Fisica I, *a.a.* 2015–2016 – Primo Appello

6 Giugno 2016, Ore 15 Aula PN1 Polo Porta Nuova

Anna M. Nobili

1 Effetti prodotti da distribuzioni di massa sferiche

(Leggete per prima cosa la nota a piè di pagina)[1]

1. È dato un guscio sferico di massa m_{guscio}, raggio R e distribuzione di massa uniforme. Il guscio ha uno spessore δ con $\delta \ll R$ (caso: guscio sottile).

   a) Dite, anche sulla base di un ragionamento semplicemente qualitativo, quanto vale l'accelerazione a_{CM} causata dalla massa del guscio nel suo centro di massa.

   b) Considerate un punto P in una posizione generica all'interno del guscio diversa dal centro di massa. L'accelerazione a_P è uguale a quella nel centro di massa. Spiegate perché.

   c) Considerate un punto Q a distanza D dal centro di massa del guscio con $D > R$. Calcolate l'accelerazione a_Q esercitata dal guscio in quel punto e disegnate il vettore $\vec{a}_Q$.

2. È dato un guscio sferico di massa m_{guscio}, raggio R e densità di massa uniforme. Il guscio ha in questo caso uno spessore d non trascurabile rispetto al raggio R (caso: guscio di spessore finito).

   d) Le accelerazioni $\vec{a}_{CM}$, $\vec{a}_P$ e $\vec{a}_Q$ definite per il guscio sottile sono le stesse che avete calcolato in quel caso. Spiegate perché.

3. È data una sfera di raggio r massa $m_{(sfera-r)}$ e distribuzione di massa uniforme ϱ.

   e) Scrivete l'accelerazione a_r causata dalla massa della sfera in un punto generico sulla sua superficie esplicitandone la dipendenza da ϱ. Fate un disegno che mostri il vettore $\vec{a}_r$ in 8 punti posti lungo un cerchio massimo sulla superficie della sfera ed equidistanti tra loro.

4. È data una sfera di raggio $R > r$ massa M e distribuzione di massa uniforme ϱ. Lungo un diametro qualunque b di questa sfera (passante quindi per il suo centro di massa) è stato scavato un piccolissimo tunnel. La massa scavata è trascurabile rispetto alla massa della sfera, la cui distribuzione di massa si può ancora considerare uniforme con densità ϱ. Dentro il tunnel lungo il diametro b si può muovere senza attrito una massa puntiforme m_p

   f) Calcolate l'accelerazione a_x che la massa M esercita sulla massa puntiforme quando questa si trova ad una distanza generica x dal centro di massa della sfera, con $-R \leqslant x \leqslant R$.

   g) Scrivete l'equazione del moto della massa puntiforme.

   h) Integrate l'equazione del moto e scrivete la legge oraria tenendo conto che la massa puntiforme viene rilasciata a $t = 0$ con $x(0) = R$ e $\dot{x}(0) = 0$

   i) Scrivete la formula che fornisce, a partire dai dati forniti, il tempo T che la massa puntiforme impiega a percorrere tutto il diametro b e ritornare al punto di partenza ed esprimetela in funzione di M e di R. Scoprirete che vi è già nota. Dite dove l'avete incontrata e cosa rappresentava.

   ℓ) Se la massa sferica ha densità $\varrho = 5.5\,\mathrm{g/cm^3}$ e diametro $2R = 1.27 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$ dite quanto vale il tempo T di cui avete scritto la formula al punto precedente.

[1] **Le risposte ai quesiti devono essere numerate come i quesiti stessi. Le grandezze cui il testo ha assegnato uno specifico simbolo devono conservare nelle risposte lo stesso simbolo. Ogni simbolo che decidete di usare deve essere definito.**

2 Soluzione

1. *a*) Nel centro di massa del guscio l'accelerazione è nulla per ragioni di simmetria (per ogni elemento di massa del guscio che attrae verso di sé ce ne è un altro dal lato opposto che attrae con la stessa intensità, stessa direzione e verso opposto.

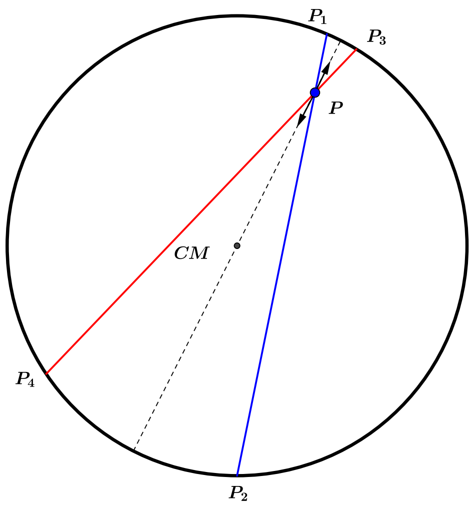

Figura 1: L'attrazione gravitazionale di un guscio sferico sottile (e non) su ogni punto al suo interno è nulla.

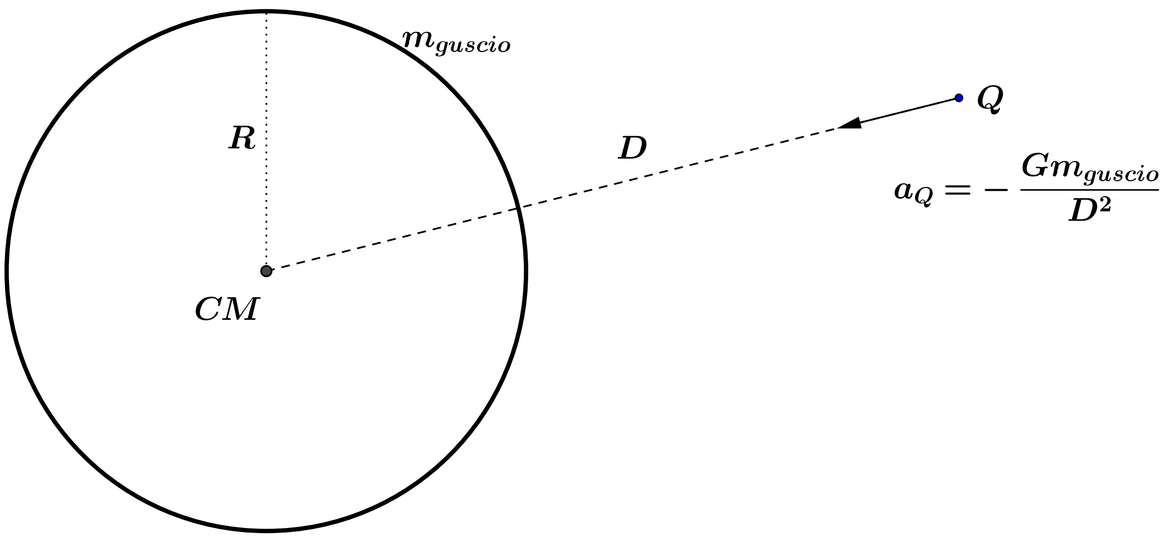

Figura 2: L'attrazione gravitazionale di un guscio sferico in un qualunque punto al di fuori di esso è la stessa che si avrebbe se tutta la massa del guscio fosse concentrata nel suo centro di massa.

b) In un punto generico P all'interno del guscio l'accelerazione gravitaionale $\vec{a}_P$ causata dalla massa del guscio deve essere nulla, come possiamo dedurre dalla Fig. 1. Prima di tutto, data la simmetria sferica del guscio consideriamo un suo cerchio massimo il cui piano contenga (oltre al centro di massa del guscio CM) anche il punto P considerato. Consideriamo quindi i due segmenti di Fig. 1 $\overline{P_1P_2}$ (blu) e $\overline{P_3P_4}$ (rosso), simmetrici rispetto al segmento che unisce il punto P al centro di massa CM (disegnato tratteggiato). Consideriamo quindi l'elemento di massa del guscio corrispondente all'arco P_1P_2 e quello corrispondente all'arco P_2P_4. Passando pi alla situazione tridimensionale, i segmenti rosso e blu individuano due coni con vertice in

P, e ciascuno di essi interseca una superficie del guscio la cui massa agisce su P, e la cui area (e quindi la cui massa) è proporzionale al quadrato del raggio (l'altezza di ogni cono). D'altro canto la forza gravitazionale decresce col quadrato del raggio, quindi la forza esercitata sul punto P è la stessa. E siccome il segno è opposto l'effetto totale è nullo, come mostrato in Fig. 1. Allargando l'apertura dei due coni possiamo coprire tutta l'area della sfera, e quindi tutta la massa del guscio, concludendo che la sua attrazione gravitazionale in ogni punto al suo interno è nulla.

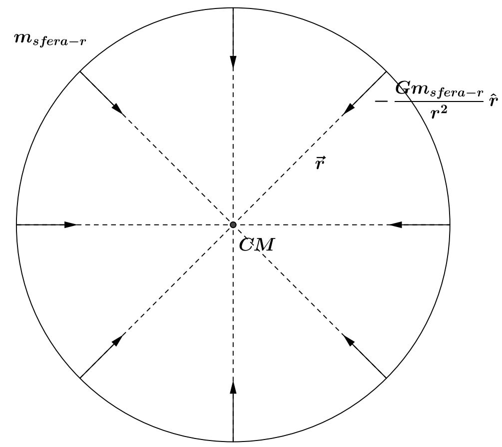

Figura 3: Attrazione gravitazionale prodotta da una massa sferica su un qualunque punto posso sulla sua superficie.

c) $a_Q = -\frac{Gm_{guscio}}{D^2}$ (vedi Fig. 2). Si tratta di una accelerazione diretta verso il centro di massa del guscio e inversamente proporzionale alla distanza dal centro di massa. Questo perché la simmetria è sferica quindi, per un punto al di fuori del guscio è come se esso fosse tutto concentrato nel suo centro di massa (non essendoci nessuna "montagna" o "valle" l'effetto del guscio al di fuori di esso è lo stesso in tutte le direzioni, quindi non distinguo tra il guscio sferico di massa m_{guscio} e un punto con la stessa m_{guscio} posto nel suo centro di massa il cui effetto su Q è attrattivo, diretto lungo la congiungente i due punti e inversamente proporzionale al quadrato della distanza

2. *d*) È tutto come nel caso del guscio sottile perché il guscio di spessore finito si può considerare come la sommatoria di tanti gusci sottili e la forza (accelerazione per unità di massa) esercitata in un punto è la somma vettoriale di quelle di ogni guscio sottile (si sommano linearmente).

3. *e*) $a_r = -\frac{Gm_{(sfera-r)}}{r^2}$ (vedi Fig. 3)

4. *f*) Dalla risposta alle domanda 1 e 2 sappiamo che un guscio sferico non produce alcun affetto su un punto massa al suo interno. Quindi, quando la massa puntiforme m_p si trova a distanza x dal centro di massa essa sente solo l'attrazione gravitazionale della massa sferica sottostante di raggio x, che conosciamo dalla risposta alla domanda 3. Quindi:

   f) $a_x = -(\frac{4}{3}\pi G\varrho)x$

   g) $\ddot{x} = -(\frac{4}{3}\pi G\varrho)x \quad \omega^2 = \frac{4}{3}\pi G\varrho$ e in funzione di M e di R: $\omega^2 = \frac{GM}{R^3}$, che è la terza legge di Keplero per un corpo di massa trascurabile rispetto ad M che orbita attorno ad esso in orbita circolare di raggio R (se l'orbita è ellittica di semiasse maggiore R, cioè raggio medio R, allora ω è la velocità angolare orbitale media del corpo in orbita attorno ad esso.

   h) $x(t) = R\cos(\omega t)$

   i) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\varrho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\varrho}}$

In funzione di M e di R: $T^2 = \frac{4\pi^2}{\omega^2} = 4\pi^2 \frac{R^3}{GM}$ che è la terza legge di Keplero ricordata sopra. Risulta quindi che il perido di oscillazione della massa puntiforme nel tunnel è uguale al periodo orbitale di una satellite in orbita di raggio R ("raso-terra") attorno alla massa sferica di raggio R.

ℓ) Con $\varrho = 5.5 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ si ha $T = 5.0686 \cdot 10^3\,\mathrm{s} = 1.41\,\mathrm{h}$

Con $R = 6.35 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ e $\varrho = 5.5 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ risulta che $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \simeq 5.9 \cdot 10^{24\,\mathrm{kg}}$, che è la massa della Terra