Fisica I, *a.a.* 2015–2016 – Secondo Appello

1 Luglio 2016, Ore 9 Aula PN1 Polo Porta Nuova

Anna M. Nobili

1 Studio di un fenomeno fisico in due diversi sistemi di riferimento

(Leggete per prima cosa la nota a piè di pagina)[1]

L'osservatore O_1 è dotato di un laboratorio fisso sulla superficie della Terra. Si assume che la Terra non ruoti attorno al proprio asse e non si tiene conto del suo moto di rivoluzione attorno al Sole. L'osservatore O_1 e il suo laboratorio costituiscono un sistema di riferimento che indichiamo come $Oxyz$ con l'osservatore nell'origine e gli assi coordinati ortogonali tra loro.

Al tempo $t = 0$ l'osservatore O_1 lancia una massa puntiforme m_1 dall'origine $(0, 0, 0)$ dove si trova verso l'alto con velocità iniziale $\vec{v}_o = (0, 0, v_o)$

1. Dite:

   a) che traiettoria compie la massa m_1; *b*) a quale altezza massima arriva la massa m_1; *c*) dopo quanto tempo la massa m_1 ricade a terra, in quale punto e con quale velocità (che scriverete in forma vettoriale nel riferimento considerato).

   Motivate ogni risposta quantitativamente con tutti i passaggi matematici che mostrino come si arrivi in ognuno dei casi al risultato finale.

   d) Rispondete a tutte le domande precedenti nel caso particolare in cui sia $v_o = 30\,\mathrm{km/ora}$.

Considerate ora l'osservatore O_2 che a $t = 0$ si trova nell'origine di un sistema di riferimento $OXYZ$ perfettamente coincidente con quello precedente ma dotato di una velocità costante $\vec{V} = (0, V, 0)$ rispetto ad esso.

L'osservatore O_2 ha una massa puntiforme m_2 e al tempo $t = 0$, quando il suo laboratorio inizia a muoversi con velocità $\vec{V}$ rispetto al riferimento dell'osservatore O_1, la lancia verso l'alto con la velocità, nel suo riferimento $OXYZ$, $\vec{V}_o = (0, 0, v_o)$ (nel caso numerico che considererete, anch'egli la lancia con la velocità di $30\,\mathrm{km/ora}$).

2. Dite quali risposte da l'osservatore O_2 alle domande *a*), *b*), *c*), *d*) nel caso della sua massa m_2 e perché.

3. L'osservatore O_1 decide di studiare nel suo sistema di riferimento $Oxyz$ anche il moto della massa m_2 lanciata dall'osservatore O_2. Dite quali risposte da l'osservatore O_1 alle domande *a*), *b*), *c*), *d*) per la massa m_2, e dove si trova secondo lui l'osservatore O_2 nell'istante in cui la massa m_2 ricade a terra.

Immaginate infine che quando la massa lanciata da ciascuno dei due osservatori ricade a terra essa colpisca una massa m_3 connessa al pavimento tramite una molla di costante elastica k lungo la direzione verticale e lunghezza di riposo che per semplicità assumiamo nulla.

4. Se la massa che cade si fonde con la massa m_3 formando, per ipotesi semplificativa, una nuova massa perfettamente sferica avente la possibilità di oscillare in direzione verticale attorno all'origine, dite con quale frequenza angolare questa massa oscillerà e scrivete l'equazione della sua legge oraria tenendo conto delle condizioni iniziali del suo moto all'istante dell'impatto.

[1] **Le risposte ai quesiti devono essere numerate come i quesiti stessi. Le grandezze cui il testo ha assegnato uno specifico simbolo devono conservare nelle risposte lo stesso simbolo. Ogni simbolo che decidete di usare deve essere definito.**

2 Soluzione

1. Notiamo subito che siccome la Terra non ruota attorno al proprio asse e non orbita attorno al Sole il sistema di riferimento dell'osservatore O_1 è inerziale.

   a) La traiettoria è un segmento di retta lungo l'asse verticale z dal punto $(0,0,0)$ al punto $(0,0,z_{max})$ dove z_{max} è l'altezza massima cui arriva la massa m_1 (vedi risposta *b*). Questo segmento viene percorso all'andata e al ritorno. Il moto lungo l'asse z è uniformemente accelerato, con accelerazione costante $g \simeq 9.8\,\mathrm{m/s^2}$, che è l'accelerazione locale di gravità esercitata dalla Terra, diretta lungo l'asse z con verso negativo. Quindi all'andata il moto è uniformemente *decelerato*; al ritorno è uniformemente *accelerato*.

   Lungo gli assi x ed y non ci sono forze e siccome la velocità iniziale in queste direzioni è nulla se ne conclude che lungo questi assi non ci sarà alcun moto.

   b) Poiché il testo non menziona la presenza di alcuna forza dissipativa usiamo la conservazione dell'energia (cinetica più potenziale gravitazionale) tra l'istante iniziale $t=0$ (lancio) e quello t_{max} in cui la massa m_1 arriva alla massima altezza z_{max} per trovare quest'ultima:

   $m_1 g z_{max} = \frac{1}{2} m_1 v_o^2 \quad \Rightarrow \quad z_{max} = \frac{v_o^2}{2g}$.

   Notiamo che la massa del corpo non interviene nel calcolo di z_{max}. Questo perché la gravità agisce su tutti i corpi allo stesso modo indipendentemente dalla loro massa e/o composizione (principio di equivalenza o universalità della caduta libera).

   c) la massa m_1 ricade a terra dopo un tempo $t_{caduta} = 2t_{max}$, che troviamo dall'equazione del moto imponendo che la velocità sia nulla (che succede appunto a z_{max}):

   $\ddot{z}(t) = -g$

   $\dot{z}(t) = -gt + v_o$,

   $\dot{z}(t_{max}) = 0 = -g t_{max} + v_o \quad \Rightarrow \quad t_{max} = \frac{v_o}{g} \quad \Rightarrow \quad t_{caduta} = 2t_{max} = \frac{2v_o}{g}$.

   La velocità con cui la massa arriva a terra è:

   $\dot{z}(t_{caduta}) = -g t_{caduta} + v_o = -2v_o + v_o = -v_o$

   che in forma vettoriale si scrive:

   $\vec{v}(t_{caduta}) = (0, 0, -v_o)$.

   Notiamo che un altro modo per ottenere z_{max} invece di usare la conservazione dell'energia come abbiamo fatto sopra, è di integrare ancora l'equazione del moto per ottenere la legge oraria:

   $z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_o t + 0$

   Calcolando la coordinata $z(t)$ per il tempo $t = t_{max} = \frac{v_o}{g}$ ottenuto sopra si ha

   $z_{max} = \frac{v_o^2}{2g}$

   come avevamo trovato più semplicemente usando la conservazione dell'energia.

   La massa ricade nell'origine da cui era partita.

   Scrivendo la conservazione dell'energia tra l'istante in cui la massa si trova a z_{max} con velocità nulla e quello in cui cade a terra ($z=0$) otteniamo la velocità di caduta

   $v_{caduta} = \sqrt{2g z_{max}} = v_o$

   cioè la massa m_1 tocca terra esattamente con la stessa velocità con cui era stata lanciata, come è anche ovvio dalla conservazione dell'energia tra il tempo iniziale e quello finale t_{caduta}, essendo l'energia potenziale gravitazionale in entrambi questi tempi nulla.

   d) Se $v_o = 30\,\mathrm{km/ora} \simeq 8.33\,\mathrm{m/s}$ l'altezza massima è $z_{max} = \frac{8.33^2}{2\cdot 9.8}\,\mathrm{m} \simeq 3.54\,\mathrm{m}$ e $t_{caduta} \simeq 2 \cdot \frac{8.33}{9.8} \simeq 1.7\,\mathrm{s}$. La velocità alla ricaduta a terra sarà (in modulo) esattamente v_o.

2. Siccome l'osservatore O_2 si muove di moto rettilineo uniforme rispetto all'osservatore O_1, il quale nelle ipotesi del testo è inerziale, anche il suo riferimento è inerziale. Quindi O_2 descriverà lo stesso fenomeno (lancio verso l'alto della massa m_2 con la stessa velocità v_o rispetto a sé stesso verso l'alto) allo stesso modo dell'osservatore O_1. E siccome abbiamo visto che per nessuna delle questioni poste la risposta dipende dal valore della massa lanciata (che è l'unica grandezza fisica diversa tra i due osservatori), ne concludiamo che l'osservatore O_2 darà esattamente le stesse risposte, sia in forma matematica che di contenuto numerico, dell'osservatore O_1 a tutte le domande poste. Come si vede, il valore della velocità (costante) V con cui O_2 si muove rispetto ad O_1 non interviene mai: in effetti O_2 a meno di *poter guardare fuori* dal suo laboratorio e di osservare un punto solidale con l'osservatore O_1 ("*mamma la stazione parte!*") non è in grado di sapere che si sta muovendo rispetto ad esso né tanto meno di dire a quale velocità si stia muovendo.

3. Studiando il moto della massa m_2 lanciata da O_2 al tempo $t = 0$ quando questi comincia a muoversi l'osservatore O_1 conclude che:

   a) la massa m_2 parte a $t = 0$ dall'origine (0,0,0) del suo sistema di riferimento $Oxyz$ con velocità iniziale $\vec{v}_i = (0, V, v_o)$. Le sue equazioni del moto (che vanno scritte nel riferimento $Oxyz$ dell'osservatore O_1) sono:

   $\ddot{z} = -g$

   $\ddot{x} = \ddot{y} = 0.$

   Integrando queste equazioni del moto con le condizioni iniziali date l'osservatore O_1 trova che non c'è moto lungo x, che lungo y il moto è a velocità costante V (in assenza di forze lungo y la velocità iniziale V resta invariata), che lungo z il moto è uniformemente accelerato con l'accelerazione di gravità diretta verso il basso e velocità iniziale verso l'alto v_o.

   Integrando due volte per ogni componente con le condizioni iniziali date O_1 scrive:

   $x(t) = 0$

   $y(t) = Vt$

   $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_o t$

   Il moto si svolge quindi nel piano y, z. Eliminando il tempo dalle due equazioni $y(t)$ e $z(t)$, O_1 ottiene l'equazione (in questo piano) della traiettoria compiuta dalla massa m_2:

   $z(y) = -\frac{g}{2V^2}y^2 + \frac{v_o}{V}y$

   che è l'equazione di una parabola rovesciata con asse si simmetria parallelo all'asse z (ma non coincidente con esso). Con un piccolo studio di questa funzione $z(y)$ si vede che l'altezza massima raggiunta dalla massa m_2 è la stessa $z_{max} = \frac{v_o^2}{2g}$ che l'osservatore O_1 aveva trovato per m_1, il tempo di caduta è lo stesso $t_{caduta} = 2t_{max} = \frac{2v_o}{g}$ e la velocità finale lungo z è la stessa $-v_o$ (diretta verso il basso, quindi lungo le z negative).

   In forma vettoriale per la velocità finale della massa m_2 l'osservatore O_1 trova:

   $(\vec{v}_{finale})_{m_2,O_1} = (0, V, -v_o).$

   Il punto di caduta invece è

   $(0, y_{caduta} = Vt_{caduta} = V \cdot \frac{2v_o}{g}, 0).$

   Poiché l'osservatore O_2, che si trova nell'origine del riferimento in moto, si muove con esso con velocità

   $\vec{V}_{O_2,O_1} = (0, V, 0)$

   e quindi al tempo di caduta della massa m_2 si troverà in $(0, y_{caduta} = V \cdot \frac{2v_o}{g}, 0)$, esattamente come la massa m_2. E siccome la massa m_2 in caduta e l'osservatore O_2 hanno entrambi la stessa velocità V lungo l'asse y, mentre la massa m_2 ha anche una velocità v_o negativa lungo l'asse z, se ne deduce che essa "cade verticalmente sulla testa di O_2" con una velocità relativa

$\vec{v}_{relativa} = (\vec{v}_{finale})_{m_2,O_1} - \vec{V}_{O_2,O_1} = (0, 0, -v_o)$

Questa è esattamente la velocità con cui la massa m_1 "cadeva sulla testa di O_1" che fermo, e anche la velocità con cui cade secondo O_2 la massa m_2 nel suo riferimento inerziale $OXYZ$ in moto a velocità costante rispetto ad O_1.

Come si vede la conclusione è la stessa nei 3 casi, indipendentemente dal valore della velocità (costante) di un riferimento rispetto all'altro, ed è per questo che il valore numerico di V non era rilevante e non è stato fornito dal testo.

Quello che abbiamo studiato è il famoso problema della palla di cannone sparata verso l'alto da un cannone fermo oppure da un cannone che si muove nel piano orizzontale trasportato da un carro che va a velocità costante: in entrambi i casi la palla di cannone ricade esattamente nella bocca che l'ha sparata, contrariamente alla considerazione piuttosto comune secondo cui se il carro è in moto con velocità costante la palla ricade un po' più avanti o un po' più indietro a seconda che la velocità del carro si sommi o si sottragga a quella della palla al momento del lancio. La risposta giusta è invece che la palla ricade sempre nella bocca che l'ha sparata.

Si noti che avendo studiato in due riferimenti inerziali un fenomeno che coinvolge soltanto la forza gravitazionale, abbiamo ottenuto il risultato che il moto non dipende dal valore della massa lanciata ($m_1 \neq m_2$).

4. Poiché la costante elastica dell'oscillatore è k e la massa oscillante è $m_1 + m_3$ o $m_2 + m_3$ la frequenza angolare di oscillazione nei due casi è:

   $\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{k}{m_{1,2}+m_3}}$.

   Poiché la massa che cade si fonde con la massa m_3 (si tratta di un urto perfettamente anelastico) essa le trasferisce tutta la propria quantità di moto lineare. Per la conservazione della quantità di moto tra prima e dopo l'impatto abbiamo:

   $m_1 v_o = (m_1 + m_3) v_{i,1} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{m_1}{m_1+m_3} v_o$

   $m_2 v_o = (m_2 + m_3) v_{i,1} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{m_2}{m_2+m_3} v_o$

   Usiamo $v_{1,2}$ per indicare v_1 e v_2 rispettivamente, e così per la posizione e velocità istantanea della massa oscillante nei due casi. La soluzione è:

   $z_{1,2}(t) = A_{1,2} \sin \omega_{1,2} t$

   dove la costante $A_{1,2}$ si trova imponendo la condizione iniziale per la velocità:

   $\dot{z}_{1,2}(t) = A_{1,2} \omega_{1,2} \cos \omega_{1,2} t = -v_o \quad \Rightarrow \quad A_{1,2} = -\frac{v_{1,2}}{\omega_{1,2}}$

   Nota importante: la forza elastica non ha la proprietà della forza gravitazionale di produrre lo stesso effetto su tutti corpi indipendentemente dalla loro massa e/o composizione (proprietà posseduta in natura soltanto dalla forza gravitazionale). È giusto quindi aspettarsi che il risultato in questo caso sia diverso a seconda del valore della massa lanciata (m_1 o m_2 nei due casi).