

Anna M. Nobili

## 1 Misura della accelerazione di caduta libera e condizioni iniziali

<sup>1</sup> In un laboratorio sulla superficie della Terra (di cui trascuriamo la rotazione) abbiamo un sistema di riferimento con origine nel piano orizzontale  $X, Y$  e asse verticale  $Z$  lungo la direzione della accelerazione locale di gravità  $g$ . Sull'asse verticale è fissata una massa puntiforme  $m$  che può essere rilasciata. Idealmente, all'istante  $t = 0$  dovrebbe essere rilasciata all'altezza esatta  $z_0$  e con velocità esattamente nulla, ma a causa di inevitabili errori essa viene in effetti rilasciata con  $z(0) = z_0 + \Delta z_0$  e  $v_z(0) = \Delta v_{z0}$ . Per semplicità assumiamo che non ci siano errori nelle due direzioni del piano orizzontale, e che il moto si svolga solo lungo l'asse  $Z$ .

1. Si assume  $g$  uniforme. La massa viene rilasciata come detto sopra. Scrivete l'equazione del moto, risolvetele e scrivete la legge oraria. Un osservatore  $O_1$  è in grado di misurare il tempo di caduta e la distanza percorsa dalla massa. Come procederebbe volendo misurare  $g$ ? Sapreste indicare un modo per distinguere l'effetto dell'errore in posizione da quello in velocità? Considerate infine il caso numerico in cui  $z_0 = 5$  m, l'errore in posizione al rilascio è mezzo millimetro e quello in velocità mezzo millimetro al secondo, e stimatene le conseguenze.
2. Con  $g$  uniforme e la massa rilasciata come sopra immaginate che un osservatore  $O_2$  disponga di uno strumento in grado di misurare direttamente  $g$  all'arrivo a terra (accelerometro). In questo caso la misura sarebbe influenzata dagli errori nelle condizioni iniziali oppure no?
3. Supponete ora che  $g$  non sia uniforme ma valga  $g_0 = -GM_{\oplus}/R_{\oplus}^2$  ( $M_{\oplus}, R_{\oplus}$  sono la massa e il raggio della Terra,  $G$  la costante di gravitazione universale) sul piano orizzontale e  $g(z) = -GM_{\oplus}/(R_{\oplus} + z)^2$  ad una altezza  $0 \leq z \leq z_0$ . Ad altezza  $z$  scrivete  $g(z)$  come  $g(z) = g_0 + \Delta g(z)$  e calcolate  $\Delta g(z)$  al primo ordine in  $z/R_{\oplus}$ . Rappresentate graficamente  $\Delta g(z)$  in alcuni punti diversi lungo il percorso di caduta della massa  $m$ . Poiché  $\Delta g(z) \ll g(z)$ , potete calcolare il valore di  $\Delta g(z)$  per la massa al suo arrivo assumendo che il suo moto si sia svolto come se l'accelerazione fosse uniformemente  $g_0$ . Dite che cosa misura in questo caso l'accelerometro all'arrivo e come la sua misura viene influenzata dalle condizioni iniziali. Calcolate numericamente di quanto cambia l'accelerazione di gravità per ogni metro sapendo che  $M_{\oplus} = 5.98 \cdot 10^{24}$  kg e  $R_{\oplus} = 6378$  km. Indicate questa grandezza col simbolo  $\gamma$  (si tratta di un gradiente di gravità) e dite quali sono le sue dimensioni nel SI di misura. Dite infine quanto vale  $\gamma$  in unità di  $g_0/m$ .

---

<sup>1</sup>Le risposte ai quesiti devono essere numerate come i quesiti stessi. Le grandezze cui il testo ha assegnato uno specifico simbolo devono conservare nelle risposte lo stesso simbolo. Si consiglia di usare le unità di misura del sistema internazionale SI

## 2 Soluzione

1. L'equazione del moto è:

$$\ddot{z} = -g \quad (1)$$

che integrata 2 volte con le condizioni iniziali date fornisce l'altezza del corpo in caduta al generico tempo  $t > 0$  (essendo  $t = 0$  il tempo iniziale di rilascio del corpo), cioè la legge oraria:

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \Delta v_{z_0}t + z_0 + \Delta z_0 . \quad (2)$$

Al tempo  $t_f$  si ha  $z(t_f) = 0$  e il corpo è arrivato a terra:

$$\frac{1}{2}gt_f^2 = z_0 + \Delta z_0 + \Delta v_{z_0}t_f . \quad (3)$$

In linea di principio, misurando il tempo di arrivo a terra e l'altezza di rilascio possiamo ottenere il valore di  $g$ . Se gli errori fossero nulli ( $\Delta z_0 = 0$  e  $\Delta v_{z_0} = 0$ ), nel caso numerico dato  $z_0 = 5$  m il tempo di caduta sarebbe  $t_f \simeq 1$  s. Con gli errori dati ( $\Delta z_0 = 5 \cdot 10^{-4}$  m e  $\Delta v_{z_0} = 5 \cdot 10^{-4}$  m/s) l'altezza di rilascio risulta sbagliata in totale di 1 mm.

Per distinguere l'errore in altezza dall'errore in velocità notiamo che l'errore nella velocità iniziale aumenta linearmente con il tempo di caduta mentre quello in altezza non dipende dal tempo di caduta. Quindi, facendo diverse misure a diverse altezze, se vediamo che l'errore complessivo aumenta linearmente con l'altezza vuol dire che esso è dominato dall'errore nella velocità iniziale.

2. Se l'accelerazione locale di gravità è uniforme e abbiamo un accelerometro in grado di misurarla direttamente le condizioni iniziali non influenzano la misura.  
 3. Se invece l'accelerazione locale di gravità varia con l'altezza nella forma :

$$g(z) = -\frac{GM_{\oplus}}{(R_{\oplus} + z)^2} \quad (0 \leq z \leq z_0) \quad (4)$$

dato che la forza gravitazionale diminuisce inversamente al quadrato della distanza dal centro di massa del corpo che la produce, siccome  $z \ll R_{\oplus}$ , possiamo scrivere:

$$g(z) = -\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2(1 + \frac{z}{R_{\oplus}})^2} \simeq g_0 \left(1 - 2\frac{z}{R_{\oplus}}\right) \quad \text{con} \quad g_0 = -\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \quad (5)$$

e quindi, ad una generica altezza di caduta  $z$  si ha una deviazione della accelerazione di gravità dal suo valore sulla superficie della Terra di:

$$\Delta g(z) \simeq -2g_0 \frac{z(t)}{R_{\oplus}} \quad (6)$$

che è negativa (diretta verso il basso); in modulo è nulla per  $z = 0$ , e massima per  $z = z_0$  (è lineare con  $z$ ).

Poiché  $\Delta g(z) \ll g_0$  possiamo usare per  $z(t)$  la legge oraria (2) che avevamo calcolato nel caso di accelerazione di gravità uniforme (cioè, possiamo linearizzare l'equazione per  $\Delta g(z)$ ). Otteniamo:

$$\Delta g(z) \simeq 2\frac{g_0}{R_{\oplus}} \left(\frac{1}{2}g_0t^2 - \Delta v_{z_0}t - z_0 - \Delta z_0\right) . \quad (7)$$

Come si vede, il fatto che l'accelerazione di gravità non sia uniforme introduce una dipendenza del valore misurato dalle condizioni iniziali e dai relativi errori.

Possiamo scrivere la (7) come:

$$\Delta g(z) \simeq \gamma \left( \frac{1}{2} g_0 t^2 - \Delta v_{z_0} t - z_0 - \Delta z_0 \right) \quad (8)$$

con:

$$\gamma = 2 \frac{g_0}{R_\oplus} \text{ ms}^{-2}/\text{m} \quad (9)$$

che ha le unità dimensionali di accelerazione su metro, come deve essere perché si tratta di un gradiente di gravità. Se scriviamo il gradiente di gravità in unità di  $g_0/\text{m}$  abbiamo:

$$\gamma = \frac{2}{R_\oplus} g_0/\text{m} \simeq 3.14 \cdot 10^{-7} g_0/\text{m} \quad (10)$$

cioè l'accelerazione locale di gravità varia in altezza di circa 0.3 milionesimi del suo valore per ogni metro.