Fisica I, *a.a.* 2015–2016 – Quarto Appello

17 Settembre 2016, Ore 9 Aula PN1 Polo Porta Nuova

Anna M. Nobili

1 Fisica di lamelle elastiche

(Leggete per prima cosa la nota a piè di pagina)[1] E' data una lamella sottile di spessore b, larghezza a e lunghezza ℓ ($b < a < \ell$). Immaginatela come un nastro disposto in orizzontale, con un lato fissato alla parete verticale del laboratorio e l'altro libero. La lamella è fatta di un materiale elastico. L'elasticità si chiama modulo di Young, e si misura sperimentalmente; la chiamiamo Y. Data la geometria della lamella e il suo Y, si sa che la sua costante elastica k in risposta (secondo la legge di Hook) ad una forza applicata alla estremità libera, in direzione perpendicolare alla superficie della lamella stessa, è:

$$k = Y\frac{ab^3}{4\ell^3} \tag{1}$$

1. Scrivete le dimensioni fisiche di k e di Y. Se $a = 5\,\mathrm{mm}$, $b = 150\,\mathrm{micron}$, $\ell = 5\,\mathrm{cm}$, e con $Y = 1.9 \cdot 10^{11}$ espresso in unità SI, calcolate il k della lamella. Dite di quale fattore cambierebbe k se si modificasse la lamella diminuendone lo spessore di un fattore 1.5, aumentandone la lunghezza di un fattore 3 e diminuendone la larghezza di un fattore 2. Il valore di k aumenterebbe o diminuirebbe?
2. Dite qualitativamente che cosa succede se posate una moneta da 1 centesimo di euro, che pesa 2.3 grammi, sopra l'estremità libera della lamella. Scrivete in forma matematica l'effetto prodotto dal peso della moneta e infine calcolatelo numericamente per la lamella data.
3. Vi viene data ora una lamella identica alla prima ma di un altro materiale il cui modulo di Young Y_2 non è noto. Usate la risposta data al punto 2 e l'Eq. (1) per dire come potete misurare il valore di Y_2.

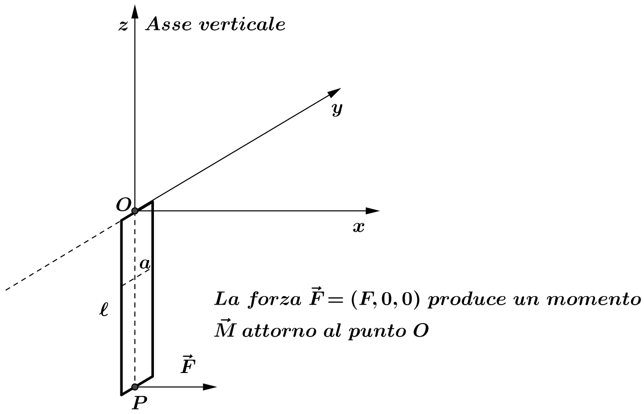

Figura 1

La lamella viene ora disposta in verticale, con una estremità fissata al soffitto del laboratorio e l'altra libera di muoversi cui viene applicata la forza $\vec{F}$ (Fig. 1). $\vec{F}$ sposta il punto P di un Δx inversamente proporzionale a k. Il momento $\vec{M}$ inclina l'asse OP rispetto alla verticale di un angolo $\Delta\vartheta$ inversamente proporzionale ad un'altra costante elastica della lamella, detta di torsione, che chiamiamo k_{tor}. (Δx e $\Delta\vartheta$ sono piccoli).

4. Scrivete la relazione tra F (modulo) e Δx e quella tra M (modulo) e $\Delta\vartheta$. Dite quali sono le dimensioni fisiche di k_{tor}. Dite come è diretto il momento $\vec{M}$. Scrivete la relazione che lega la forza F al suo momneto M. Scrivete la relazione tra Δx e $\Delta\vartheta$. Ricavate la relazione tra k_{tor} e k.
5. Al punto P (Fig. 1) si attacca ora, disposta in verticale, un'asticella sottile rigida di lunghezza L al cui estremo inferiore, che indichiamo con Q, si applica la forza $\vec{F} = (F, 0, 0)$. Ci sono un momento M' rispetto ad O, uno spostamento $\Delta x'$ del punto Q e una inclinazione $\Delta\vartheta'$ dell'asse OQ. Scrivete la relazione tra M' ed F. Scrivete la relazione tra M' e $\Delta\vartheta'$. Scrivete la relazione tra $\Delta x'$ e $\Delta\vartheta'$. Ricavate infine la relazione tra F e $\Delta x'$ assumendo $L \gg \ell$. A che cosa serve secondo voi l'asticella?

[1] **Le risposte ai quesiti devono essere numerate come i quesiti stessi. Le grandezze cui il testo ha assegnato uno specifico simbolo devono conservare lo stesso simbolo. Ogni nuovo simbolo introdotto DEVE essere definito. Formule matematiche contenenti varie grandezze fisiche indicate con i rispettivi simboli, non devono essere mescolate con casi numerici particolari.**

2 Soluzione

1. $[k] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $[Y] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
   $Y = 1.9 \cdot 10^{11}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, $a = 5 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$, $b = 1.5 \cdot 10^{-4}\,\text{m}$, $\ell = 5 \cdot 10^{-2}\,\text{m} \Rightarrow k \simeq 6.4\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$
   Chiamo a', b', e ℓ' i nuovi valori, rispettivamente, della larghezza, dello spessore e della lunghezza della lamella, con i quali la nuova costante elastica, che chiamo k' è:
   $k' = Y\frac{a'b'^3}{4\ell'^3}$
   Con i dati numerici forniti dal testo vale:
   $a' = \frac{a}{2}, \quad b' = \frac{b}{1.5}, \quad \ell' = 3\ell$
   e quindi:
   $k' = \frac{Y}{4}\frac{a}{2}\frac{b^3}{1.5^3}\frac{1}{3^3\ell^3} = Y\frac{ab^3}{4\ell^3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1.5^3 \cdot 3^3} = k\frac{1}{182.25} \simeq k \cdot 5.49 \cdot 10^{-3} = 0.035\,\text{Nm}^{-1}$
   Si vede che il valore di k diminuirebbe in modo significativo: una lamella più sottile, più lunga e più stretta sarebbe molto più "molle" (costante elastica più bassa), cioè molto meno rigida.

2. Sotto il peso della monetina la cui massa indichiamo con $m = 2.3 \cdot 10^{-3}$ kg l'estremità libera della lamella si abbassa fino a che si raggiunge l'equilibrio quando la sua forza di richiamo uguaglia (in modulo) la forza peso della moneta ($g \simeq 9.8\,\text{ms}^{-2}$ è l'accelerazione locale di gravità). Quindi, chiamando Δz il modulo dell'abbassamento dell'estremità della lamella quando si realizza l'equilibrio deve essere:
   $mg = k\Delta z \quad \Rightarrow \quad \Delta z = \frac{mg}{k} = \frac{2.3 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8}{6.4}\,\text{m} \simeq 3.5 \cdot 10^{-3}\,\text{m} = 3.5\,\text{mm}$

3. Dalla Eq. (1) e dalla risposta al punto 2:
   $Y_2 = k\frac{a\ell^3}{ab^3} = \frac{mg}{\Delta z}\frac{a\ell^3}{ab^3} = \left(\frac{m}{\Delta z}\right)\frac{ga\ell^3}{ab^3}$
   Usando diverse monete di peso noto e misurando i corrispondenti abbassamenti prodotti otteniamo diversi valori di Y_2
   $Y_{2i} = \left(\frac{m_i}{\Delta z_i}\right)\frac{ga\ell^3}{ab^3}$
   di cui prenderemo il valore medio. Se N è il numero totale delle monete e delle misure che facciamo, otterremo un valor medio per il modulo di Young del materiale di cui è fatta la nuova lamella:
   $< Y_2 >= \frac{\sum_1^N Y_{2i}}{N}$

4. $F = k\Delta x \qquad M = k_{tor}\Delta\vartheta$
   $[k_{tor}] = \text{Nm}$
   $\vec{M} = (0, -M, 0)$
   Il momento $\vec{M}$ è diretto lungo l'asse negativo delle y: un osservatore con i piedi in O e la testa verso e y negative vedrebbe il punto P ruotare in senso antiorario
   $M = F\ell$
   $\Delta x = \ell\Delta\vartheta$ Questa è la relazione geometrica tra raggio, angolo ed arco per uno spostamento infinitesimo Δx lungo la curva in corrispondenza del quale il raggio di modulo ℓ spazza un angolo infinitesimo $\Delta\vartheta$
   $M = F\ell \Rightarrow k_{tor}\Delta\vartheta = k\Delta x \cdot \ell = k \cdot \ell\Delta\vartheta \cdot \ell = k\ell^2 \cdot \Delta\vartheta \Rightarrow k_{tor} = k\ell^2$

5. $M' = F(L + \ell)$
   $M' = k_{tor}\Delta\vartheta'$ $(\Rightarrow \Delta\vartheta' > \Delta\vartheta)$
   $\Delta x' = (L + \ell)\Delta\vartheta'$ Relazione geometrica tra raggio, angolo ed arco quando il raggio è (in modulo) $L + \ell$, l'angolo infinitesimo da esso spazzato è $\Delta\vartheta'$ e l'arco infinitesimo percorso è $\Delta x'$
   $F(L + \ell) = k_{tor}\frac{\Delta x'}{L+\ell} \Rightarrow F = \frac{k_{tor}}{(L+\ell)^2} \cdot \Delta x'$ che scriviamo come $F = k'\Delta x'$ con $k' = \frac{k_{tor}}{(L+\ell)^2}$
   Dal risultato del punto 4 che fornisce k_{tor} in funzione di k (cioè $k_{tor} = k\ell^2$) abbiamo k' in funzione di grandezze tutte note:
   $k' = k \cdot \frac{\ell^2}{(L+\ell)^2}$
   Infine, poiché il testo ci dice che $L \gg \ell$ sviluppiamo in serie del parametro piccolo $\frac{\ell}{L} \ll 1$ e otteniamo:
   $k' = k \cdot \frac{\ell^2}{L^2(1+\ell/L)^2} = k\frac{\ell^2}{L^2} \cdot (1 + \frac{\ell}{L})^{-2} \simeq k\frac{\ell^2}{L^2} \cdot (1 - 2\frac{\ell}{L} + O(\frac{\ell^2}{L^2}))$
   e trascurando termini dell'ordine di $\frac{\ell^3}{L^3}$ abbiamo:
   $k' \simeq k\frac{\ell 2}{L^2} \ll k$
   Come si vede, l'asticella diminuisce il k della lamella: a parità di forza applicata, in presenza dell'asticella si ha uno spostamento più grande che non in assenza dell'asticella. Si chiama effetto leva ed è molto importante quando si devono misurare forze molto molto piccole che altrimenti produrrebbero spostamenti piccolissimi e perciò difficili da misurare.