Fisica I, *a.a.* 2012–2013, Compitino del 16 Maggio 2013

Anna M. Nobili

1 Trottola in rotazione attorno ad un asse orizzontale

Consideriamo una trottola in rotazione attorno ad un asse orizzontale come mostrato in Figura 1 sulla superficie della terra. Assumiamo che la terra sia piatta e non rotante, per cui un riferimento solidale con essa può essere considerato un sistema di riferimento inerziale.

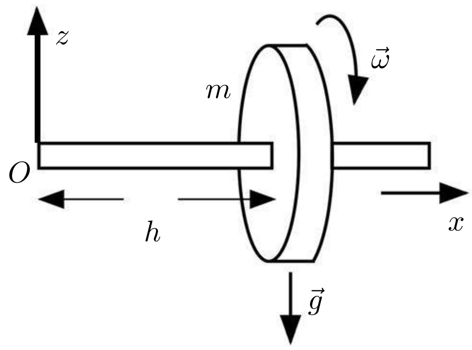


Figure 1: Trottola di massa m in rotazione con velocità angolare $\vec{\omega}$ attorno ad un asse orizzontale. La distribuzione di massa della trottola è uniforme. Il punto di supporto della trottola è localizzato al suo estremo sinistro, nel quale quindi fissiamo l'origine O del sistema di assi cartesiani ortogonali $Oxyz$ di cui lo sketch mostra solo gli assi x, z nel piano del foglio (l'asse y che completa la terna è perpendicolare al foglio, di verso entrante). Si precisa in classe che questa è la configurazione all'istante iniziale.

Descrivete in modo quantitativo il moto della trottola, seguendo i seguenti passi.
Nel riferimento di Figura 1 scrivete, nell'ordine, i seguenti vettori e le loro componenti:

1. Il vettore velocità angolare di rotazione della trottola.
2. Il vettore momento angolare di rotazione della trottola attorno al suo asse di simmetria. In questo caso definite il momento di inerzia rilevante.
3. Il vettore della forza peso.
4. Il vettore momento della forza peso che è rilevante per il moto della trottola.

Scrivete quindi l'equazione cardinale di Newton per il moto del corpo rigido (ricordando che essa è valida nel riferimento inerziale) e da essa deducete cosa succede, qualitativamente, al momento angolare, sia come vettore che in modulo.

A questo punto, ricordate la relazione scritta a lezione tra la derivata di una vettore rispetto al tempo nel riferimento inerziale e la sua derivata rispetto al tempo nel riferimento solidale con il corpo rigido.

Scrivete questa relazione per il vettore momento angolare, facendo bene attenzione alla velocità angolare del corpo rigido in essa coinvolta.

Usate l'espressione così ottenuta per la derivata temporale del vettore momento angolare per riscrivere l'equazione cardinale di Newton. Da questa eguaglianza, scritta componente per componente, otterrete la soluzione in forma quantitativa al moto della trottola di Figura 1.

Dite se la massa della trottola è rilevante oppure no. Per rispondere a questa domanda si consiglia di calcolare il momento d'inerzia di cui al punto n. 2 tenendo conto che la trottola è un disco di raggio r, spessore piccolo rispetto al raggio e distribuzione di massa uniforme.

2 Soluzione

Come indicato nel testo il riferimento $Oxyz$, i cui assi x, z sono mostrati in Figura 1, si può considerare un riferimento inerziale. Consideriamo che all'istante iniziale la trottola si trovi come mostrato nella stessa Figura. I vettori richiesti si scrivono come segue.

Vettore velocità angolare di rotazione della trottola:

$$\vec{\omega} = (\omega, 0, 0) \tag{1}$$

Vettore momento angolare di rotazione attorno all'asse di simmetria:

$$\vec{L} = I_s \vec{\omega} = (I_s \omega, 0, 0) \tag{2}$$

avendo indicato con I_s il momento d'inerzia della trottola rispetto al suo asse di simmetria $\hat{s} = (1, 0, 0)$ passante per il centro di massa (che è il centro di massa del disco poiché la massa m della trottola è tutta concentrata nel disco mentre massa dell'albero è trascurabile rispetto a quella del disco stesso).

Vettore della forza peso agente sulla trottola, applicato nel centro di massa:

$$\vec{F} = m\vec{g} = (0, 0, -mg) \tag{3}$$

Momento della forza peso rispetto al punto di supporto della trottola O (tenendo conto che il braccio rispetto a questo punto è dato dal vettore $\vec{h} = (h, 0, 0)$):

$$\vec{N} = \vec{h} \times \vec{F} = \vec{h} \times m\vec{g} = (0, mgh, 0) \quad . \tag{4}$$

Come si vede, il momento della forza peso vale in modulo mgh ed è un vettore perpendicolare al piano individuato dall'albero della trottola e dall'asse z (che all'istante iniziale rappresentato in Figura 1, coincide con il piano x, z del riferimento inerziale), e di verso entrante in questo piano (y positive). Notiamo quindi subito che il vettore momento della forza peso e il vettore momento angolare della trottola sono tra loro ortogonali. Quindi di sicuro il momento della forza peso, non avendo alcuna componente lungo la direzione del vettore momento angolare, non può aumentare né diminuire il suo modulo. Da qui, usando la (2) e considerando che il momento d'inerzia I_s non può variare, concludiamo che anche il modulo della velocità angolare di rotazione deve restare costante.

Con i vettori definiti sopra l'equazione cardinale di Newton per il l moto della trottola scritta nel riferimento inerziale $Oxyz$ è:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N} \tag{5}$$

Da questa equazione vediamo che la variazione del vettore momento angolare di rotazione della trottola (che significa solo variazione della sua *direzione* poiché abbiamo visto che il modulo deve restare costante) è diretta lungo la direzione del momento $\vec{N}$ della forza peso dato dalla (4), cioè lungo le y negative. Il che significa intuitivamente che la trottola precede attorno all'asse z *in verso antiorario* con una velocità angolare di precessione che indichiamo con $\vec{\Omega}_{prec}$ e che dobbiamo calcolare. La situazione è descritta in Figura 2 dove è mostrato il moto di precessione della trottola intorno l'asse z.

Trattandosi di una precessione attorno all'asse z in verso antiorario il vettore $\vec{\Omega}_{prec}$, deve essere diretto lungo le z positive, cioè:

$$\vec{\Omega}_{prec} = (0, 0, \Omega_{prec}) \tag{6}$$

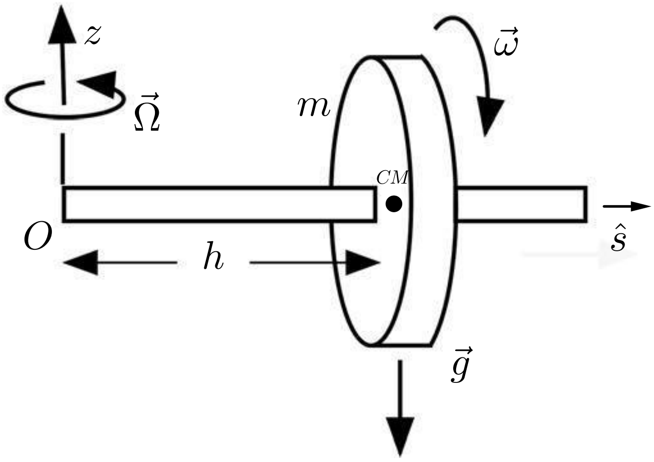


Figure 2: Moto di precessione della trottola che in Figura 1 veniva mostrata nella sua configurazione iniziale. L'asse x del riferimento inerziale, inizialmente coincidente con l'asse di simmetria $\hat{s}$ della trottola, non è mostrato, dato che questa figura si riferisce ad un generico istante del moto di precessione della trottola nel quale l'asse di simmetria non coincide necessariamente con l'asse x del riferimento inerziale.

L'equazione di Newton (5) è valida nel riferimento inerziale, nel nostro caso $Oxyz$ di Figura 1. Quindi $\dot{\vec{L}}$ deve essere calcolato nel riferimento inerziale, e perciò lo scriviamo come $(\dot{\vec{L}})_{RI}$. A lezione abbiamo dimostrato la relazione che lega la derivata temporale di un vettore rispetto al riferimento inerziale alla sua derivata temporale rispetto ad un riferimento fisso con il corpo rigido (indicato con l'acronimo BF (che sta per "Body Fixed") quando il corpo rigido è dotato di une certa velocità angolare rispetto. Poiché siamo interessati al moto di precessione della trottola, in questo caso la velocità angolare che dobbiamo considerare è quella di precessione, e quindi la relazione che lega $(\dot{\vec{L}})_{RI}$ ad $(\dot{\vec{L}})_{BF}$ è:

$$(\dot{\vec{L}})_{RI} = (\dot{\vec{L}})_{BF} + \vec{\Omega}_{prec} \times \vec{L} \tag{7}$$

dove $(\dot{\vec{L}})_{BF} = \vec{0}$ poiché sappiamo che il vettore momento precede attorno all'asse z nel riferimento inerziale ma è fisso rispetto alla trottola. Usando inoltre la (6) e la (2) possiamo scrivere:

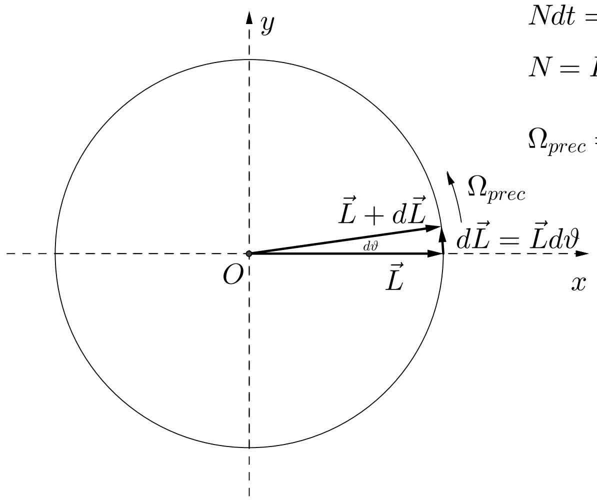
$$(\dot{\vec{L}})_{RI} = \vec{\Omega}_{prec} \times \vec{L} = (0, \Omega_{prec} L, 0) \tag{8}$$

che per l'equazione cardinale di Newton (5) deve uguagliare il momento della forza peso (4). Scrivendo questa uguaglianza otteniamo il valore della velocità angolare di precessione:

$$\Omega_{prec} = \frac{mgh}{L} = \frac{mgh}{I_s \omega_s} \quad . \tag{9}$$

Prima di discutere questo risultato mostriamo un altro modo per ottenerlo. Sappiamo che il modulo del momento angolare di rotazione della trottola resta costante perché il momento della forza peso è perpendicolare ad esso. Se consideriamo la trottola all'istante iniziale di mostrato in Figura 1 il vettore momento angolare $\vec{L}$ della trottola è diretto lungo l'asse x e il momento della forza peso gli fa cambiare direzione verso le y positive. In ogni generico istante successivo il momento della forza peso farà "ruotare" $\vec{L}$ in direzione perpendicolare al piano individuato da

$\vec{L}$ stesso e dalla forza peso. Questo moto si chiama di "precessione" e non di rotazione: l'asse di rotazione della trottola "precede" attorno all'asse lungo il quale è diretta la forza peso La Figura 3 mostra il cerchio di precessione del momento angolare della trottola nel piano x, y del riferimento inerziale, l'effetto su di esso del momento della forza peso nel tempo infinitesimo dt dopo l'istante iniziale e il semplice calcolo che permette di calcolare il modulo Ω_{prec} della velocità angolare di precessione.



$$Ndt = Ld\vartheta$$
$$N = L\frac{d\vartheta}{dt} = L\Omega_{prec}$$
$$\Omega_{prec} = \frac{N}{L} = \frac{mgh}{L} = \frac{mgh}{I_s\omega}$$

Figure 3: Moto del vettore momento angolare della trottola nel piano x, y del riferimento inerziale. $\vec{L}$ compie un cerchio di precessione attorno all'asse z restando costante in modulo. Il vettore della velocità angolare $\vec{\Omega}_{prec}$ con cui avviene la precessione è diretto come il vettore $\vec{N}$ momento della forza peso che lo genera, e cioè lungo le z positive. La Figura mostra all'istante iniziale la rotazione del vettore $\vec{L}$ di un angolo $d\vartheta$ nel tempo infinitesimo dt; l'uso della equazione cardinale di Newton per il moto del corpo rigido ci permette di calcolare il modulo della velocità angolare di precessione Ω_{prec}.

Vediamo che la velocità angolare di precessione dipende dal rapporto tra momento della forza peso e momento angolare della trottola: più grande è il momento della forza peso rispetto al momento angolare della trottola, più rapida è la precessione. Se invece il momento della forza peso è piccolissimo rispetto al momento angolare angolare della trottola essa precederà molto lentamente (periodo di precessione lunghissimo), cioè l'effetto della momento della forza peso sarà poco rilevante. Si noti tuttavia che il numeratore e il denominatore della (9) non hanno le stesse dimensioni fisiche, come è ovvio dato che il loro rapporto, cioè Ω_{prec} deve avere le dimensioni di una velocità angolare. Se volessimo confrontare il momento della forza peso (che ha le diemnsioni fisiche di una energia) con una grandezza fisica ad essa omogenea, dovremmo considerare l'energia cinetiac di rotazione della trottola.

A prima vista la (9) sembra dipendere dipendere dalla massa m della trottola, ma in realtà non è così perché il momento d'inerzia I_s contiene anch'esso la massa m. Come abbiamo visto a lezione, per un disco piatto (spessore trascurabile rispetto al raggio) di massa m, raggio r e distribuzione di massa uniforme il momento d'inerzia rispetto al suo asse di simmetria vale:

$$I_s = \frac{1}{2}mr^2 \tag{10}$$

quindi la velocità angolare di precessione (9) della trottola si scrive:

$$\Omega_{prec} = \frac{gh}{\omega_s r^2} \tag{11}$$

cioè quel che conta per determinare la velocità di precessione della trottola è il rapporto tra il momento per unità di massa della forza peso e il momento angolare di rotazione per unità di massa della trottola. Questo perché la forza gravitazionale, che è l'unica presente in questo caso, obbedisce al principio di equivalenza, e cioè agisce allo stesso modo su tutti i copri indipendentemente dalla loro massa e/o composizione.

Sappiamo per esperienza che se la trottola non gira abbastanza veloce attorno al proprio asse, invece di precedere essa cadrà sotto l'effetto della gravità locale.

La soluzione così ottenuta non ci dice nulla in proposito.