Fisica I, *a.a.* 2012–2013 – Compito terzo appello
2 settembre 2013

Anna M. Nobili

1 Caso generale di una trottola in rotazione attorno ad un asse inclinato

Considerate una trottola di massa M in rotazione con velocità angolare di modulo ω attorno al suo asse di simmetria che risulta essere inclinato di un angolo ϑ rispetto all'asse z della verticale locale come mostrato in Fig. 1 e descritto nella didascalia.

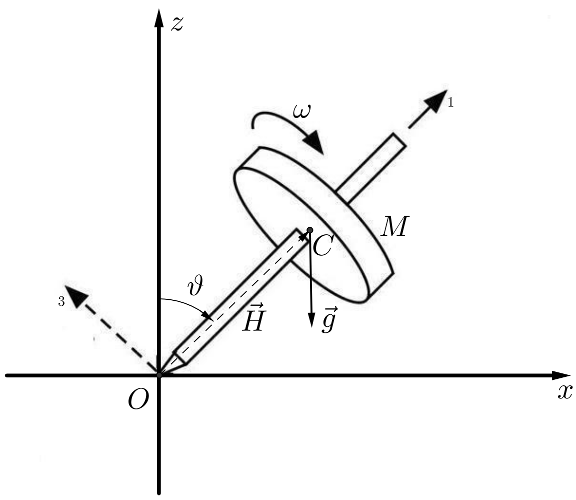

Figure 1: Trottola di massa M in rotazione con velocità angolare di modulo ω attorno ad un asse inclinato dell'angolo ϑ rispetto alla verticale locale lungo la quale agisce l'accelerazione gravitazionale $\vec{g}$. La distribuzione di massa della trottola è uniforme e la massa dell'asse è trascurabile rispetto a quella del disco Gli assi cartesiani ortogonali x, z mostrati in figura fanno parte del sistema di riferimento inerziale $Oxyz$ (l'asse y non mostrato in figura è entrante nel piano del foglio e completa la terna). Gli assi cartesiani ortogonali indicati come $1, 3$ sono rispettivamente parallelo e perpendicolare all'asse di simmetria della trottola; l'asse 2 che completa la terna e non è mostrato in figura è di verso entrante). Il vettore $\vec{H}$ (diretto lungo l'asse di simmetria della trottola) va dall'origine O al suo centro di massa C.

Calcolate il momento $\vec{\tau}$ esercitato sulla trottola dalla forza gravitazionale e specificatene la direzione e il verso. Dite perché $\vec{\tau}$ non ha alcun effetto sul modulo della velocità angolare di rotazione $\vec{\omega}$ della trottola. Usando la legge cardinale di Newton per il corpo rigido dimostrate che il suo effetto è di farla precedere attorno all'asse z e indicate direzione e verso della velocità angolare di precessione che indicherete con $\vec{\Omega}$. La forza di attrito nel punto O di contatto della trottola con il piano orizzontale non contribuisce a $\vec{\tau}$. Dite perché.

L'attrito dissipa l'energia di rotazione della trottola causandone infine la caduta, ma lo trascuriamo. Trascuriamo anche la resistenza dell'aria.

1. Fate l'ipotesi che il modulo della velocità angolare $\vec{\omega}$ di rotazione propria della trottola attorno al suo asse di simmetria sia molto grande rispetto a quello della sua velocità angolare di precessione, tanto da poter trascurare il momento angolare di precessione rispetto al momento angolare di rotazione (caso della trottola in rotazione veloce). In questa ipotesi calcolate il modulo della velocità angolare di precessione della trottola, che indicherete con $\Omega_{RotVeloce}$. Vi serviranno il momento angolare di rotazione propria della trottola, che indicherete con $\vec{L}_{Rot}$, e il momento di inerzia della trottola rispetto al suo asse di simmetria 1, che indicherete con I_1. Vi serve anche la relazione tra $\vec{L}_{Rot}$ e $\vec{\omega}$.

2. Abbandonate l'ipotesi precedente e sommate al momento angolare di rotazione propria della trottola $\vec{L}_{Rot}$ anche il suo momento angolare di precessione, che indicherete con $\vec{L}_{Prec}$ (caso generale). Calcolate le componenti del momento angolare totale $\vec{L}_{tot} = \vec{L}_{Rot} + \vec{L}_{Prec}$ lungo gli assi 1 e 3. Avrete bisogno anche del momento di inerzia della trottola rispetto all'asse 3, che indicherete con I_3. Scrivendo l'equazione cardinale di Newton la velocità angolare di precessione comparirà come incognita, e la indicherete con $\vec{\Omega}_{Gen}$. Nell'equazione scalare il modulo Ω_{Gen} compare al quadrato. Scrivete la condizione che ω deve soddisfare affinché questa equazione di secondo grado abbia due soluzioni reali per l'incognita Ω_{Gen}. Calcolate le due soluzioni e dite quale di esse ha una somiglianza con la soluzione trovata nel caso precedente della rotazione veloce.

3. Scrivete i momenti di inerzia I_1 e I_3 considerando la trottola come un disco sottile e omogeneo di massa M e raggio R.

2 Soluzione

Il momento $\vec{\tau}$ esercitato dalla forza gravitazionale sulla trottola che fa perno nell'origine O è (vedi Fig.1):

$$\vec{\tau} = \vec{H} \times (M\vec{g}) \tag{1}$$

che risulta perpendicolare al piano individuato dall'asse z e dall'asse di rotazione della trottola, di verso entrante. nella configurazione di Fig.1, che possiamo immaginare essere quella dell'istante iniziale, il vettore $\vec{\tau}$ è diretto lungo l'asse delle y positive. Il suo effetto sarà quindi di far precedere l'asse di rotazione della trottola attorno all'asse z in verso anti-orario. Il vettore della velocità angolare di precessione, che indichiamo con $\vec{\Omega}$, sarà quindi diretto lungo l'asse z, e poiché il verso della precessioneè anti-orario sarà in particolare diretto lungo le z positive.

Non avendo alcuna componente lungo l'asse di rotazione della trottola, $\vec{\tau}$ non può far variare il suo momento angolare di rotazione e quindi (essendo il momento d'inerzia costante) non può far variare il valroe della velocità angolare di rotazione iniziale della trottola.

La forza di attrito nel punto di contatto della trottola non produce momento (perché il braccio è nullo). La dissipazione di energia per attrito in quel punto – che in questo problema viene trascurato – fa cadere la trottola perché la sua è energia di rotazione e di precessione, la precessione non c'è senza rotazione, e senza una sufficiente energia di rotazione la trottola cade.

1. Caso della trottola in rotazione veloce: $\omega \gg \Omega_{RotVeloce}$ ($\Omega_{RotVeloce}$ indica la velocità angolare di precessione in questo caso).

   Dati il momento della forza gravitazionale (1) e il momento angolare di rotazione della trottola

   $$\vec{L}_{rot} = I_1\vec{\omega} \tag{2}$$

   (I_1 è il momento di inerzia attorno all'asse di simmetria, indicato come 1 e si scrive $I_1 = MR^2/2$ essendo il disco omogeneo di massa M e raggio R; vedi il punto 3), l'equazione cardinale di Newton, che vale nel riferimento inerziale, (nel riferimento della trottola il suo momento angolare di rotazione è costante) da:

   $$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega}_{RotVeloce} \times \vec{L}_{Rot} \tag{3}$$

   e in modulo:

   $$MgH\sin(\pi - \vartheta) = \Omega_{RotVeloce}L_{rot}\sin\vartheta \quad . \tag{4}$$

   Se $\vartheta \neq 0$, e quindi $\sin(\pi - \vartheta) = \sin\vartheta \neq 0$, dalla (5) abbiamo:

   $$\Omega_{RotVeloce} = \frac{MgH}{L_{Rot}} = \frac{MgH}{I_1\omega} \tag{5}$$

   che è il risultato che già conosciamo, avendo però messo in chiaro che esso è valido nell'ipotesi $\omega \gg \Omega_{RotVeloce}$. Notiamo che la velocità di precessione non dipende dall'inclinazione ϑ dell'asse della trottola (a parte il caso $\vartheta = 0$ in cui non c'è precessione).

2. Consideriamo il caso generale, senza restrizioni sul valore di ω, e cerchiamo di scoprire il valore della velocità angolare di precessione della trottola (indicato con $\vec{\Omega}_{Gen}$)

   La velocità angolare di precessione ha componenti lungo l'asse della trottola 1 ma anche lungo l'asse 3, e analogamente il momento angolare di precessione:.

   $$\vec{L}_{Prec} = (I_1\Omega_{Gen}\cos\vartheta, 0, I_3\Omega_{Gen}\sin\vartheta) \tag{6}$$

($I_3 = M(R^2/4 + H^2)$; vedi il punto 3)

$$\vec{L}_{tot} = \vec{L}_{Prec} + \vec{L}_{Rot} = (I_1(\omega + \Omega_{Gen}\cos\vartheta), 0, I_3\Omega_{Gen}\sin\vartheta) \tag{7}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \vec{\Omega}_{Gen} \times \vec{L}_{tot} \tag{8}$$

Poiché $\vec{\tau}$ è perpendicolare al piano individuato dall'asse z e dall'asse di rotazione della trottola, ad esempio è lungo y all'istante iniziale, serve la seconda componente del prodotto vettore a secondo membro, che è:

$$Mgh\sin\vartheta = \Omega_{Gen}L_{tot_x} \tag{9}$$

$$L_{tot_x} = I_1(\omega + \Omega_{Gen}\cos\vartheta)\sin\vartheta - I_3\Omega_{Gen}\sin\vartheta\sin(\frac{\pi}{2} - \vartheta) \tag{10}$$

Quindi:

$$Mgh\sin\vartheta = \Omega_{Gen}^2(I_1 - I_3)\sin\vartheta\cos\vartheta + \Omega_{Gen}I_1\omega\sin\vartheta \tag{11}$$

che escludendo il caso $\vartheta = 0$ diventa:

$$\Omega_{Gen}^2(I_3 - I_1)\cos\vartheta - \Omega_{Gen}I_1\omega + MgH = 0 \quad . \tag{12}$$

Si tratta di una equazione di secondo grado nell'incognita Ω_{Gen} che stiamo cercando, del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{13}$$

che ha due soluzioni reali distinte se il suo discriminante Δ è positivo:

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \tag{14}$$

e le soluzioni sono:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{15}$$

Nel nostro caso:

$$I_1^2\omega^2 - 4(I_3 - I_1)\cos\vartheta MgH > 0 \tag{16}$$

Quindi, come condizione sulla velocità angolare di rotazione ω affinché ci siano due soluzioni reali distinte per la velocità angolare di precessione, abbiamo:

$$\omega^2 > MgH\frac{4(I_3 - I_1)}{I_1^2}\cos\vartheta \quad . \tag{17}$$

Abbiamo quindi una condizione sul modulo di ω (il suo segno indica il verso della rotazione), dato che un valore immaginario non avrebbe significato fisico e il valore per cui le due soluzioni coincidono e si ha una sola velocità di precessione è un caso particolare. In generale, se la (17) non è soddisfatta, la trottola cade e non precede affatto.

Se invece la (17) è soddisfatta ci saranno due diversi valori della velocità angolare di precessione. Il minore dei due dovrà corrispondere, nel limite in cui esso sia anche molto minore della velocità angolare di rotazione, al valore trovato al punto 1. Possiamo vedere che è così dalla (11) dove, se la velocità di rotazione domina il termine in $\omega\Omega$ domina sul termine in Ω^2 e l'equazione si riduce a quella del caso 1. In generale, se la velocità di rotazione soddisfa la (17) la trottola precede lentamente alla velocità di precessione più bassa tra le due soluzioni, e allo stesso tempo precede con piccoli sotto "loops" alla frequenza di precessione più alta.

3. Il momento di inerzia rispetto al suo asse di simmetria (in questo caso l'asse 1) di un disco sottile ed omogeneo di massa M e raggio R vale:

$$I_1 = \frac{1}{2} M R^2 \quad . \tag{18}$$

Se l'asse giace nel piano del disco e passa per il suo centro di massa il momento di inerzia vale la metà (ci sono infiniti di questi assi). Nel nostro problema l'asse 3 è parallelo ad uno di questi assi ma passa a distanza H dal centro di massa del disco, quindi sappiamo che il momento di inerzia rispetto ad esso vale:

$$I_3 = \frac{1}{4} M R^2 + M H^2 \quad . \tag{19}$$