Fisica I, *a.a.* 2015–2016 – Primo compitino

10 Dicembre 2015, Ore 9:30 Aula Magna del Dipartimento

Anna M. Nobili

1 Esempi di legge oraria e traiettoria

[1] In un piano rappresentato dal sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy in cui $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ sono i versori lungo i rispettivi assi ($|\hat{e}_x| = 1$, $|\hat{e}_y| = 1$) un corpo puntiforme P ha un vettore posizione istantaneo (cioè ad un generico tempo t) indicato come $\vec{r}(t)$ e si muove con la seguente legge oraria:

$$\vec{r}(t) = r_\circ(\hat{e}_x \cos \omega t + \hat{e}_y \sin \omega t) \tag{1}$$

con $r_\circ$ ed ω costanti date. NOTA: In tutto l'esercizio non ci occupiamo delle forze che generano il moto considerato. Ci interessano solo posizione, velocità e accelerazione del punto P, la sua legge oraria e la sua traiettoria. Nelle figure che si chiede di disegnare usate i seguenti valori numerici: $r_\circ = 1\,\mathrm{m}$, $\omega = 2\,\mathrm{rad/s}$.

1. Scrivete le due componenti del vettore (1) nel piano Oxy, eliminate la variabile tempo t e scrivete l'equazione della traiettoria. Dite di che curva si tratta. Dite che cosa rappresenta ω; che dimensioni ha la costante T definita come $T = 2\pi/\omega$ e che cosa rappresenta. In una figura (che chiamerete Figura 1) disegnate la traiettoria e le posizioni del punto ai tempi 0 e t (generico), cioè i vettori $\vec{r}(0)$ e $\vec{r}(t)$. Dite cosa rappresenta la variable ωt, che dimensioni fisiche ha, e disegnatela.

2. Derivando la (1) rispetto al tempo una prima e una seconda volta scrivete il vettore velocità e il vettore accelerazione del punto al tempo generico t e disegnate questi vettori in Figura 1 (in scala, rispettando i valori numerico dati). Come definireste un moto che segua la legge (1)?

Considerate un punto P che si muove nel piano Oxy con la legge oraria:

$$\vec{r}(t) = r_\circ(\hat{e}_x \cos(\omega t + \alpha) + \hat{e}_y \sin(\omega t + \alpha)) \quad . \tag{2}$$

3. Rispondete alle domande 1 e 2 per un punto che si muove con la legge oraria (2), disegnando una nuova figura (Figura 2) che riferirete al caso numerico $\alpha = \pi/4$.

Considerate un punto P che si muove nel piano Oxy con la legge oraria:

$$\vec{r}(t) = r_\circ(k\hat{e}_x \cos \omega t + \hat{e}_y \sin \omega t) \tag{3}$$

con k costante adimensionale $k \neq 0$.

4. Rispondete alle domande 1 e 2 per un punto che si muove con la legge oraria (3), disegnando una nuova figura (Figura 3) che riferirete al caso numerico $k = 1.5$.

Considerate infine un punto P che si muove nel piano Oxy con la legge oraria:

$$\vec{r}(t) = r_\circ(\hat{e}_x \cos(\omega t + \alpha) + \hat{e}_y \sin \omega t) \tag{4}$$

e dite di che tipo di moto e di traiettoria si tratta.

[1] **Le risposte ai quesiti devono essere numerate come i quesiti stessi. Le grandezze cui il testo ha assegnato uno specifico simbolo devono conservare nelle risposte lo stesso simbolo. Ogni simbolo che decidete di usare deve essere definito.**

2 Soluzione

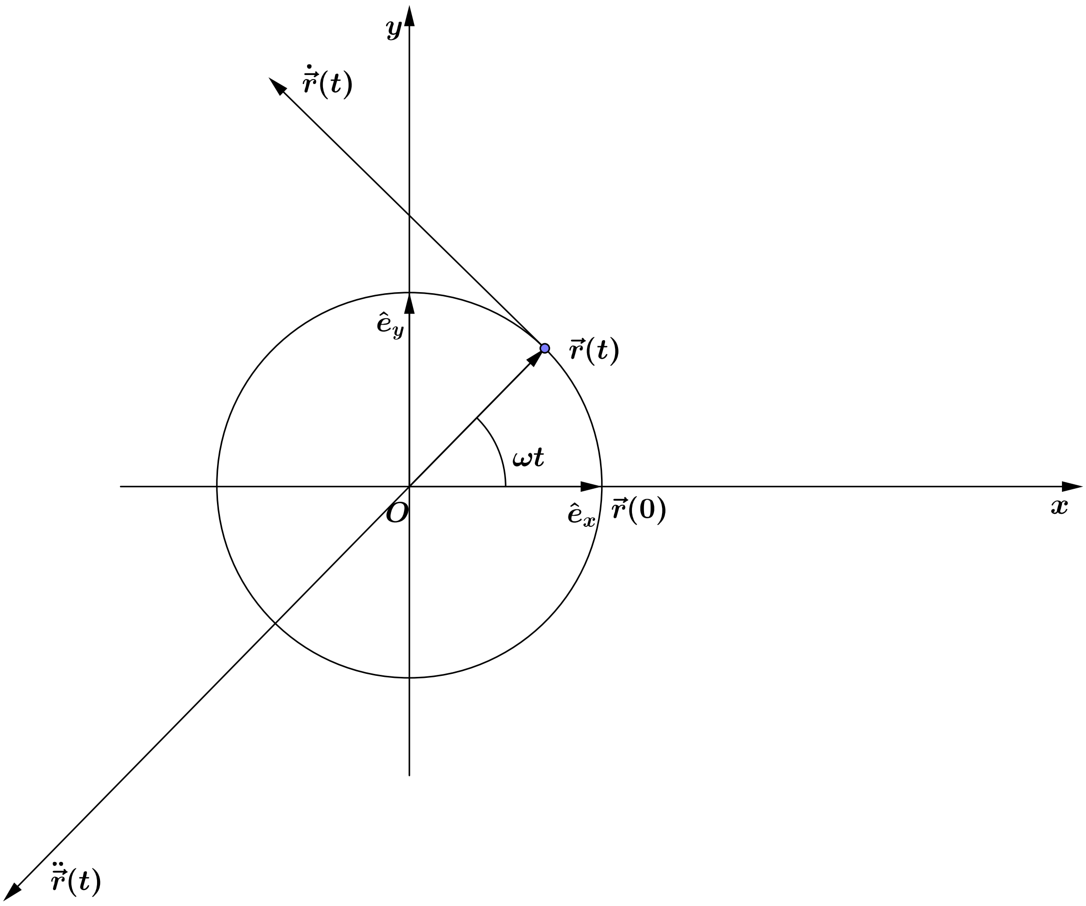

Figura 1: Caso della legge oraria (1). La figura rappresenta la traiettoria percorsa dal punto P, il suo vettore posizione al tempo iniziale $t = 0$, e i vettori posizione, velocità e accelerazione al tempo t. Nel disegno $\omega t = \pi/4$, quindi si riferisce al tempo $t = (3.14/8)\,\mathrm{s} = 0.39\,\mathrm{s}$ (dato che $\omega = 2\,\mathrm{rad/s}$). Il periodo di tempo impiegato per percorrere tutta la traiettoria è $T = 3.14\,\mathrm{s}$. La figura è in scala secondo i valori numerici dati dal testo.

1. $$x(t) = r_\circ \cos\omega t \qquad y(t) = r_\circ \sin\omega t \quad ; \quad x^2 + y^2 = r_\circ^2 \tag{5}$$

   La grandezza ωt è l'angolo che il vettore posizione spazza nel tempo t ed è misurato in radianti.

2. Il vettore velocità al generico istante t è::

   $$\dot{\vec{r}}(t) = \omega r_\circ(-\hat{e}_x \sin\omega t + \hat{e}_y \cos\omega t) \tag{6}$$

   Il vettore accelerazione al tempo t è:

   $$\ddot{\vec{r}}(t) = -\omega^2 r_\circ(\hat{e}_x \cos\omega t + \hat{e}_y \sin\omega t) \tag{7}$$

   Si tratta di un moto circolare uniforme su una traiettoria di raggio $r_\circ$ percorsa in senso antiorario con velocità angolare uniforme ω, periodo $T = 2\pi/\omega$. Al tempo $t = 0$ il punto P parte dall'asse x (dal punto $(1, 0)$).

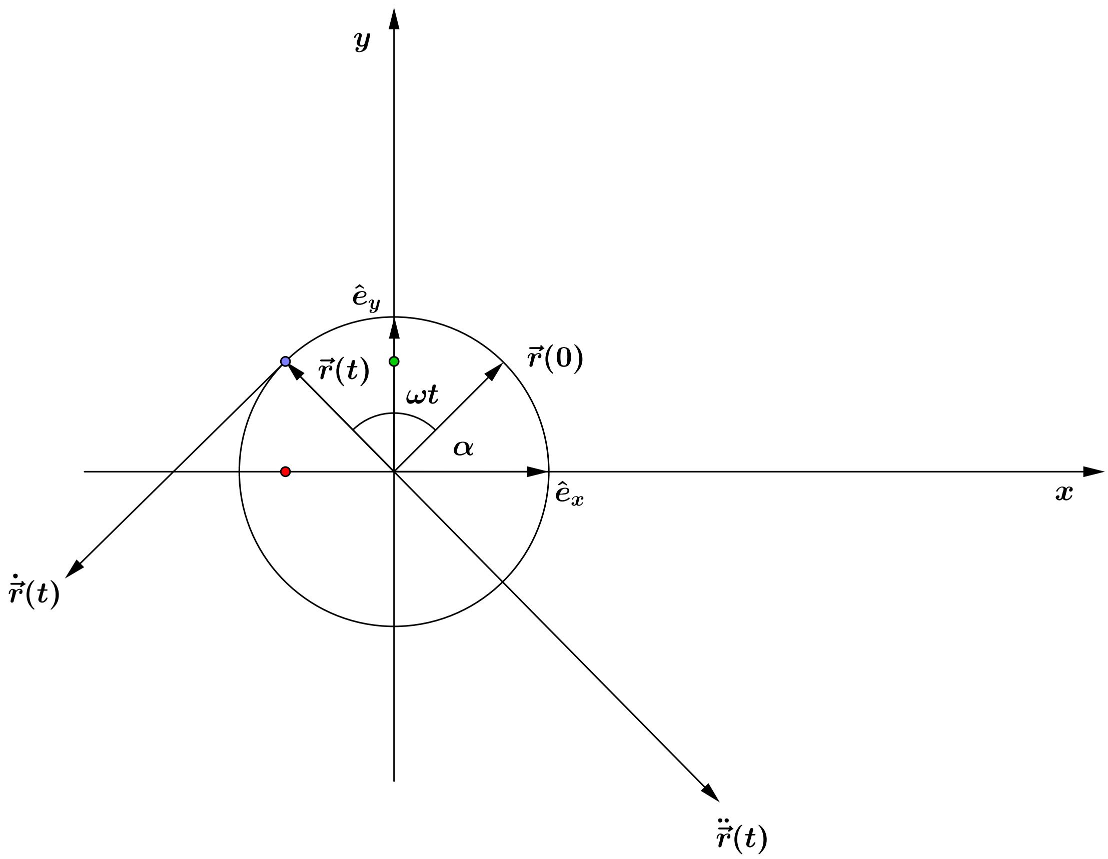

Figura 2: Caso della legge oraria (2). Al tempo iniziale $t = 0$ il vettore posizione si trova ad un angolo $\alpha = \pi/4$ dall'asse x. Al tempo t il vettore posizione $\vec{r}(t)$ si trova ad un angolo $\omega t + \alpha$ dall'asse delle x. La figura è stata disegnata per il valore $\omega t = \pi/2$ quindi al tempo $t = (3.14/4)\,\mathrm{s} = 0.79\,\mathrm{s}$ (essendo $\omega = 2\,\mathrm{rad/s}$). La figura riporta, in rosso e in verde le proiezioni del punto sugli assi coordinati al tempo t. Anche questa figura è in scala.

3. Nel caso della legge oraria (2) è tutto uguale al caso precedente, salvo che a $t = 0$ il punto P si trova in $(r_\circ \cos\alpha, r_\circ \sin\alpha)$ anziché in $(r_\circ, 0)$. Se ruotassi gli assi Oxy di un angolo $+\alpha$ (cioè in senso antiorario), nel nuovo sistema $Ox'y'$ con versori $\hat{e}'_x$,$\hat{e}'_y$ la legge oraria sarebbe del tipo (1).

4. Nel caso della legge oraria (3) la traiettoria anziché essere una circonferenza di raggio $r_\circ$ è un'ellisse centrata nell'origine con semiasse maggiore $kr_\circ$ e semiasse minore $r_\circ$. Infatti:

$$x = kr_\circ \cos\omega t \qquad y = r_\circ \sin\omega t \quad ; \quad \frac{x^2}{r_\circ^2 k^2} + \frac{y^2}{r_\circ^2} = 1 \tag{8}$$

5. Il vettore velocità istantanea è:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \omega r_\circ(-k\hat{e}_x \sin\omega t + \hat{e}_y \cos\omega t) \tag{9}$$

e il suo modulo varia nel tempo:

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = \omega r_\circ \sqrt{k^2 \sin^2\omega t + \cos^2\omega t} \tag{10}$$

Il vettore accelerazione istantanea è:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\omega^2 r_\circ(k\hat{e}_x \cos\omega t + \hat{e}_y \sin\omega t) \tag{11}$$

e quindi anche il modulo della accelerazione lineare varia con il tempo:

$$|\ddot{\vec{r}}(t)| = \omega^2 r_\circ \sqrt{k^2 \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t} \tag{12}$$

Se cambiassi unità di misura sull'asse x e la ponessi uguale a k volte quella sull'asse y il moto sarebbe di nuovo circolare uniforme, cioè la traiettoria sarebbe circolare, la velocità lineare sarebbe (in modulo) uniforme e così l'accelerazione, sempre in modulo.

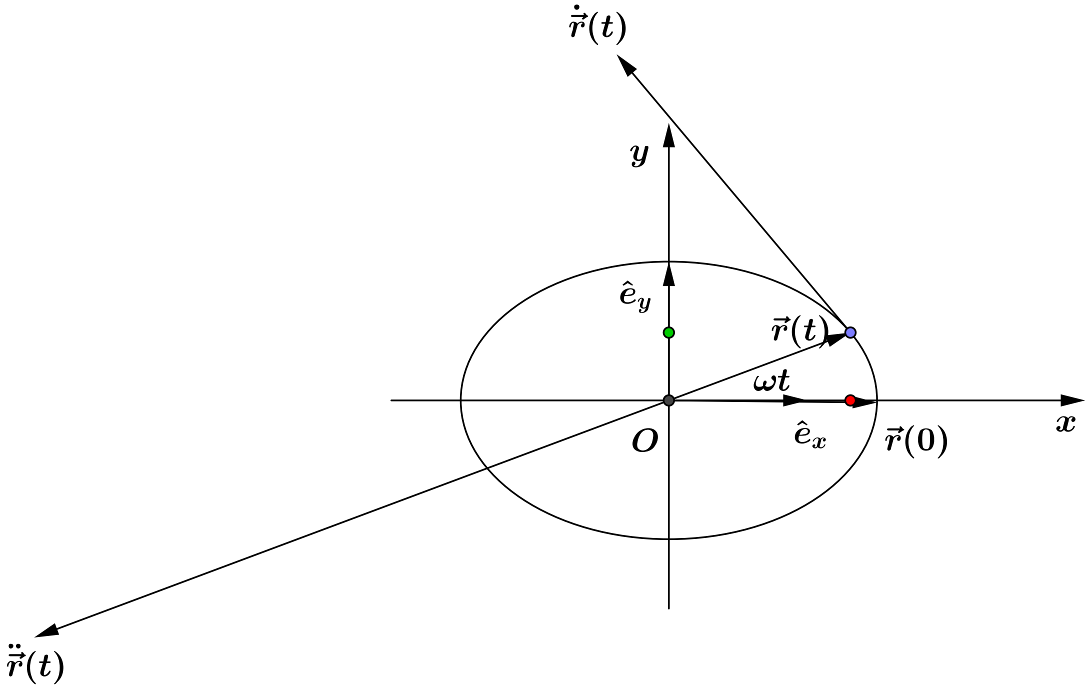

Figura 3: Caso della legge oraria (3). La traiettoria è un'ellisse. La velocità angolare ω è costante; le sue proiezioni sugli assi coordinati (i punti rosso e verde) fanno un moto armonico con la stessa velocità angolare ω, ma siccome la distanza da percorrere sull'asse x è maggiore di quella da percorrere sull'asse y, il modulo della velocità lineare non è costante, e così analogamente il modulo della accelerazione. La figura è in scala.

Nel caso finale della legge oraria (4) il moto è periodico con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (dopo questo intervallo di tempo il vettore posizione ritorna allo stesso valore). La traiettoria è un'ellisse ma i suoi assi di simmetria non sono gli assi x, y. L'asse maggiore è ruotato di un angolo $-\alpha$ rispetto all'asse x e l'asse minore è ad esso perpendicolare. Per dimostrare questo si può procedere nel modo seguente. Scrivere le componenti x, y del vettore posizione:

$$x = r_\circ \cos(\omega t + \alpha) \qquad y = r_\circ \sin \omega t \quad . \tag{13}$$

Quindi usare la prima per ricavare ωt, e cioè il tempo (interviene la funzione inversa del coseno, cioè l'arcocoseno):

$$\omega t + \alpha = \arccos \frac{x}{r_\circ} \quad \Rightarrow \quad \omega t = (\arccos \frac{x}{r_\circ}) - \alpha \quad . \tag{14}$$

Quindi fare il quadrato della componente y sapendo che $\sin^2 \omega t = 1 - \cos^2 \omega t$:

$$\frac{y^2}{r_\circ^2} = 1 - \cos^2 \omega t \tag{15}$$

e infine sostituire per ωt la (14). Si trova così l'equazione di una conica nel piano x, y (in effetti proprio un'ellisse) centrata nell'origine (si ricordi che α è un angolo costante dato). Tuttavia l'equazione dell'ellisse non ha la tipica forma (8), in cui le variabili x, y compaiono solo al quadrato. Questo succede quando gli assi x, y sono gli assi di simmetria dell'ellisse (asse maggiore e asse minore). In questo caso invece le variabili x, y compaiono anche alla prima potenza, proprio perché gli assi x, y non sono gli assi di simmetria dell'ellisse.