Fisica I, *a.a.* 2013–2014 – Quarto Appello, 1 Settembre 2014

Anna M. Nobili

1 Corpi rigidi in equilibrio sulla superficie della Terra

[1] Considerate una sbarra di lunghezza L, massa m_s e densità di massa lineare uniforme λ (unità SI). Nel suo punto di mezzo la sbarra è incernierata per un grado di libertà su un supporto verticale in modo da potersi inclinare verso l'alto e verso il basso. A cavallo della sbarra siedono 2 persone con masse m_1 ed m_2 rispettivamente ($m_1 = km_2$, $k > 1$).

- $1a$) Disegnate alcune posizioni di equilibrio delle due persone (schematizzate come punti massa) e dimostrate quantitativamente perché in tali casi il sistema " sbarra più persone" è in equilibrio. Dite di che tipo di equilibrio si tratta rispondendo alla domanda: cosa succede se il sistema viene allontanato dalla sua posizione di equilibrio?

- $1b$) Dite se sono possibili posizioni di equilibrio del sistema in cui la sbarra non sia orizzontale.

- $1c$) Dite quante sono le posizioni di equilibrio di questo sistema.

- $1d$) Considerate la sbarra in posizione orizzontale e due persone con uguale massa m alle sue estremità. Spiegate cosa devono fare – senza spostarsi dalle rispettive posizioni sulla sbarra – affinché la sbarra si inclini di un angolo α (ad esempio $\alpha < 30°$). Calcolate quantitativamente, in funzione delle grandezze note, la grandezza coinvolta nella manovra che avete appena spiegato.

Considerate un pupazzo del tipo "sempre in piedi" di altezza h_p con distribuzione di massa simmetrica attorno al proprio asse verticale e una base pesante a forma di semisfera di raggio r.

- 2) Dite dove si deve trovare il centro di massa del pupazzo affinché esso ritorni in piedi anche quando viene inclinato fino a rendere il suo asse di simmetria parallelo al piano orizzontale.

Considerate un tavolo quadrato di altezza $H = 0.8\,\mathrm{m}$, distanza tra 2 gambe $\ell = 1\,\mathrm{m}$ e centro di massa ad una altezza $h = 0.7\,\mathrm{m}$

- 3) Inclinate il tavolo da un lato mantenendo 2 gambe appoggiate a terra. Scrivete la formula per l'angolo massimo ϑ_{max} di cui potete inclinarlo senza che, una volta lasciato andare, si ribalti. Calcolate il valore numerico di ϑ_{max} per il caso in questione.

Due persone camminano. La prima porta un pesante zaino sulle spalle; la seconda è una donna incinta vicina al termine della gravidanza.

- 4) Dite perché alla prima viene naturale di inclinarsi in avanti mentre alla seconda succede il contrario.

[1] **Le risposte ai quesiti devono essere numerate come i quesiti stessi. Le grandezze cui il testo ha assegnato uno specifico simbolo devono conservare nelle risposte lo stesso simbolo.**

2 Soluzione

- $1a$) Consideriamo la sbarra da sola, senza le due persone, e un asse x solidale con essa ed origine O nel punto di mezzo attorno al quale la sbarra è incernierata (fulcro) e può ruotaree. Sia $\hat{e}_x$ il versore dell'asse x. L'unica forza in gioco è quella gravitazionale diretta lungo la verticale verso il basso. Come mostrato in Fig.1 e spiegato nella didascalia, la sbarra è sempre in equilibrio anche se non si trova in posizione orizzontale.

  Possiamo quindi considerare le due persone senza curarci più della massa della sbarra. L'unica forza in gioco è sempre quella gravitazionale, e quindi è intuitivo che le due persone si devono sedere su lati opposti rispetto al punto di mezzo, in modo da produrre momenti opposti. Poiché la forza gravitazionale è proporzionale alla massa, essa sarà minore sulla persona di massa minore la quale si deve quindi sedere più lontana dal centro della sbarra esattamente del fattore di cui la sua massa è più piccola, come mostrato in Fig. 2. In queste condizioni il sistema è in equilibrio anche se la sbarra non è orizzontale.

  Si tratta di una posizione di equilibrio di tipo detto "indifferente" in quanto se il sistema viene allontanato da essa, resta nella nuova posizione (anch'essa di equilibrio).

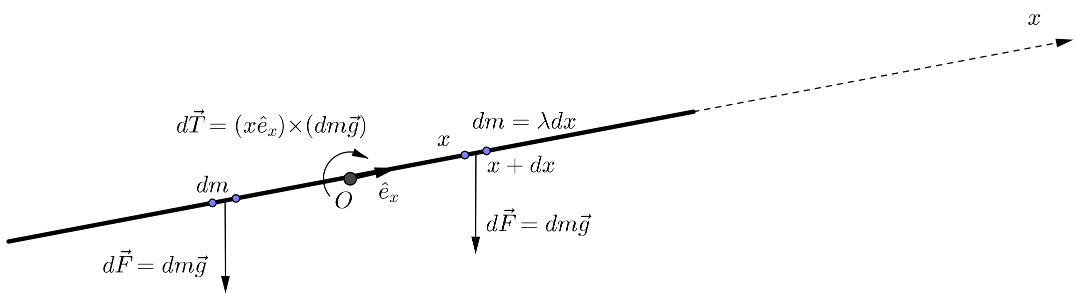

Figure 1: Sull'elemento di massa $dm = \lambda dx$ della sbarra che si trova a distanza $+x$ dall'origine, tra $+x$ e $+(x + dx)$, agisce la forza elementare $d\vec{F} = dm\vec{g}$ diretta verso il basso dovuta alla accelerazione locale di gravità. Questa forza produce un momento elementare rispetto all'origine $d\vec{T} = x\hat{e}_x \times d\vec{F} = x\hat{e}_x \times dm\vec{g}$ diretto perpendicolarmente al piano individuato da $\vec{g}$ e dall'asse x della sbarra (che è il piano del foglio) con verso entrante. Pertanto il suo effetto è quello di far ruotare la sbarra in senso orario, Tuttavia, agendo sull'elemento di massa dm diametralmente opposto a quello considerato rispetto all'origine O la gravità produce un momento elementare $d\vec{T'} = x(-\hat{e}_x) \times dm\vec{g}\times = -d\vec{T}$ esattamente opposto a quello indicato. Poiché questo vale per ogni elemento di massa, concludiamo che una sbarra di densità uniforme incernierata nel suo punto di mezzo è sempre in equilibrio anche se non si trova in posizione orizzontale. (La figura non è in scala: la distanza elementare dx è esagerata rispetto ad x per renderla ben visibile)

- $1b$) Come abbiamo visto sopra, l'equilibrio è possibile anche se la sbarra non è orizzontale.
- $1c$) Le posizioni di equilibrio sono infinite, sia perché ci sono infiniti punti che soddisfano la condizione di equilibrio (le persone sono considerate puntiformi), sia perché la sbarra può essere inclinata.
- $1d$) Le persone hanno uguale massa m e sono sedute alle estremità opposte, quindi il sistema è in equilibrio. Per passare ad un'altra posizione di equilibrio in cui la sbarra è inclinata (senza spostarsi dalle loro posizioni sulla sbarra come chiede il testo) uno dei due

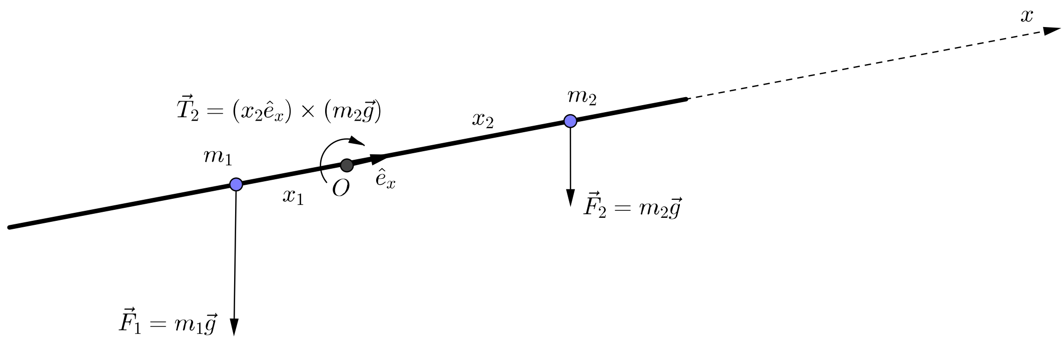

Figure 2: La forza gravitazionale agente sulla persona di massa m_2 che si trova nella posizione $x_2 > 0$ produce un momento perpendicolare al foglio, entrante: $\vec{T}_2 = x_2\hat{e}_x \times m_2\vec{g}$. Nel caso della persona di massa m_1 il momento è di verso opposto: $\vec{T}_1 = x_1(-\hat{e}_x) \times m_1\vec{g}$. Affinché i moduli dei due momenti siano uguali occorre che sia $m_1x_1 = m_2x_2$ e poiché sappiamo che $m_1 = km_2$ con $k > 1$ deve essere $x_2 = kx_1$, cioè la persona con minore massa deve sedersi più lontana dall'origine per un fattore esattamente uguale al rapporto delle masse. Ovviamente deve essere $x_2 < L/2$, altrimenti l'equilibrio non è possibile perché la persona di massa minore dovrebbe sedersi più lontana dall'origine di quanto è possibile con la sbarra di lunghezza L. La figura mostra un caso indicativo in cui $k = 2$: la persona m_1 è 2 volte più massiccia della persona m_2 e quindi quest'ultima si deve sedere ad un distanza doppia di quella alla quale si siede m_1. Si noti che anche in questo caso il risultato vale anche se la sbarra non è orizzontale.

deve darsi (con i piedi) una velocità verso l'alto sufficiente capace di generare un momento angolare di rotazione attorno al punto di incernieratura (fulcro) che porti l'inclinazione della sbarra da zero ad un valore diverso da zero. Le equazioni da usare sono (in modulo): $J = mL\Delta v$ è il momento angolare generato dalla velocità Δv (si noti che quando uno dei due si dà una velocità Δv l'altro acquista necessariamente la stessa velocità in verso opposto). Per definizione $J = I\Delta\vartheta/\Delta t$ dove $\Delta\vartheta$ è l'inclinazione raggiunta se J agisce per un tempo Δt e I è il momento di inerzia totale (sbarra più le due persone in questione) rispetto al fulcro: $I = (1/12)m_sL^2 + (1/2)mL^2$. Immaginando che una velocità media Δv agisca per un tempo Δt abbiamo:

$$J = mL\Delta v \quad J = I\Delta\vartheta/\Delta t \quad \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \frac{mL\Delta v}{(\frac{m_s}{12} + \frac{m}{2})L^2} \qquad \Delta\vartheta = \frac{m\Delta v\Delta t}{(\frac{m_s}{12} + \frac{m}{2})L} \tag{1}$$

quindi, nelle condizioni date, l'inclinazione della sbarra è proporzionale al prodotto $\Delta v\Delta t$; si può scegliere di darsi una grande velocità per un tempo breve oppure una piccola velocità per un tempo lungo.

Un altro modo di ottenere che la sbarra si inclini senza che le persone di spostino è che esse inclinino il busto in direzioni opposte, uno verso l'esterno e l'altro verso l'interno. Se poi, mentre inclinano il busto piegano anche le ginocchia in modo da spostare anche il peso delle gambe, ciascuno nella stessa direzione del busto, l'effetto è maggiore. Assumendo che ognuno dei due riesca a spostare il proprio baricentro di Δx nella direzione giusta (Δx sarà proporzionale a quanto si inclinano e a quanto piegano le ginocchia), il momento torcente è $T = 2mg\,2\Delta x = 4mg\Delta x$ e sotto il suo effetto la sbarra inizia ad inclinarsi. Non appena le due persone riprendono la posizione eretta il baricentro torna a trovarsi nel fulcro della sbarra, il momento torcente si annulla e la sbarra smette di inclinarsi restando nella posizione raggiunta. Questo principio è lo stesso che viene sfruttato dai bambini per spingersi da soli sull'altalena.

- 2) Data la simmetria del pupazzo attorno al suo asse verticale il suo centro di massa si trova lungo questo asse. Affinché il pupazzo si rialzi sempre occorre che il suo centro ci massa si trovi ad una altezza $h_{CM} < r$. Infatti in questo caso il momento della forza gravitazionale è in grado di rialzarlo anche quando fosse completamente sdraiato (i.e. con "l'equatore" della base semisferica in posizione verticale). Si noti che il centro di massa del pupazzo non può mai trovarsi esattamente alla sua estremità. Per definizione stessa di centro di massa ci deve essere la stessa quantità di massa ai due lati opposti del centro di massa (il pupazzo ha simmetria assiale), quindi il centro di massa può essere vicino all' estremità della base, se la parte al di sotto è molto pesante, ma mai esattamente alla sua estremità inferiore.

- 3) Affinché il tavolo non si ribalti quando viene inclinato occorre che la forza gravitazionale agente sul suo centro di massa e diretta verticalmente verso il basso produca un momento rispetto al punto di appoggio (il punto di mezzo del segmento che congiunge i due piedi che poggiano a terra quando il tavolo viene inclinato) che faccia ricadere il tavolo. Se esso viene inclinato verso destra questo succede se la forza gravitazionale ha un braccio non nullo a sinistra del punto di appoggio; il contrario se viene inclinato verso sinistra; nel primo caso il momento torcente è positivo e il tavolo ricade sulle sue 4 gambe, nel secondo il momento è negativo e il tavolo si ribalta. La massima inclinazione ϑ_{max} si ha quando il momento della forza gravitazionale cambia segno, cioè quando è nullo. Questa condizione si esprime anche dicendo che la verticale passante per il centro di massa deve cadere all'interno della base di appoggio del tavolo, che è quella compresa tra le sue 4 gambe. Il momento della forza gravitazionale è nullo quando il braccio è nullo, e questo succede quando il centro di massa del tavolo si trova sulla verticale del punto di appoggio, cioè quando: $\ell/2 = h \tan\vartheta_{max}$ quindi $\tan\vartheta_{max} = (\ell/2)/h$. Per massimizzare ϑ_{max} occorre o un baricentro basso (h piccolo) e/o una base grande (ℓ grande). Con i numeri dati risulta $\tan\vartheta_{max} = 0.5/0.7$ da cui $\vartheta_{max} = 0.62\,\mathrm{rad} = 35.5°$

- 4) Un peso sulle spalle sposta il baricentro indietro, quindi per evitare che la verticale passante per esso cada fuori della base di appoggio della persona (facendola cadere all'indietro) essa si inclina in avanti riportando così tale verticale all'interno della sua base di appoggio (definita dai piedi). Al contrario, il peso di una donna in avanzato stato di gravidanza sposta il suo baricentro in avanti; la verticale passante per il baricentro potrebbe cadere fuori dalla base di appoggio e farla cadere in avanti. Inclinandosi indietro la donna riporta il baricentro dentro la sua base di appoggio.