Fisica I, *a.a.* 2013–2014 – Primo Appello
4 Giugno 2014

Anna M. Nobili

1 Risposta di un oscillatore armonico forzato

Consideriamo un oscillatore armonico forzato, ad esempio un pendolo di massa m e lunghezza ℓ sulla superficie di una terra piatta e non rotante con accelerazione locale di gravità $\vec{g}$ costante ed uniforme, e in assenza di aria (Fig.1). Ci limitiamo alle piccole oscillazioni. In assenza di forze applicate al punto di sospensione siamo in un riferimento inerziale.

Consideriamo il caso in cui punto di sospensione P del pendolo è soggetto a forze dirette lungo l'asse x' di ampiezza $F_{\rm o}$ frequenza angolare ω (periodo $2\pi/\omega$) e angolo di fase Δ. Forze di questo tipo sono generate, ad esempio, dalla microsismicità del terreno dove si trova il laboratorio.

Si chiede: a) di calcolare il rapporto tra l'ampiezza delle oscillazioni del pendolo alla generica frequenza ω e lo spostamento causato dalla forza applicata nel caso $\omega = 0$; b) di disegnare un grafico che mostri questo rapporto in funzione della frequenza forzante $0 < \omega < +\infty$.

Si suggerisce di procedere per passi rispondendo, nell'ordine, alle seguenti domande:

- i) Calcolate la frequenza delle piccole oscillazioni del pendolo quando il suo punto di oscillazione non è soggetto ad alcuna forza. Questa è la frequenza di oscillazione naturale del pendolo, che indicherete col simbolo $\omega_{\rm o}$ [fatto a lezione].
- ii) Se al punto di sospensione del pendolo viene applicata una forza costante nel tempo $F_{\rm o}$ diretta lungo x' calcolate lo spostamento della massa m tenendo conto del fatto che in questo caso il pendolo non è più in un sistema di riferimento inerziale. Disegnate lo spostamento della massa m. Indicate il suo modulo con $x_{\rm o}$.
- iii) Considerate una forza applicata con ampiezza $F_{\rm o}$, frequenza ω e angolo di fase Δ. Scrivetene la formula matematica in funzione del tempo [fatto a lezione].
- iv) Scrivete l'equazione del moto del pendolo in presenza di questa forza applicata. Passate al piano complesso [fatto a lezione].
- v) Scrivete una possibile soluzione particolare, imponete che soddisfi l'equazione del moto complessa e trovate la soluzione del moto del pendolo [fatto a lezione].
- vi) Nella soluzione v) trascurate possibili sfasamenti tra la forza applicata e l'oscillazione prodotta, e considerate solo l'ampiezza (reale) delle oscillazioni. Indicatela con $x(\omega)$. In $x(\omega)$ eliminate l'ampiezza della forza applicata $F_{\rm o}$ esprimendola in termini del modulo $x_{\rm o}$ dello spostamento causato nel caso $\omega = 0$ (utilizzate la risposta alla domanda ii)).
- vii) A questo punto avete il rapporto $x(\omega)/x_{\rm o}$. Rappresentate questo rapporto graficamente in funzione della frequenza $0 < \omega < +\infty$. Indicate sull'asse delle ω il punto che rappresenta il valore di $\omega_{\rm o}$ calcolato per un pendolo di lunghezza $\ell = 1\,{\rm m}$ essendo $g = 9.8\,{\rm m/s^2}$. Dite a quale valore tende il rapporto $x(\omega)/x_{\rm o}$ per $\omega \gg \omega_{\rm o}$.

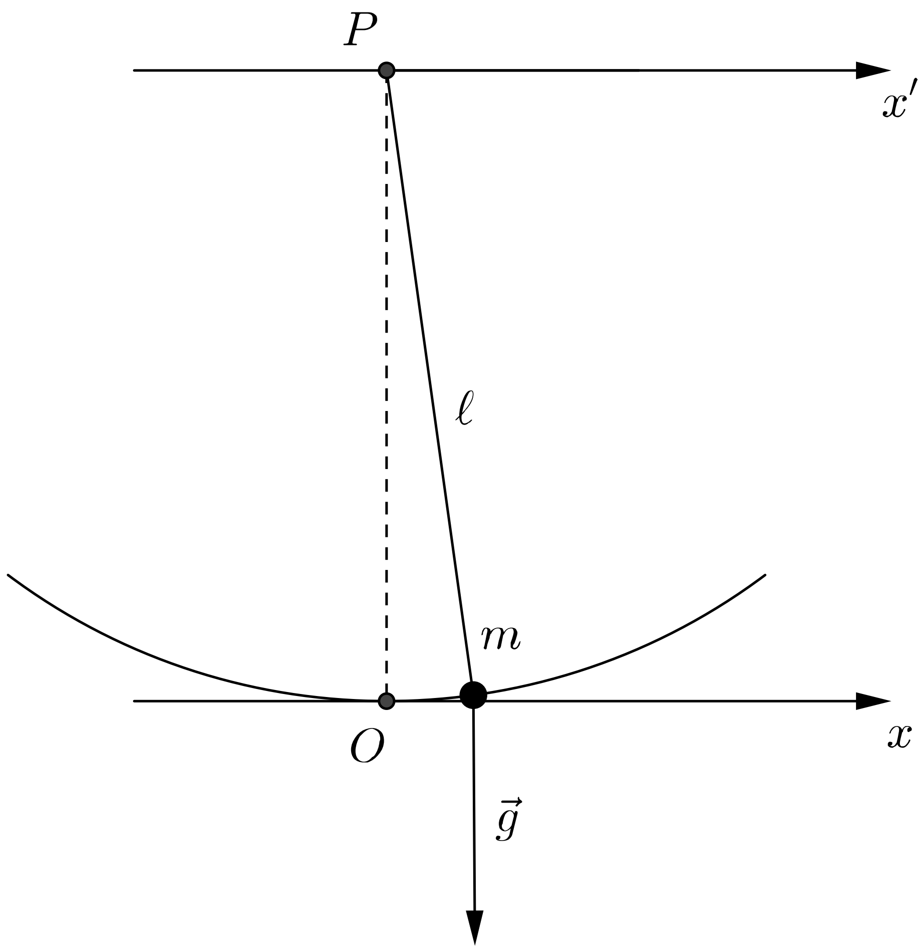

Figure 1: Pendolo di lunghezza ℓ e massa m sospeso dal punto P immerso nel campo di accelerazione costante $\vec{g}$ in assenza di aria.

- viii) Sulla base dei risultati ottenuti dite come risponde un pendolo alle forze orizzontali di microsismicità del terreno a seconda della loro frequenza nei due casi: $\omega \ll \omega_\text{o}$ e $\omega \gg \omega_\text{o}$.

2 Soluzione

- i) La frequenza di oscillazione naturale di un pendolo nella approssimazione di piccole oscillazioni è:
$$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad \text{da cui} \qquad P_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad . \tag{1}$$
Questo risultato si ottiene scrivendo l'equazione fondamentale di Newton per il moto del pendolo, che vale in un riferimento inerziale. Per deviazioni di un piccolo angolo ϑ rispetto alla verticale, il pendolo è soggetto alla forza gravitazionale $F_{grav} \simeq -m_g g\vartheta$, e quindi il suo moto deve obbedire all'equazione di Newton:
$$m_i\ddot{x} = F_{grav} \simeq -m_g g\frac{x}{\ell} \tag{2}$$
con $x = \ell\vartheta$, m_i la massa inerziale e m_g la massa gravitazionale del pendolo. Per il principio di equivalenza (verificato sperimentalmente) $m_i = m_g$, quindi:
$$\ddot{x} \simeq -\frac{g}{\ell}x \tag{3}$$
che è l'equazione di un oscillatore armonico con frequenza $\omega_o = \sqrt{g/\ell}$ (periodo $P_o = 2\pi/\omega_o$).
Per $\ell = 1\,\mathrm{m}$ ($g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$), $\omega_o \simeq 3.13\,\mathrm{rad/s}$, $P_o \simeq 2\,\mathrm{s}$
- ii) Se sul punto di sospensione del pendolo agisce una forza costante diretta lungo x' esso si muove con una accelerazione costante e per il pendolo è come se si trovasse dentro un autobus accelerato lungo x' (riferimento non inerziale). Quindi, analogamente ad un passeggero dentro l'autobus, la massa del pendolo è soggetta ad una accelerazione uguale ed opposta a quella dell'autobus (e ad una forza pari al prodotto di questa accelerazione per la propria inerziale del pendolo, che per questo si chiama "forza inerziale"). Lo spostamento del pendolo ha quindi verso opposto a quello della accelerazione del punto di sospensione. Se a_o è l'accelerazione costante del punto di sospensione, che assumiamo diretta verso le x' negative, la forza inerziale $m_i a_o$ agente sul pendolo è diretta verso le x positive e l'equazione del moto nel riferimento non inerziale (accelerato, che indico col pedice NI) è:
$$m_i\ddot{x}_{\mathrm{NI}} \simeq -m_g g\frac{x}{\ell} + m_i a_o \tag{4}$$
Lo spostamento prodotto dalla forza applicata, che chiamo x_o si ottiene quando il pendolo è in equilibrio, cioè le due forze agenti su di esso si compensano esattamente e la sua accelerazione $\ddot{x}_{\mathrm{NI}} = 0$ è nulla, cioè (essendo $m_i = m_g$ e $g/\ell = \omega_o^2$):
$$0 \simeq -m_g g\frac{x_o}{\ell} + m_i a_o \quad \Rightarrow x_o = a_o/\omega_o^2 \tag{5}$$
Concludiamo che se il punto di sospensione si muove con una accelerazione costante a_o la posizione di equilibrio del pendolo si sposta in direzione opposta di una quantità a_o/ω_o^2. Questa è la nuova posizione di equilibrio nel riferimento accelerato; attorno ad essa il pendolo oscilla con la sua frequenza naturale $\omega_o = \sqrt{g/\ell}$ quando viene allontanato di un piccolo angolo. L'unico effetto della accelerazione del punto di sospensione è lo spostamento della posizione di equilibrio. La direzione del filo di sospensione nella nuova posizione di equilibrio indica la verticale locale per l'osservatore che si trova nel riferimento accelerato (non inerziale).

- iii) La forza applicata sul pendolo si può scrivere come:

$$F = F_o \cos(\omega t + \Delta) \tag{6}$$

- iv) L'equazione del moto del pendolo sul quale agisce questa forza è:

$$m\ddot{x} + m\omega_o^2 x = F_o \cos(\omega t + \Delta) \tag{7}$$

e in forma complessa ($z = x + iy$)

$$\ddot{z} + \omega_o^2 z = \frac{F_o}{m} e^{i(\omega t+\Delta)} \tag{8}$$

- v) Cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$z_p = \varrho e^{i(\omega t+\delta)} \qquad (\varrho \in \mathbb{R}) \tag{9}$$

e imponendo che essa risolva l'equazione del moto (8) otteniamo:

$$-\omega^2 \varrho e^{i\omega t} e^{i\delta} + \omega^2 \varrho e^{i\omega t} e^{i\delta} = \frac{F_o}{m} e^{i\omega t} e^{i\Delta} \tag{10}$$

quindi

$$\varrho e^{i\delta} = \frac{F_o/m}{\omega_o^2 - \omega^2} e^{i\Delta} \tag{11}$$

e per la soluzione in funzione del tempo $z_p(t)$:

$$z_p(t) = \frac{F_o/m}{\omega_o^2 - \omega^2} e^{i(\Delta-\delta)} e^{i\omega t} \tag{12}$$

- vi) Nella (11) l'ampiezza di oscillazione, che si richiede di indicare come $x(\omega)$ senza tenere conto della fase è:

$$x(\omega) = \frac{F_o/m}{\omega_o^2 - \omega^2} \quad . \tag{13}$$

Sappiamo che:

$$F_o/m = a_o \text{ e } a_o = \omega_o^2 x_o \quad \Rightarrow \quad F_o/m = \omega_o^2 x_o \tag{14}$$

quindi:

$$x(\omega) = \frac{\omega_o^2}{\omega_o^2 - \omega^2} x_o \tag{15}$$

- vii)

$$\frac{x(\omega)}{x_o} = \frac{\omega_o^2}{\omega_o^2 - \omega^2} \quad . \tag{16}$$

Il rapporto $x(\omega)/x_o$), funzione di $0 < \omega < +\infty$, vale 1 per $\omega = 0$, tende a $+\infty$ per $\omega \to \omega_o$ da sinistra ($\omega < \omega_o$), tende a $-\infty$ per $\omega \to \omega_o$ da destra ($\omega > \omega_o$), tende a $-(\omega_o/\omega)^2$ per $\omega \gg \omega_o$ e va a zero (da sotto) per $\omega \to +\infty$. Questo per $x_o > 0$, cioè nel caso di forze applicate al punto di sospensione nella direzione delle x' negative. In molti casi interessa solo il modulo di $x(\omega)$, cioè di quanto il pendolo viene spostato a causa della forza di ampiezza F_o e frequenza ω applicata al punto di sospensione.

- viii) Per una forza di modulo F_o e frequenza $\omega \ll \omega_o$ risulta $x(\omega) = x_o$, cioè il pendolo subisce lo stesso spostamento prodotto da una forza costante F_o pari l modulo della forza ad esso applicata (cioè il massimo). Invece se la forza ha modulo F_o ma frequenza $\omega \gg \omega_o$ lo spostamento è (in modulo) x_o moltiplicato per il rapporto $(\omega_o/\omega)^2$, che è molto piccolo, cioè il pendolo è insensibile alle forze orizzontali dovute alla microsismicità del terreno le cui frequenze sono molto maggiori della sua frequenza naturale mentre sente tutte quelle la cui frequenza è minore della sua frequenza naturale.