurna. Siccome si ha $(I_z - I_x)/I_x \simeq 300$, segue dalla (8.54) che il periodo di precessione libera della Terra è circa 300 volte più lungo del periodo di rotazione diurna, cioè un giorno. Ci aspettiamo quindi che duri 300 giorni. Questa fu la predizione di Eulero, basata sulle equazioni (8.49) e assumendo la Terra come corpo rigido. Le misure hanno mostrato che questo fenomeno, detto moto dei poli della Terra, ha un periodo di circa 427 giorni. La differenza si può attribuire al fatto che la Terra non è un corpo rigido. La cosa tuttora non spiegata è come mai questo moto non si smorzi (per fenomeni di attrito e dissipazione). Evidentemente viene continuamente eccitato, ma non è chiaro per quale meccanismo.

