Fisica I, *a.a.* 2013–2014 – Sesto Appello (7 Gennaio 2015 ore 15, Aula PN1)

Anna M. Nobili

1 Moto di un cilindro cavo sospeso

[1]Considerate un corpo rigido che ha la forma di un cilindro cavo di raggio interno $a = 10\,\mathrm{cm}$, raggio esterno $b = 13\,\mathrm{cm}$ e altezza $H = 25\,\mathrm{cm}$ e densità di massa uniforme $\varrho = 1.85\,\mathrm{g/cm^3}$.

1. Calcolate la massa M del cilindro.

2. Indicate con $Oxyz$ un sistema di coordinate cartesiane ortogonali con origine nel centro di massa del cilindro, asse z diretto lungo il suo asse di simmetria (verso l'alto) e assi x, y nel piano ad esso ortogonale. Calcolate i momenti di inerzia I_x, I_y, I_z rispettivamente rispetto agli assi x, y, z così definiti. Riportate esplicitamente la procedura di calcolo usando i simboli definiti. Alla fine eseguite il calcolo con i valori numerici dati. Commentate i valori trovati.

3. Quale condizione bisognerebbe soddisfare per avere i 3 momenti di inerzia tutti uguali tra di loro? In questo caso a quale corpo rigido somiglierebbe il cilindro?

4. Fissate una sbarretta sottile di massa trascurabile e lunghezza $2b$ sulla faccia superiore del cilindro passante per il centro O' della faccia stessa, di coordinate $O' = (0, 0, \frac{H}{2})$, in modo che il cilindro possa essere sospeso con un filo di lunghezza $\ell = 1\,\mathrm{m}$ fissato al punto O'. In questo modo il cilindro sospeso si allinea con buona approssimazione lungo la direzione locale di gravità.

5. Il filo ha una costante elastica di torsione $k_{tor} = \frac{\pi r^4 \mu}{2\ell}$ dove r è il suo raggio e μ il modulo elastico di taglio tipico del materiale di cui è fatto. Prendendo acciaio si ha $\mu = 79\,\mathrm{GPa}$ (G sta per Giga). Calcolate il valore numerico di k_{tor} ricordando che $\ell = 1\,\mathrm{m}$ e sapendo che $r = 300\,\mathrm{micron}$. Verificate le dimensioni di k_{tor} e confrontatele con quelle della costante elastica longitudinale k di una molla. Tenete conto che nel caso di k la molla a seguito di un allungamento dalla posizione di equilibrio richiama verso di essa con una forza proporzionale all'allungamento stesso; nel caso di k_{tor}, a seguito di una torsione di un certo angolo, il filo richiama verso la condizione di equilibrio (torsione nulla) con un momento (diretto lungo il filo) proporzionale all'angolo di torsione. Quindi, come una massa attaccata alla molla oscilla attorno alla posizione di equilibrio (allungamento nullo), così il cilindro sospeso oscilla attorno alla sua posizione di equilibrio (angolo di torsione nullo).

6. Sulla base delle considerazioni precedenti calcolate il periodo di oscillazione torsionale P_{tor} del cilindro. Usate dapprima i simboli delle grandezze fisiche coinvolte e infine calcolatene il valore numerico. Da quale momento di inerzia dipende P_{tor}? Un errore relativo del 10% in questo momento di inerzia quale errore relativo comporta in P_{tor}?

[1]**Le risposte ai quesiti devono essere numerate come i quesiti stessi. Le grandezze cui il testo ha assegnato uno specifico simbolo devono conservare nelle risposte lo stesso simbolo. Si consiglia di usare le unità di misura del sistema internazionale SI**

2 Soluzione

1. Per la massa del cilindro abbiamo:

$$M = \Big(\pi b^2 H - \pi a^2 H\Big)\varrho = \pi H \varrho \Big(b^2 - a^2\Big) = 10\,\mathrm{kg} \tag{1}$$

2. Il momento di inerzia del cilindro cavo rispetto all'asse di simmetria è:

$$I_z = 2\pi\varrho H \int_a^b r^3 dr = \frac{\pi\varrho H}{2}(b^2+a^2)(b^2-a^2) = \frac{1}{2}M(b^2+a^2) = 0.1345\,\mathrm{kg\,m^2} \tag{2}$$

I momenti di inerzia rispetto agli assi x ed y sono uguali tra loro per la simmetria attorno all'asse z e si possono calcolare nel modo seguente:

$$I_{x,y} = (I_{x,y})_{m_b} - (I_{x,y})_{m_a} \quad m_b = \pi b^2 H\varrho\ ,\ m_a = \pi a^2 H\varrho\ ,\ M = m_b - m_a \tag{3}$$

$$I_{x,y} = \frac{1}{4}m_b b^2 + \frac{1}{12}m_b H^2 - \Big(\frac{1}{4}m_a a^2 + \frac{1}{12}m_a H^2\Big) = \frac{1}{12}M_b\Big[3(b^2+a^2)+H^2\Big] = 0.1193\,\mathrm{kg\,m^2} \tag{4}$$

3. Il cilindro ha tutti i momenti d'inerzia uguali se è soddisfatta la relazione:

$$\frac{1}{12}M\Big[3(b^2+a^2)+H^2\Big] = \frac{1}{2}(b^2+a^2) \quad \Rightarrow \quad H^2 = 3(a^2+b^2) \tag{5}$$

In questo caso il cilindro è dinamicamente equivalente ad una sfera.

4. Il cilindro sospeso come descritto nel testo può oscillare in modo torsionale se si torce il filo.

5. La costante elastica di torsione ha le dimensioni fisiche di forza(Newton) x metro (ricordiamo che la costante elastica longitudinale ha le dimensioni di forza/metro):

$$k_{tor} = \frac{\pi r^4 \mu}{2\ell}\,\frac{\mathrm{m^4Nm^{-2}}}{\mathrm{m}} = \frac{\pi \mathrm{r}^4\mu}{2\ell}\,\mathrm{Nm} \tag{6}$$

Il valore numerico con i dati del testo è:

$$k_{tor} = \frac{\pi r^4 \mu}{2\ell} = 10^{-3}\,\mathrm{Nm} \tag{7}$$

6. Il momento di richiamo torsionale del filo in risposta ad una torsione attorno all'asse z di un angolo ϑ (analogo alla forza di richiamo della molla) è:

$$N_z = -k_{tor}\vartheta \quad . \tag{8}$$

Il momento angolare di rotazione attorno all'asse z del cilindro con velocità angolare $\dot{\vartheta}$ e momento d'inerzia I_z rispetto a questo asse è:

$$L_z = I_z\dot{\vartheta} \tag{9}$$

e l'equazione di Newton per il copro rigido richiede che sia:

$$N_z = \dot{L}_z \tag{10}$$

dove usiamo grandezze scalari dato che tutto avviene lungo l'asse z. Abbiamo quindi l'equazione del moto:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{k_{tor}}{I_z}\vartheta = 0 \tag{11}$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico con periodo di oscillazione (attorno all'asse z) con periodo di oscillazione torsionale:

$$P_{tor} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{k_{tor}}} \quad . \tag{12}$$

Il periodo di oscillazione torsionale attorno all'asse z dipende ovviamente dal momento d'inerzia rispetto a questo asse. Per gli effetti di un errore nella misura di I_z sul periodo torsionale abbiamo:

$$P_{tor}^2 = \frac{4\pi^2}{k_{tor}} I_z \quad \Rightarrow \quad 2P_{tor}\Delta P_{tor} = \frac{4\pi^2}{k_{tor}}\Delta I_z \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta P_{tor}}{P_{tor}} = \frac{1}{2}\frac{\Delta I_z}{I_z} \tag{13}$$

Quindi, un errore relativo del 10% nella misura del momento di inerzia I_z significa un errore relativo del 5% nel periodo torsionale