Fisica I, *a.a.* 2012–2013, Compitino del 20 Dicembre 2012

Anna M. Nobili

1 Traiettorie e urto di corpi in moto nel piano

Al tempo $t = 0$ nel piano x, y ci sono 2 corpi puntiformi di massa m_1 ed m_2, posizioni $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$ ed $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$ e velocità (cosanti) $\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y})$ e $\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y})$ rispettivamente.

Il moto dei corpi sul piano si svolge senza attrito, o con un attrito comunque trascurabile (ad esempio grazie alla presenza di un cuscinetto d'aria).

Supponiamo che la configurazione geometrica sia tale che ad un tempo $t_i > 0$ i corpi si possano incontrare.

- Specificate la condizione che i vettori velocità e posizione dei corpi devono verificare affinché le traiettorie si incrocino in modo da rendere possibile tale incontro.
- Nel caso in cui l'incontro sia possibile, scrivete la condizione che deve essere soddisfatta affinché i due corpi si trovino nel punto di incrocio delle traiettorie allo stesso tempo.
- Assumendo che al momento dell'incontro si formi un unico corpo (anch'esso puntiforme) di massa $m = m_1 + m_2$, scrivete il vettore velocità con cui esso si muoverà dopo l'incontro.
- Disegnate nel piano una configurazione con i corpi e i vettori rilevanti prima e dopo l'incontro.

2 Soluzione

Definiamo il vettore di posizione relativa $\Delta\vec{r}$ dei due corpi all'istante iniziale:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{1}$$

e la retta ϱ passante per i due corpi e coincidente con esso.

Come si vede in Fig.1 l'incontro è possibile solo se si verificano le seguenti condizioni:

- le velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ dei corpi in tale istante puntano entrambe dallo stesso lato della retta ϱ
- gli angoli α e β definiti in Fig.1 sono tali che $\alpha < \beta$

dove gli angoli α e β sono calcolabili da grandezze date:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}_1 \cdot \Delta\vec{r}}{v_1 \Delta r} \qquad \cos\beta = \frac{\vec{v}_2 \cdot \Delta\vec{r}}{v_2 \Delta r} \tag{2}$$

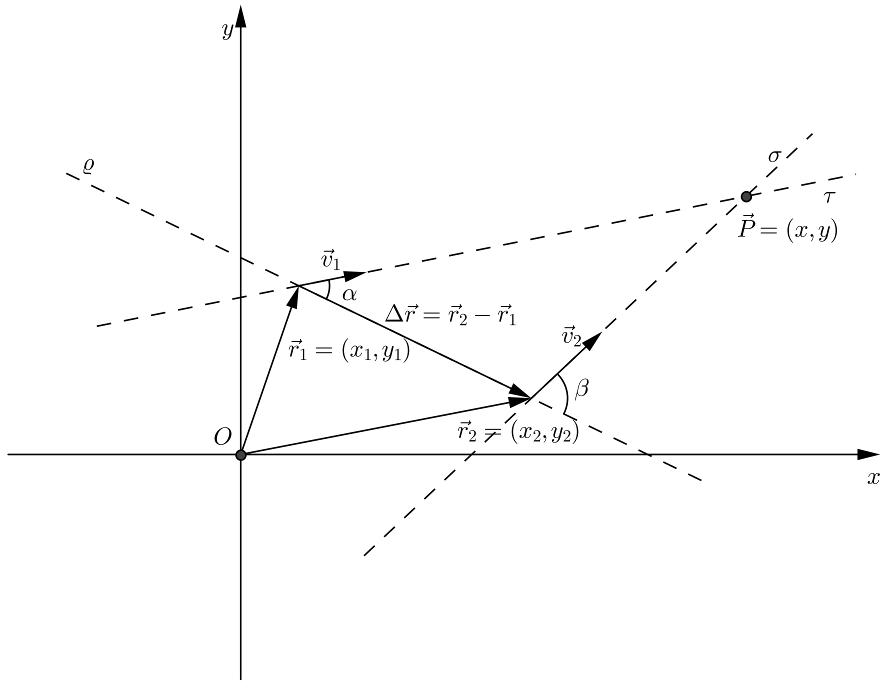

Figure 1: Geometria delle traiettorie dei due corpi dalle quali è possibile ricavare le condizioni che rendono possibile l'incontro.

Se le condizioni poste sopra sono soddisfatte, ad esempio come nel caso di Fig.1, la condizione affinché l'incontro avvenga davvero, e non si tratti invece di un semplice incrocio delle traiettorie σ e τ, occorre che all'istante t_i dell'incontro (essendo $t = 0$ l'istante iniziale) entrambe le masse si trovino nello stesso punto $\vec{P} = (x, y)$. Imponiamo questa condizione lungo le due direzioni del piano:

$$v_{1y}t_i = y - y_1 \qquad v_{2y}t_i = y - y_2 \tag{3}$$

$$v_{1x}t_i = x - x_1 \qquad v_{2x}t_i = x - x_2 \tag{4}$$

e ne ricaviamo le coordinate x, y del punto di incontro in funzione di tutte grandezze date:

$$y = \frac{y_1 - \frac{v_{1y}}{v_{2y}} y_2}{1 - \frac{v_{1y}}{v_{2y}}} \tag{5}$$

$$x = \frac{x_1 - \frac{v_{1x}}{v_{2x}} x_2}{1 - \frac{v_{1x}}{v_{2x}}} \quad . \tag{6}$$

Senza ricavare le coordinate del punto di incontro, si poteva solo imporre che l'incontro avvenga, cioè:

$$y_1 + v_{1y}t_i = y_2 + v_{2y}t_i \tag{7}$$

$$x_1 + v_{1x}t_i = x_2 + v_{2x}t_i \tag{8}$$

da cui, risolvendo per t_i:

$$t_i = \frac{y_1 - y_2}{v_{2y} - v_{1y}} \tag{9}$$

$$t_i = \frac{x_1 - x_2}{v_{2x} - v_{1x}} \tag{10}$$

e infine uguagliano per eliminare t_i:

$$\frac{y_1 - y_2}{v_{2y} - v_{1y}} = \frac{x_1 - x_2}{v_{2x} - v_{1x}} \tag{11}$$

che è una condizione ben verificabile in quanto tutte le grandezze coinvolte sono date.

Infine, se nell'incontro si forma un unico corpo di massa m, imponendo la conservazione della quantità di moto lineare tra prima e dopo l'incontro (in quanto non ci sono forze che la farebbero cambiare) abbiamo:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m\vec{v} \tag{12}$$

da cui risulta il vettore velocità della massa $m = m_1 + m_2$ dopo l'incontro:

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad . \tag{13}$$

La Fig.2 mostra una possibile configurazione dopo l'incontro, dove il vettore $\vec{v}$ corrisponde ad un possibile caso realistico in cui i singoli valori di m_1, m_2 e $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ soddisfano l'equazione (13). Se invece delle velocità usiamo le quantità di moto lineari possiamo rappresentare graficamente il sistema prima e dopo l'incontro come in Fig. 3.

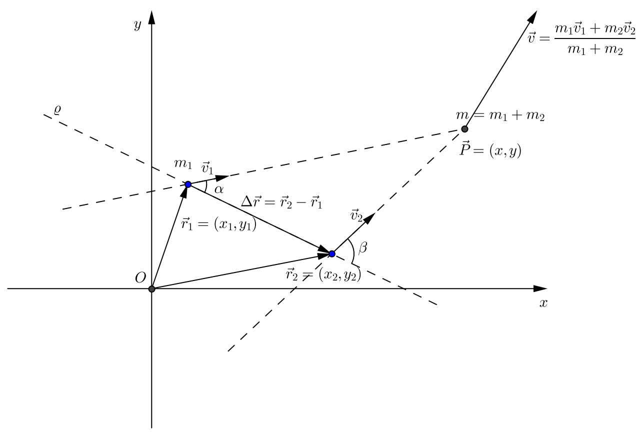

Figure 2: Una possibile configurazione con la velocità del singolo corpo dopo l'incontro scritta in termini della grandezze note.

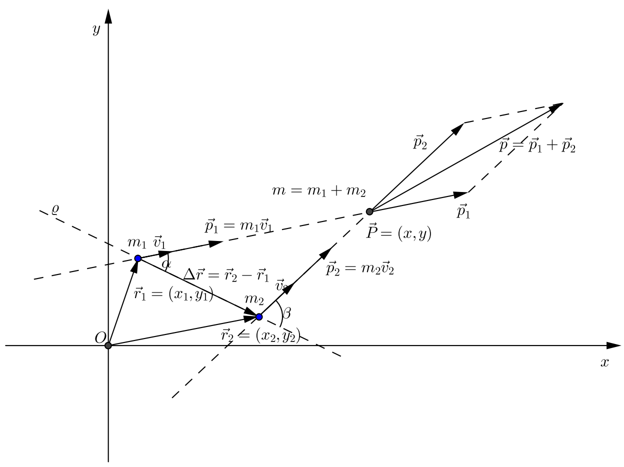

Figure 3: Configurazione prima e dopo l'incontro espressa in termini delle quantità di moto lineari dei corpi.