

Fisica I, *a.a.* 2012–2013 – Compito quarto appello
20 settembre 2013

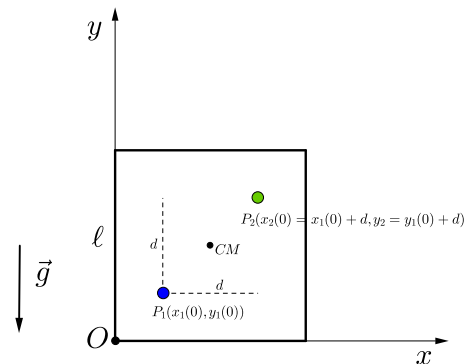
Anna M. Nobili

1 Moto all'interno di un laboratorio in caduta libera

Considerate una Terra isolata nello spazio, perfettamente sferica e non rotante, di massa M_{\oplus} e raggio R_{\oplus} e un laboratorio in caduta libera rispetto ad essa. Un corpo è in “caduta libera” rispetto alla Terra se le sue equazioni del moto (scritte in un riferimento inerziale) non contengono nessuna altra forza oltre a quella gravitazionale esercitata dalla Terra. La massa totale del laboratorio è trascurabile rispetto a quella della Terra. Al suo interno un osservatore O studia il moto di particelle di prova (le particelle di prova si dicono tali in quanto non hanno alcun effetto né l'una sull'altra, né sul laboratorio né tanto meno sulla Terra). L'osservatore conosce la massa e il raggio della Terra su cui sta cadendo.

La Figura 1 mostra il laboratorio in caduta libera nel caso in cui gli strumenti di cui dispone l'osservatore non gli permettano di apprezzare la sfericità della Terra. In questo caso diciamo di essere in approssimazione di Terra piatta. Al tempo iniziale $t = 0$ le particelle sono ferme rispetto al laboratorio nei punti P_1 e P_2 le cui coordinate sono indicate in figura.

La Figura 2 mostra lo stesso laboratorio in caduta libera nel caso in cui l'osservatore O è in grado di apprezzare la sfericità della Terra. Al tempo iniziale $t = 0$ le due particelle di prova si trovano (ferme rispetto al laboratorio) lungo la retta che congiunge il suo centro di massa CM con il centro di massa della Terra.



Terra piatta

Figure 1: Un laboratorio a forma di cubo di lato ℓ cade sulla Terra in approssimazione di Terra piatta con l'accelerazione di gravità g . La terza coordinata non viene mostrata.

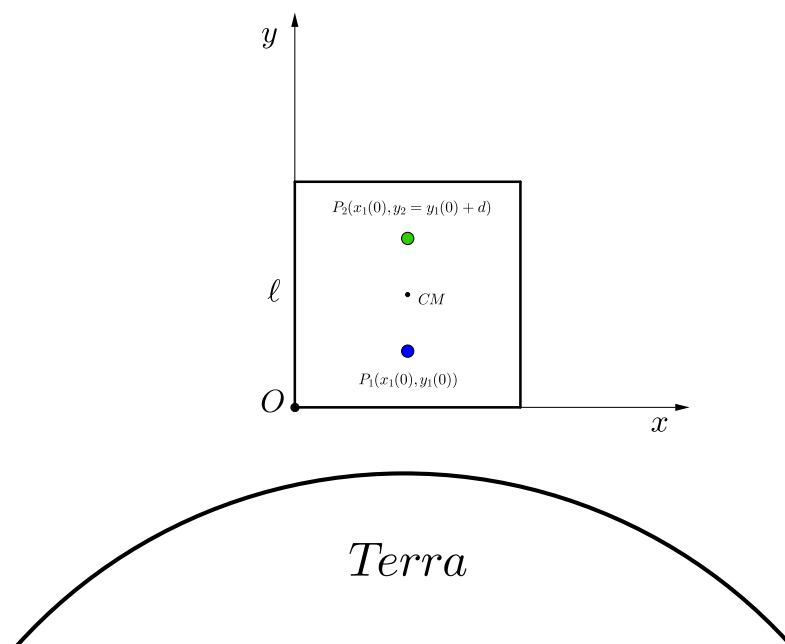


Figure 2: All'interno dello stesso laboratorio l'Osservatore O dispone di strumenti di misura che gli permettono di apprezzare la sfericità della Terra. La figura mostra una sezione nel piano di un cerchio massimo della Terra, tale cioè che contiene il suo centro di massa.

Rispondete alle domande seguenti nell'ordine in cui sono poste.

1. Scrivete la grandezza che viene trascurata dall'osservatore O nel caso di Terra piatta.
2. In Figura 1 disegnate le linee di forza.
3. Immaginate di essere l'osservatore O di Figura 1, scrivete le equazioni del moto delle due particelle di prova e descrivete la loro traiettoria all'interno del laboratorio.
4. L'osservatore O di Figura 1 è in grado di misurare all'interno del suo laboratorio l'accelerazione con cui sta cadendo oppure no?
5. In Figura 2 disegnate le linee di forza.
6. Immaginate di essere l'osservatore O di Figura 2. Scrivete le equazioni del moto delle particelle di prova mostrate in figura e dite quale grandezza l'osservatore deve poter misurare, almeno in prima approssimazione, per concludere che la Terra su cui sta cadendo è sferica e non piatta.
7. Descrivete la traiettoria delle particelle di prova all'interno del laboratorio di Figura 2 come essa viene osservata dallo sperimentatore al suo interno.
8. L'osservatore O di Figura 2 è in grado di misurare all'interno del suo laboratorio l'accelerazione con cui sta cadendo oppure no?
9. Se in Figura 2 le particelle al tempo $t = 0$ si trovassero come in Figura 1 come cambierebbe la loro traiettoria rispetto al laboratorio?

2 Soluzione

1. *Scrivete la grandezza che viene trascurata dall'osservatore O nel caso di Terra piatta.*

Per l'osservatore di Figura 1 la Terra è piatta. Ciò significa che per lui il centro di massa della Terra è infinitamente lontano, e quindi che l'altezza a cui si trova sulla superficie della Terra (detta anche quota) è trascurabile rispetto al raggio R_{\oplus} . Guardando la Figura si deduce che anche il lato ℓ del laboratorio e la distanza d tra le particelle al suo interno sono trascurabili rispetto ad R_{\oplus} . Nota: dire che una grandezza è trascurabile rispetto ad un'altra equivale a dire che il rapporto della prima sulla seconda è trascurabile rispetto ad 1 (il rapporto è adimensionale in quanto solo grandezze che hanno le stesse dimensioni fisiche possono essere confrontate tra loro).

2. *In Figura 1 disegnate le linee di forza.*

Le linee di forza sono mostrate in Figura 3. Per definizione esse sono in ogni punto parallele alla forza agente in quel punto su una particella di prova (e con lo stesso verso). Inoltre, per convenzione, la loro densità in una data regione dello spazio (in questo caso del piano) è proporzionale all'intensità della forza in quella regione. Poiché in approssimazione di Terra piatta la forza gravitazionale è uniforme abbiamo disegnato le linee di forza equidistanti tra di loro.

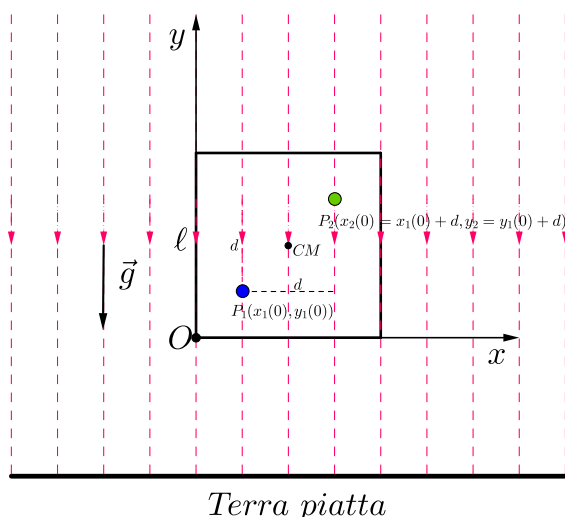


Figure 3: La Figura 1 del testo è stata riprodotta aggiungendo le linee di forza. Esse indicano in ogni punto a quale forza è soggetta una particella di prova da parte della Terra.

3. *Immaginate di essere l'osservatore O di Figura 1, scrivete le equazioni del moto delle due particelle di prova e descrivete la loro traiettoria all'interno del laboratorio.*

Sappiamo che per il principio di equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale tutti i corpi cadono sulla Terra con la stessa accelerazione, indipendentemente dalla loro massa e/o composizione. Quindi possiamo parlare di accelerazioni invece che di forze (la massa del corpo in caduta "si semplifica" nelle equazioni del moto.)

Il laboratorio dell'osservatore è un riferimento non inerziale poiché accelerato con accelerazione \vec{g} . Quindi ogni corpo al suo interno è soggetto ad una accelerazione inerziale uguale ed opposta a quella del laboratorio, cioè $-\vec{g}$. Quindi l'osservatore scrive per le due particelle

le equazioni del moto:

$$\ddot{y}_1(t) = -g + g = 0 \quad , \quad \ddot{y}_2(t) = -g + g = 0 \quad . \quad (1)$$

Lungo la direzione x non agisce alcuna forza, quindi l'osservatore scrive:

$$\ddot{x}_1(t) = 0 \quad , \quad \ddot{x}_2(t) = 0 \quad . \quad (2)$$

Se le particelle erano inizialmente ferme nel laboratorio, resteranno ferme. Intuitivamente, se il laboratorio e tutti i corpi al suo interno cadono con la stessa accelerazione (per il principio di equivalenza), non c'è nessuna accelerazione tra di loro. Solo una velocità iniziale (che resterà costante) li farà muovere; altrimenti restano fermi.

4. L'osservatore O di Figura 1 è in grado di misurare all'interno del suo laboratorio l'accelerazione con cui sta cadendo oppure no?

Come visto al punto precedente, dentro questo laboratorio le particelle hanno accelerazione nulla lungo y e quindi se l'osservatore si basa solo sulle sue misure non può misurare l'accelerazione g con cui sta cadendo.

5. In Figura 2 disegnate le linee di forza.

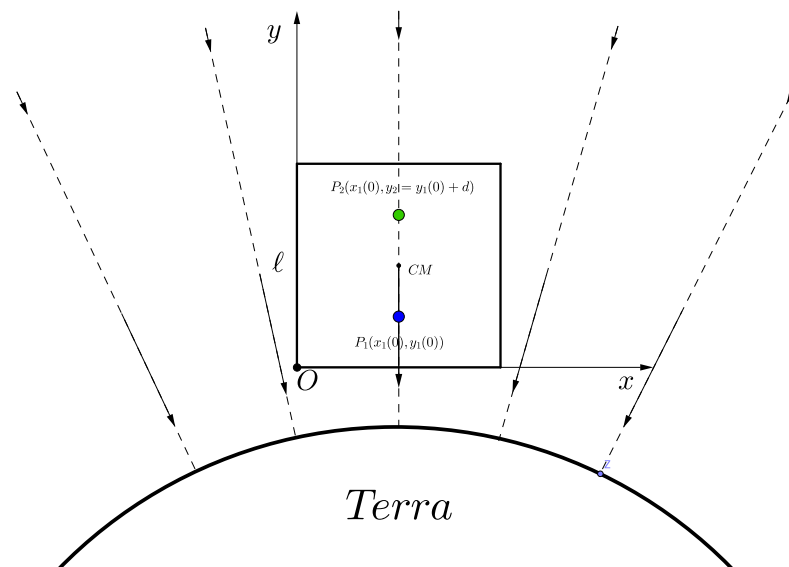


Figure 4: Per una Terra sferica le linee di forza sono dirette radialmente verso il suo centro di massa. L'intensità della attrazione gravitazionale cresce avvicinandosi alla superficie della Terra, come indicato dalle frecce. La densità spaziale delle linee di forza aumenta avvicinandosi alla Terra.

6. Immaginate di essere l'osservatore O di Figura 2. Scrivete le equazioni del moto delle particelle di prova mostrate in figura e dite quale grandezza l'osservatore deve poter misurare, almeno in prima approssimazione, per concludere che la Terra su cui sta cadendo è sferica e non piatta.

Il laboratorio è un riferimento non inerziale poiché cade lungo l'asse y con accelerazione (quella del suo centro di massa):

$$g_{CM}(t) = -\frac{GM_{\oplus}}{D^2} \quad , \quad D = R_{\oplus} + h(t) \quad (3)$$

($h(t)$ è l'altezza a cui si trova il centro di massa del laboratorio sulla superficie della terra al generico tempo t). Quindi ogni corpo all'interno di questo laboratorio è soggetto in ogni istante ad una accelerazione inerziale uguale ed opposta alla (3).

Indicando con $\delta = d/2$ la distanza di ciascuna particella dal centro di massa CM del laboratorio, l'osservatore scrive per le due particelle le seguenti equazioni del moto:

$$\ddot{y}_1(t) = -\frac{GM_{\oplus}}{(D-\delta)^2} - g_{CM} = -\frac{GM_{\oplus}}{D^2(1-\frac{\delta}{D})^2} - g_{CM} \simeq -\frac{GM_{\oplus}}{D^2}(1+\frac{2\delta}{D}) + \frac{GM_{\oplus}}{D^2} \simeq -\frac{GM_{\oplus}2\delta}{D^3} \quad (4)$$

$$\ddot{y}_2(t) = -\frac{GM_{\oplus}}{(D+\delta)^2} - g_{CM} = -\frac{GM_{\oplus}}{D^2(1+\frac{\delta}{D})^2} - g_{CM} \simeq -\frac{GM_{\oplus}}{D^2}(1-\frac{2\delta}{D}) + \frac{GM_{\oplus}}{D^2} \simeq +\frac{GM_{\oplus}2\delta}{D^3} \quad (5)$$

Le particelle si muovono con accelerazione uguale ed opposta rispetto al centro di massa del laboratorio, la 1 verso il pavimento e la 2 verso il soffitto. Questa accelerazione è un fattore $2\delta/D = d/D$ più piccola della accelerazione con cui cade il centro di massa del laboratorio. Se il laboratorio è vicino alla superficie della Terra come indicato nelle figure, $D \simeq R_{\oplus}$ e quindi:

$$\ddot{y}_1(t) \simeq -\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \cdot \frac{d}{R_{\oplus}} \quad , \quad \ddot{y}_2(t) \simeq +\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \cdot \frac{d}{R_{\oplus}} \quad (6)$$

Se le particelle partono da ferme allineate lungo l'asse y esse restano sempre allineate lungo l'asse y perché non ci sono forze lungo l'asse x .

Per scoprire la differenza rispetto al caso della Terra piatta l'osservatore deve essere in grado di misurare l'accelerazione delle particelle lungo l'asse y .

7. *Descrivete la traiettoria delle particelle di prova all'interno del laboratorio di Figura 2 come essa viene osservata dallo sperimentatore al suo interno.*

Se le particelle erano inizialmente ferme l'osservatore le vede allontanarsi l'una dall'altra, l'una verso il pavimento e l'altra verso il soffitto. L'accelerazione con cui si allontanano aumenta linearmente con la loro distanza relativa.

8. *L'osservatore O di Figura 2 è in grado di misurare all'interno del suo laboratorio l'accelerazione con cui sta cadendo oppure no?*

L'osservatore può misurare l'accelerazione (piccola) con cui le particelle si muovono rispetto al laboratorio ma non può misurare "direttamente" l'accelerazione con cui l'intero laboratorio sta cadendo.

9. *Se in Figura 2 le particelle al tempo $t = 0$ si trovassero come in Figura 1 come cambierebbe la loro traiettoria rispetto al laboratorio?*

Ci sarebbe anche una piccola accelerazione attrattiva lungo l'asse x delle due particelle l'una rispetto all'altra, come si vede dalle linee di forza.