Fisica I, *a.a.* 2013–2014 – Secondo Appello
25 Giugno 2014

Anna M. Nobili

1 Moti su traiettoria curvilinea

Consideriamo un ciclista che guidi una bicicletta molto leggera (di massa trascurabile rispetto alla propria) e in condizioni che si possa trascurare la resistenza dell'aria.

- i) Partiamo dal caso semplice in cui il ciclista percorra una traiettoria rettilinea a velocità costante v. Disegnate le forze in gioco e la posizione di equilibrio del ciclista. Cosa deve fare il ciclista per non cadere dato che la base di appoggio del suo baricentro è molto stretta?
- ii) Il ciclista si muove ora con velocità di modulo v su una traiettoria circolare di raggio r. Disegnate le forze in gioco e la posizione di equilibrio che il ciclista deve avere in questo caso per mantenere la velocità data sulla traiettoria data. Calcolate l'angolo tra l'asse di simmetria del corpo del ciclista (passante per il suo centro di massa) e la retta perpendicolare al terreno all'equilibrio.
- iii) Dite quale proprietà deve aver il terreno affinché il ciclista possa stare nella posizione di equilibrio calcolata senza cadere.

Consideriamo ora un treno che debba percorrere a velocità V costante in modulo un arco di cerchio di raggio R.

- i) Si sa che quando il treno deve fare una curva verso destra la massicciata è costruita in modo che la rotaia di sinistra sia più alta di quella di destra di una quantità Δh (viceversa, per una curva a sinistra la rotaia sopraelevata è quella a destra). Le rotaie sono separate dalle distanza d (ovviamente minore di R). Calcolate Δh per un treno che debba mantenere velocità costante V su una curva di raggio R.
- ii) Date il valore numerico di Δh per una curva con $R = 200\,\mathrm{m}$ e un treno che mantenga una velocità costante (in modulo) $V = 80\,\mathrm{km/hr}$ sapendo che la distanza tra i binari è $d = 1.5\,\mathrm{m}$ circa (varia nei diversi paesi).
- iii) Dite perché secondo voi viene usato questo accorgimento della sopraelevazione e quale vantaggio ne trae il passeggero del treno. Dite cosa vede il viaggiatore nel caso ii) se il suo treno invece di viaggiare ad $80\,\mathrm{km/hr}$ viaggia ad una velocità maggiore (oppure minore).

2 Soluzione

Caso del ciclista (trascurando l'effetto dell'aria).

- i) Se la traiettoria è rettilinea sul ciclista agiscono solo la forza gravitazionale $\vec{F}_g$ e la reazione $\vec{R}$ del supporto (la strada) su cui corre la bicicletta. La forza $\vec{F}_g$ è applicata nel baricentro del ciclista (la massa della bici è considerata trascurabile), è sempre lungo la verticale e diretta verso il basso. Affinché ci sia equilibrio essa deve essere perfettamente bilanciata da $\vec{R}$, che perciò deve essere anch'essa verticale. Se il ciclista mantiene il piano che passa per la bici e per il suo baricentro perpendicolare al terreno il vettore $\vec{R}$ giace su questo piano (non ha alcuna componente orizzontale perpendicolare ad esso), il terreno sviluppa un valore R (modulo della forza) quanto basta per controbilanciare la forza gravitazionale sul ciclista. Se il ciclista ha massa maggiore il terreno sviluppa una forza maggiore, ma sta a lui mantenere la bici e il suo corpo perpendicolari al terreno. Se si inclina da un lato, la forza gravitazionale resta verticale mentre la reazione del terreno acquista una componente orizzontale (nella direzione in cui si è inclinato), le due forze non possono bilanciarsi e il ciclista cade dal lato verso il quale si è inclinato.

  Siccome la base di appoggio della bici è molto stretta non è facile mantenere la proiezione del baricentro al suo interno, che è la condizione per non cadere. Come mai allora quasi tutti sappiamo andare in bicicletta? Perché in modo automatico, mentre procediamo in linea retta pieghiamo continuamente il manubrio di piccoli angoli da un lato e poi da quello opposto (il che fa piegare ogni volta il resto della bici in verso opposto) in modo da allargare la base di appoggio "dinamica" della bici e rendere possibile che la proiezione del nostro baricentro resti agevolmente al suo interno. Questo movimento è più facile quando si è in moto rispetto a quando si è fermi, e infatti restare in equilibrio su una bici da fermi è un'abilità che pochi possiedono. All'inizio, quando si impara ad andare in bicicletta è istintivo per andare dritti cercare di tenere il manubrio fermo, e infatti si cade.

- ii) Consideriamo un sistema di riferimento $\mathcal{R}_\mathcal{I}$ il cui piano orizzontale x, y passa per il baricentro del ciclista e contiene la traiettoria circolare di raggio R da lui percorsa il cui centro coincide con l'origine O degli assi. L'asse z coincide con la verticale locale lungo la quale agisce la forza gravitazionale. Tutti gli assi sono fissi e il riferimento è inerziale. Per mantenersi in moto circolare uniforme su questa traiettoria il vettore velocità $\vec{v}$ del ciclista deve avere modulo costante v ed essere sempre diretto verso il centro. Come noto, e come è mostrato in Fig. 1, per mantenersi su questa traiettoria circolare occorre una accelerazione sempre diretta verso il centro di modulo costante $a = v^2/R$, e quindi una forza, applicata al baricentro del ciclista, sempre diretta verso il centro O di modulo costante mv^2/R (m è la massa del ciclista). Poiché la forza gravitazionale è sempre verticale questa forza nel piano orizzontale deve essere fornita dalla strada, e ciò richiede che il ciclista si inclini verso il centro O della curva, come mostrato in Fig. 2: a parità di massa del ciclista e di velocità sulla curva, più stretta è la curva (minore è R), più grande deve essere la forza nel piano orizzontale più il ciclista si deve inclinare; a parità di massa e raggio, più grande è la velocità del ciclista, più deve inclinarsi (notare che in questo caso la relazione è quadratica!).

  L'angolo di inclinazione α necessario per mantenere l'equilibrio si calcola dalla Fig. 2: α è l'angolo al vertice più in basso del triangolo rettangolo centrato nel baricentro del ciclista il cui cateto orizzontale è la forza diretta verso il centro mv^2/R mentre quello verticale è

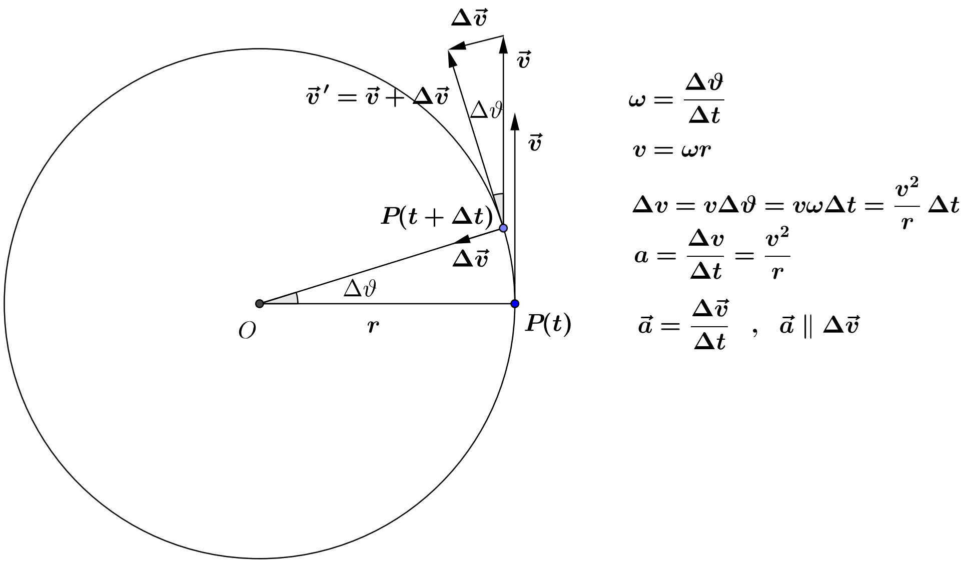

Figure 1: Il baricentro del ciclista è come il punto P che si muove lungo la circonferenza di raggio r e centro O a velocità di modulo costante v. Per mantenere questa velocità il punto Pdeve avere una accelerazione di modulo costante v^2/R sempre diretta verso il centro O.

Figure 2: Somma delle forze agenti sul ciclista nel riferimento inerziale $\mathcal{R}_{\mathcal{I}}$ mentre percorre un arco di circonferenza (sta curvando verso la sua sinistra) il cui centro coincide con l'origine di $\mathcal{R}_{\mathcal{I}}$.

la forza gravitazionale mg, quindi:

$$\tan\alpha = \frac{v^2/r}{g} \tag{1}$$

Invece di studiare il problema nel riferimento inerziale $\mathcal{R}_\mathcal{I}$ possiamo scegliere di studiarlo in un riferimento $\mathcal{R}_{\mathcal{N}\mathcal{I}}$ centrato nel centro di massa del ciclista e solidale con lui mentre si muove lungo l'arco di circonferenza. Questo riferimento è non inerziale per via della accelerazione diretta verso il centro O, e quindi in esso il ciclista è soggetto anche alla forza centrifuga, di modulo costante mv^2/R e sempre diretta radialmente verso l'esterno della curva. Come si vede, se il ciclista è inclinato dell'angolo α calcolato sopra essa è esattamente uguale ed opposta alla risultante della forza gravitazionale e della reazione della strada mostrate in Fig. 2. L'osservatore solidale con il ciclista conclude che è soggetto ad una forza totale nulla e quindi è in equilibrio. La conclusione è la stessa indipendentemente dal sistema di riferimento usato: per stare in equilibrio sulla curva il ciclista si deve inclinare verso l'interno della curva stessa di un angolo α dato dalla (1)

Si noti che la forza di Coriolis è nulla perché nel riferimento $\mathcal{R}_{\mathcal{N}\mathcal{I}}$ solidale con il ciclista egli è fermo per definizione. Non bisogna confondere questo problema con quello di un corpo che si muove su una giostra rotante.

- iii) Il terreno deve fare sufficiente attrito per sviluppare la reazione diretta verso l'interno della curva richiesta. È noto che con la pioggia (in generale col terreno bagnato, o peggio ancora cosparso di olio) e/o con le gomme lisce è facile cadere in rettilineo perché comunque bisogna fare piccoli movimenti col manubrio piegando leggermente la bici da un lato e poi dall'altro. Quando si vede una macchia d'olio sulla strada per cercare di non cadere bisogna mantenere il manubrio il più fermo possibile e la bici in posizione il più possibile verticale. Lo stesso accorgimento deve essere usato se sulla strada c'è ghiaccio. Muoversi su una strada ghiacciata è difficile persino con 4 ruote –in automobile; per minimizzare i rischi bisogna andare più dritti possibile senza frenare né accelerare. In curva la superficie di contatto delle ruote con la strada è minore perché la bici inclinata, e quindi tutto è più difficile (tanto più difficile quanto maggiore è l'inclinazione richiesta per mantenere l'euilibrio).

Caso del treno.

- i) Per il treno vale quanto detto sopra per il ciclista, salvo per il fatto che la sua base di appoggio è larga. Per percorrere una curva di raggio R (la distanza tra i binari, detta scartamento, si trascura) a velocità costante (in modulo) V il treno si deve piegare verso l'interno della curva, ed è per questo che la massicciata è sopraelevata come mostrato in Fig. 3, dell'angolo α' (lo stesso che nel caso della bici, con le grandezze date dal testo per il treno):
$$\tan\alpha' = \frac{V^2/R}{g} \tag{2}$$
Come mostrato in Fig. 4:
$$\Delta h = d\sin\alpha' \tag{3}$$

- ii) Con i valori dati dal testo (80 km/hr = 2.22 · 10 m/s)
$$\tan\alpha' = \frac{4.94\cdot 10^2/200}{9.8} = 0.252 \qquad \Rightarrow \alpha' \simeq 14.1^\mathrm{o} \tag{4}$$
e quindi $\Delta h \simeq 3.66\cdot 10^{-1}\,\mathrm{m} \simeq 37\,\mathrm{cm}$. Confrontando con dati in rete questo valore sembra troppo grande. In effetti in genere si evita di costruire binari con curve molto strette, perciò il valore $R = 200\,\mathrm{m}$ non è realistico. Se prendiamo invece $R = 500\,\mathrm{m}$ otteniamo $\alpha' \simeq 5.75^\mathrm{o}$ e $\Delta h \simeq 15\,\mathrm{cm}$, che torna con i valori che si trovano in rete.

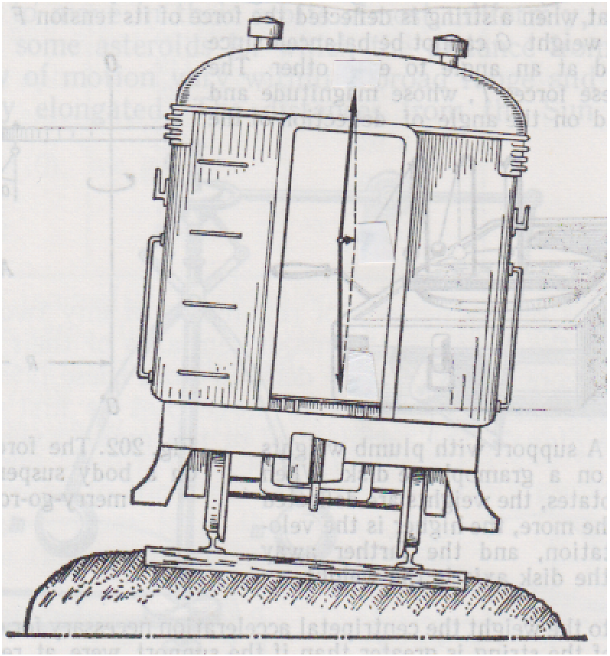

Figure 3: Posizione di equilibrio di un treno che percorre una curva verso destra. Le due forze mostrate sono la forza gravitazionale, diretta verticalmente verso il basso, e la forza del terreno. Se il treno è inclinato correttamente, cioè la massicciata è sopraelevata verso l'esterno della quantità giusta, la loro risultante fornisce esattamente l'accelerazione verso il centro della curva che il treno deve avere per restare su di essa. ogni passeggero si inclina col treno e quindi anche per lui vale la condizione di equilibrio.

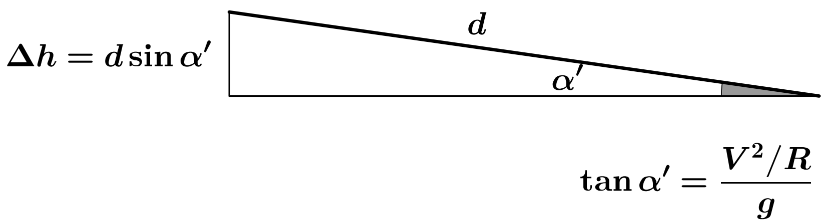

Figure 4: Questa figura mostra la geometria del binario sopraelevato di Fig. 3. Per piccoli α' vale $\sin\alpha' \simeq \tan\alpha'$

- iii) Non si può pensare che ad ogni curva il treno si comporti in maniera "intelligente" inclinandosi opportunamente come fanno due persone in moto oppure un ciclista. Per questo nelle curve la massicciata viene sopraelevata sull'esterno. Se il treno su una data curva va alla velocità per la quale la massicciata è stata sopraelevata (secondo l'equazione (4))il passeggero non si accorge di nulla perché è in equilibrio.

  Si consideri la Fig. 3, che è vista nel riferimento inerziale dove la risultante delle forze in gioco deve dare la forza verso il centro della curva richiesta per questo moto curvilineo. Nel riferimento non inerziale del treno, essa è bilanciata esattamente dalla forza centrifuga (per il treno che viaggia alla velocità prevista per quella curva e quel Δh). Quando il treno va più veloce della velocità nominale la forza centrifuga aumenta e non è più bilanciata esattamente dalla risultante disegnata in Fig. 3; questo eccesso di forza centrifuga crea un momento intorno al punto di contatto della ruota esterna con la rotaia, il quale fa da perno, e tende a ribaltare il treno verso l'esterno. Se la velocità non è eccessiva la rotaia compensa e il treno non deraglia. Se il treno percorre la curva ad una velocità minore di quella nominale succede tutto il contrario di quanto appena descritto. In ogni caso il passeggero non è più in equilibrio e viene sballonzolato ad ogni curva.