Fisica I, *a.a.* 2013–2014 – Secondo compitino
27 marzo 2014

Anna M. Nobili

1 Proiettile e bersaglio

L'osservatore O di Fig. 1 si trova sulla superficie di una terra piatta e non rotante. Ogni punto del laboratorio è quindi soggetto alla accelerazione accelerazione di gravità locale $\vec{g} = (0, 0, -g)$, $g \simeq 9.8\,\mathrm{ms}^{-2}$. L'osservatore O dispone di un proiettile P che può essere sparato con velocità $\vec{v}_p$ allo scopo di colpire il bersaglio B che si trova ad una distanza D come mostrato in Fig. 1 ($v_p = 500\,\mathrm{ms}^{-1}$, $D = 10\,\mathrm{m}$, $h = 1.5\,\mathrm{m}$).

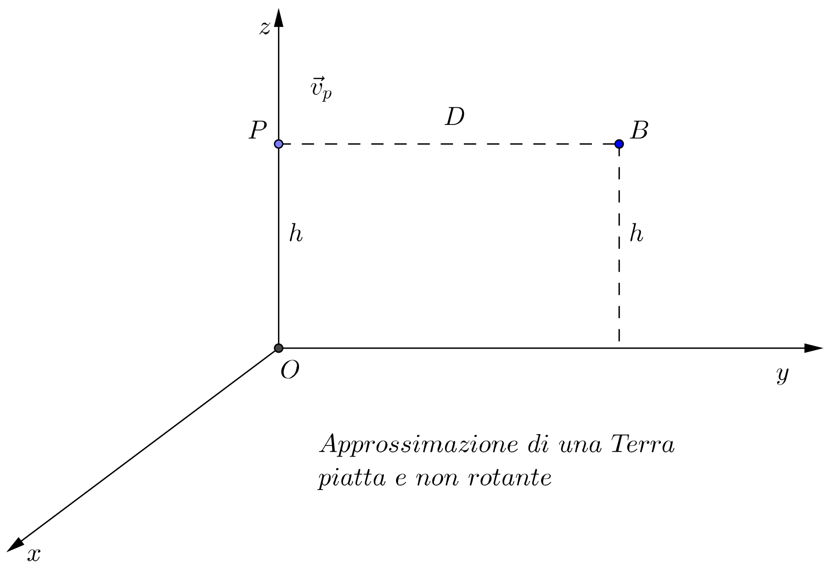

Figure 1: Proiettile e bersaglio in approssimazione di Terra piatta e non rotante (sistema di riferimento inerziale).

Dite come deve essere diretto il vettore $\vec{v}_p$ per colpire il bersaglio in ciascuno dei casi seguenti:

- Il bersaglio B è fisso.
- All'istante $t = 0$ in cui il proiettile P viene sparato il bersaglio B inizia a cadere (con velocità iniziale nulla).

Considerate ora l'osservatore O' di Fig. 2, per il quale la Terra è piatta ma ruota, e si tratta quindi di un riferimento non inerziale. O' si trova a latitudine Nord ϑ, il piano x, y è il piano del suo orizzonte, l'asse y punta verso la direzione Nord e l'asse x verso la direzione Est.

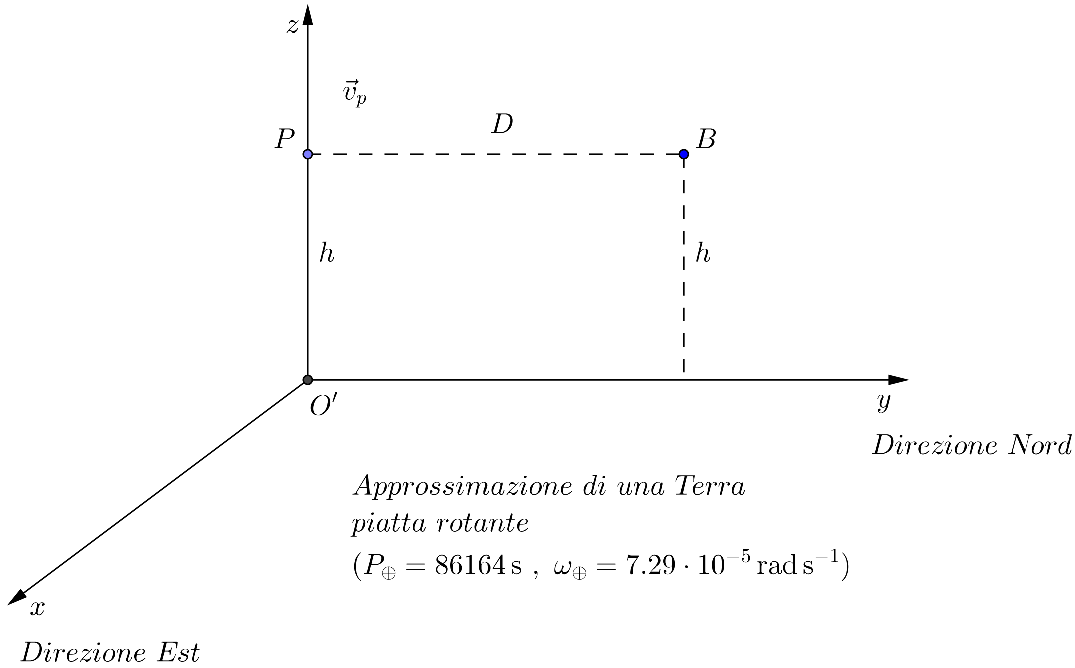

Figure 2: Proiettile e bersaglio in approssimazione di Terra piatta ma rotante. L'osservatore O' si trova nell'emisfero Nord della Terra a latitudine ϑ. Il piano x, y è il piano del suo orizzonte e in particolare prendiamo l'asse y diretto verso il Nord e l'asse x diretto verso Est.

A lezione abbiamo visto l'effetto prodotto sul proiettile dalla accelerazione di Coriolis. Tenetene conto per decidere come deve essere sparato il proiettile per colpire il bersaglio B fermo nella posizione indicata in Fig. 2.

Infine, considerate anche l'accelerazione centrifuga e dite cosa cambia se se ne tiene conto.

2 Soluzione

Caso Terra piatta non rotante e bersaglio fermo.

Le equazioni del moto del proiettile sono:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (0, 0, -g) \quad . \tag{1}$$

Per contrastare l'effetto della gravità sul proiettile questo dovrà essere sparato in direzione del bersaglio ma con una componente non nulla della velocità verso l'alto nella direzione delle z positive. Infatti durante il suo tragitto verso il bersaglio il proiettile cade anche verso il basso (direzione delle z negative) a causa della accelerazione locale di gravità. Il suo moto si svolge quindi nel piano y, z. Le condizioni al tempo iniziale $t = 0$ sono:

$$\vec{r}_o = (0, 0, h) \quad , \quad \dot{\vec{r}}_o = (0, v_{py}, v_{pz}) \quad , \quad v_p^2 = v_{py}^2 + v_{pz}^2 = 500\,\mathrm{m\,s^{-1}} \quad . \tag{2}$$

Integriamo le equazioni del moto (1) (lungo y non ci sono forze quindi la velocità rimane costante e pari al valore iniziale v_{py}):

$$\dot{\vec{r}}(t) = (0, v_{py}, -gt + v_{pz}) \tag{3}$$

$$\vec{r}(t) = (0, v_{py}t, -\frac{1}{2}gt^2 + v_{pz}t + h) \tag{4}$$

Il proiettile per colpire il bersaglio deve aver percorso lungo la direzione y tutta la distanza D che lo separa da esso, e poiché in questa direzione si muove con velocità costante v_{py} questo avverrà al tempo t_f:

$$t_f = \frac{D}{v_{py}} \qquad (D = 10\,\mathrm{m}) \tag{5}$$

Inoltre per colpire il bersaglio al tempo t_f il proiettile si deve trovare alla stessa altezza da terra del proiettile, cioè $z(t_f) = h$ che significa (usando la (4) e la (5)):

$$\frac{1}{2}gt_f^2 = v_{pz}t_f \quad , \quad v_{pz} = \frac{1}{2}gt_f \quad \Rightarrow \quad v_{pz} = \frac{1}{2}\frac{gD}{v_{py}} \quad . \tag{6}$$

Consideriamo il vettore velocità $\vec{v}_p$ del proiettile all'istante iniziale e chiamiamo α l'angolo che esso fa con l'asse y. Sarà necessariamente $0 < \alpha < \pi/2$ dato che lo scopo è quello di colpire il bersaglio posizionato in B. Vale:

$$v_{pz} = v_p \sin\alpha \quad , \quad v_{py} = v_p \cos\alpha \tag{7}$$

e quindi, dalla (6) otteniamo l'equazione che ci fornisce il valore dell'angolo di sparo α richiesto:

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\frac{gD}{v_p^2} \tag{8}$$

(si noti che le dimensioni fisiche di questa equazione sono corrette). Per $0 < \alpha < \pi/2$ questa equazione ha in effetti due soluzioni: α e $(\pi/2 - \alpha)$. Questo perché $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$ e $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$. Dalla (8) abbiamo:

$$\sin 2\alpha = \frac{gD}{v_p^2} = \frac{9.8 \cdot 10}{500^2} = 3.92 \cdot 10^{-4} \quad \Rightarrow \alpha \simeq 1.96 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{rad} \simeq 0.011^{\mathrm{o}} = 39.6\text{''} \quad . \tag{9}$$

I valori delle 2 componenti della velocità iniziale sono quindi:

$$v_{pz} = v_p \sin\alpha \simeq 5 \cdot 10^2 \cdot 1.96 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{ms^{-1}} \simeq 0.098\,\mathrm{ms^{-1}} \tag{10}$$

$$v_{py} = v_p \cos\alpha \simeq 5 \cdot 10^2 \, \mathrm{ms}^{-1} \quad . \tag{11}$$

L'altra soluzione è $\pi/2 - \alpha \simeq 1.5706 \, \mathrm{rad} \simeq 89.989^{\mathrm{o}}$, cioè il proiettile dovrebbe essere sparato quasi verticalmente, leggermente inclinato verso il proiettile, una possibilità che nessun tiratore prenderebbe in considerazione.

Caso Terra piatta non rotante e bersaglio che inizia a cadere nell'istante dello sparo.

Poiché in questo caso sia il bersaglio che il proiettile cadono lungo z con la stessa accelerazione partendo entrambi dalla stessa altezza, per colpire il bersaglio il proiettile deve essere sparato esattamente lungo la direzione delle y positive.

Alla stessa conclusione si arriva notando che dall'istante $t = 0$ proiettile e bersaglio lungo z sono in caduta libera. Quindi è come se fossero dentro un "ascensore di Einstein" in caduta libera, e abbiamo visto a lezione che dentro un ascensore di Einstein in caduta libera sulla superficie della Terra è come se la gravità non ci fosse.

Caso Terra piatta rotante e bersaglio fermo.

La situazione è quella di Fig. 2. Il proiettile viene sparato con velocità v_p verso le y positive, che in questo caso è verso il Nord del piano dell'Osservatore O'. Siccome il riferimento è rotante con velocità angolare $\vec{\omega}_\oplus$ sul proiettile agisce una accelerazione di Coriolis:

$$\vec{a}_{cor} = -2\vec{\omega}_\oplus \times \vec{v}_p \tag{12}$$

Come abbiamo visto a lezione il vettore della velocità angolare di rotazione della Terra è diretto

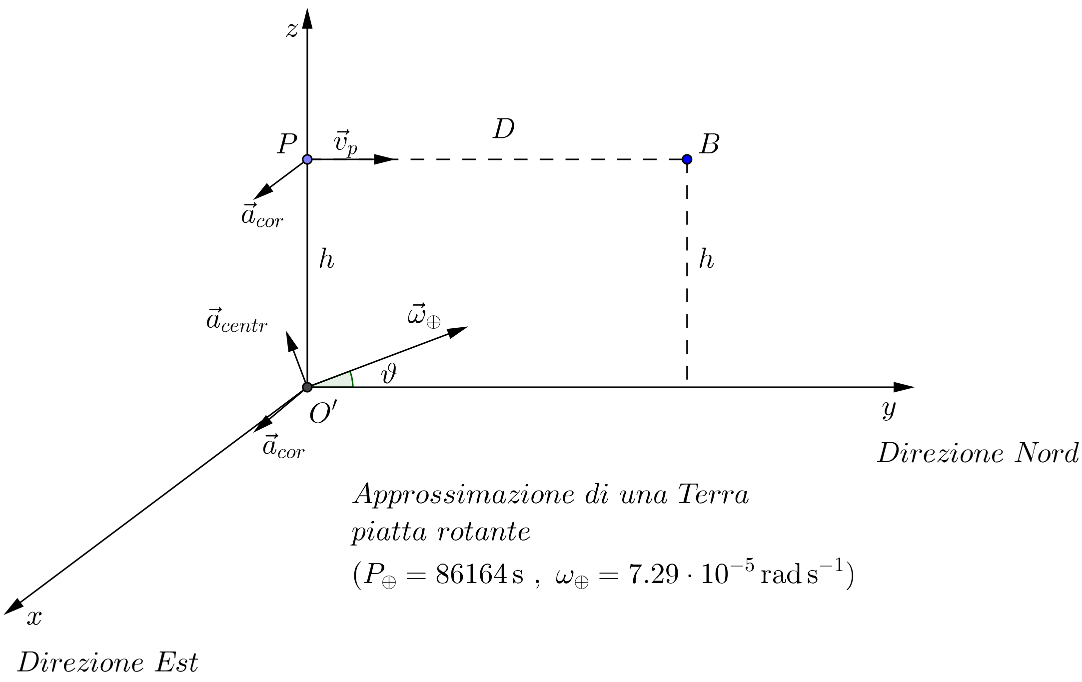

Figure 3: Vengono mostrati il vettore della velocità di rotazione della Terra e quello dell'accelerazione di Coriolis nella stessa situazione di Fig. 2 (ϑ è la latitudine dell'Osservatore O')

come in Fig. 3 quindi il vettore della accelerazione di Coriolis agente sul proiettile è diretto lungo la direzione delle x positive, è nullo all'equatore ($\vartheta = 0$) e massimo al polo ($\vartheta = \pi/2$):

$$\vec{a}_{cor} = -2\vec{\omega}_{\oplus} \times \vec{v}_p = (2\omega_{\oplus} v_p \sin\vartheta, 0, 0) \tag{13}$$

Vale:

$$a_{cor} \simeq 2 \cdot 7.29 \cdot 10^{-5} \cdot 500 \sin\vartheta \,\mathrm{ms}^{-2} \simeq 0.073 \sin\vartheta \,\mathrm{ms}^{-2} \tag{14}$$

e si tratta quindi di una accelerazione molto più piccola della accelerazione di gravità considerata prima nel caso del bersaglio fisso (allora la deviazione era lungo la direzione delle z negative): $a_{cor-max}/g \simeq 0.073/9.8 \simeq 7.4 \cdot 10^{-3}$. Le equazioni del moto del proiettile (non considerando l'effetto della gravità già studiato in precedenza) sono:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (2\omega_{\oplus} v_p \sin\vartheta, 0, 0) \quad . \tag{15}$$

Per contrastare l'effetto della accelerazione di Coriolis il proiettile deve essere sparato con una piccola componente della velocità iniziale nella direzione delle x negative. Le condizioni al tempo iniziale $t = 0$ sono quindi:

$$\vec{r}_o = (0, 0, h) \quad , \quad \dot{\vec{r}}_o = (v_{px}, v_{py}, 0) \tag{16}$$

con il vettore velocità iniziale $\vec{v}_p$ nel piano x, y inclinato di un piccolo angolo β rispetto all'asse delle y positive in modo che:

$$v_{px} = -v_p \sin\beta \quad , \quad v_{py} = -v_p \cos\beta \quad . \tag{17}$$

Integriamo le equazioni del moto (15):

$$\dot{\vec{r}}(t) = (2\omega_{\oplus} v_p \sin\vartheta \cdot t + v_{px}, v_{py}, 0) \tag{18}$$

$$\vec{r}(t) = (\omega_{\oplus} v_p \sin\vartheta \cdot t^2 + v_{px} t, v_{py} t, 0) \quad . \tag{19}$$

Vogliamo che al tempo finale t_f il il proiettile abbia percorso lungo y tutta la distanza D che lo separa dal bersaglio, quindi:

$$t_f = \frac{D}{v_{py}} \tag{20}$$

Al tempo t_f il proiettile, per colpire il bersaglio che è fermo e quindi non risente della accelerazione di Coriolis, deve avere $x(t_f) = 0$, il che impone – usando la (19):

$$\omega_{\oplus} v_p \sin\vartheta \frac{D^2}{v_{py}^2} + v_{px} \frac{D}{v_{py}} = 0 \quad \Rightarrow v_{px} = -\omega_{\oplus} v_p \sin\vartheta \frac{D}{v_{py}} \tag{21}$$

Introducendo l'angolo di sparo β definito dalle (17) otteniamo:

$$\sin\beta \cos\beta = \omega_{\oplus} \sin\vartheta \frac{D}{v_p} \tag{22}$$

nella quale tutte le grandezze a destra sono date (ϑ è la latitudine dell'Osservatore O'); si noti che anche questa equazione è dimensionalmente corretta. Scartando come nel caso (8) la soluzione in cui $\beta \simeq \pi/2$ abbiamo:

$$\begin{gathered} \sin 2\beta = \omega_{\oplus} \sin\vartheta \frac{D}{2v_p} \simeq 7.29 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{10}{10^3} \sin\vartheta \simeq 7.3 \cdot 10^{-7} \sin\vartheta \quad \Downarrow \\ \beta \simeq 3.6 \cdot 10^{-7} \sin\vartheta \text{ rad} \simeq 2.06 \cdot 10^{-5} \sin\vartheta \,^{o} \simeq 0.07 \sin\vartheta \text{ ”} \end{gathered} \tag{23}$$

che come aspettato è molto minore dell'angolo di sparo α calcolato prima per compensare l'effetto della accelerazione di gravità. Corrispondentemente, anche la velocità iniziale da dare al proiettile lungo la direzione delle x negative per compensare l'effetto della accelerazione di Coriolis è più piccola di quella calcolata per compensare l'effetto della gravità.

Anche in questo caso scartiamo l'altra soluzione $\beta \simeq \pi/2$.

Infine, sul proiettile agisce anche l'accelerazione centrifuga, che agisce anche sul bersaglio, ma siccome questo è per ipotesi fermo bisogna valutarne l'effetto sul proiettile per poterlo eventualmente "annullare". L'accelerazione centrifuga è diretta come in Fig. 3 e giace nel piano y, z; quella lungo z riduce leggermente il modulo della accelerazioen locale di gravità, quella lungo y è una accelerazione aggiuntiva verso Sud. Il modulo vale:

$$a_{centr} = \omega_{\oplus}^2 R_{\oplus} \cos\vartheta \tag{24}$$

con $R_{\oplus} \simeq 6.4 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ il raggio della Terra (l'accelerazioen centrifuga è massima all'equatore e nulla ai poli). Quindi $a_{centr} \simeq 0.034 \cos\vartheta\,\mathrm{ms^{-2}}$. Il valore massimo è poco meno della metà di quello di quello della accelerazione di Coriolis (14), che dipende dalla velocità del corpo, piuttosto grande nel caso del proiettile ($500\,\mathrm{ms^{-1}} = 500 \cdot 10^{-3} \cdot 3600\,\mathrm{km/h} = 1800\,\mathrm{km/h}$)

In conclusione possiamo dire che l'effetto più grande di cui tenere conto per colpire con precisione un bersaglio fermo è quello della gravità. In ogni caso sono tutti effetti piccoli per cui è possibile linearizzare le equazioni del moto, cioè questi effetti possono essere "aggiunti", individualmente al moto del proiettile