Fisica I, *a.a.* 2015–2016 – Sesto Appello

9 Febbraio 2017, Ore 10:30 Aula PN1 Polo Porta Nuova

Anna M. Nobili

1 Oscillatore armonico unidimensionale rotante

(Leggete per prima cosa la nota a piè di pagina)[1] La Fig. 1 mostra un cubetto di massa m che può scorrere (senza attrito) lungo un'asta orizzontale diretta come l'asse R. L'asta ruota con velocità angolare costante $\vec{\omega}$ attorno all'asse verticale z. Il cubetto è fissato all'origine O tramite una molla di massa trascurabile e lunghezza di riposo $\ell_\circ$. La Fig. 1 mostra lo stato del sistema ad un generico istante t

1. Scrivete le formule matematiche delle forze agenti su m e disegnatele (rifate la Fig. 1).
2. Calcolate la posizione di equilibrio R_{eq} della massa m e imponete che essa deve trovarsi ad una distanza da O maggiore di $\ell_\circ$.
3. Nel caso particolare $\omega = 0$ calcolate la posizione di equilibrio e la frequenza angolare, che chiamerete $\omega_\circ$, con cui la massa m può oscillare attorno ad essa.
4. Scrivete la relazione matematica tra la posizione di equilibrio nel caso rotante e quella nel caso non rotante tenendo conto che $\omega^2/\omega_\circ^2 \ll 1$.
5. Tornate al caso rotante e scrivete l'equazione del moto della massa m nella variabile R.
6. Riscrivete questa equazione del moto nella variabile $\xi = R - R_{eq}$.
7. Scrivete la frequenza angolare di oscillazione della massa m in caso di rotazione e la sua relazione con $\omega_\circ$, sempre nell'ipotesi che sia $\omega^2/\omega_\circ^2 \ll 1$.
8. Se $\omega_\circ = 10\omega$ (con $\omega \neq 0$) dite di quale frazione cambiano (in più o in meno) la posizione di equilibrio e la frequenza angolare di oscillazione rispetto al caso in cui l'asta non ruota.

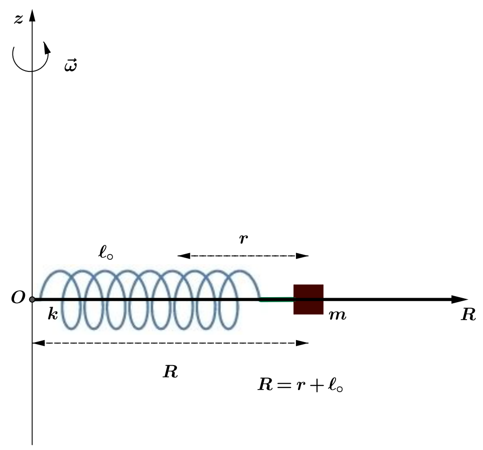

Figura 1: Il cubetto di massa m può scorrere (senza attrito) lungo un'asta diretta come l'asse orizzontale R mentre è collegato alla sua origine con una molla di massa trascurabile e costante elastica k. A sua volta l'asta ruota attorno all'asse verticale z con velocità angolare costante $\vec{\omega}$.

[1] **Le risposte ai quesiti devono essere numerate come i quesiti stessi. Le grandezze cui il testo ha assegnato uno specifico simbolo devono conservare lo stesso simbolo. Ogni nuovo simbolo introdotto DEVE essere definito.**

2 Soluzione

1. Il testo dice che il cubetto scorre senza attrito lungo l'asta diretta come l'asse orizzontale R. Ne deriva che il problema ha un solo grado di libertà (la coordinata R istantanea del cubetto) e quindi le sole forze che interessano sono quelle che agiscono lungo l'asse orizzontale.

   La forza elastica è proporzionale all'allungamento (o accorciamento) della molla rispetto alla sua posizione di riposo, e diretta verso il punto di sospensione della molla, in questo caso l'origine O (la Fig. 1 mostra un allungamento $r = R - \ell_\circ$). La forza centrifuga, che è presente perché il cubetto si trova in un sistema di riferimento rotante, è diretta verso l'esterno e proporzionale alla distanza dall'asse attorno al quale avviene la rotazione, quindi le due forze hanno segno opposto:

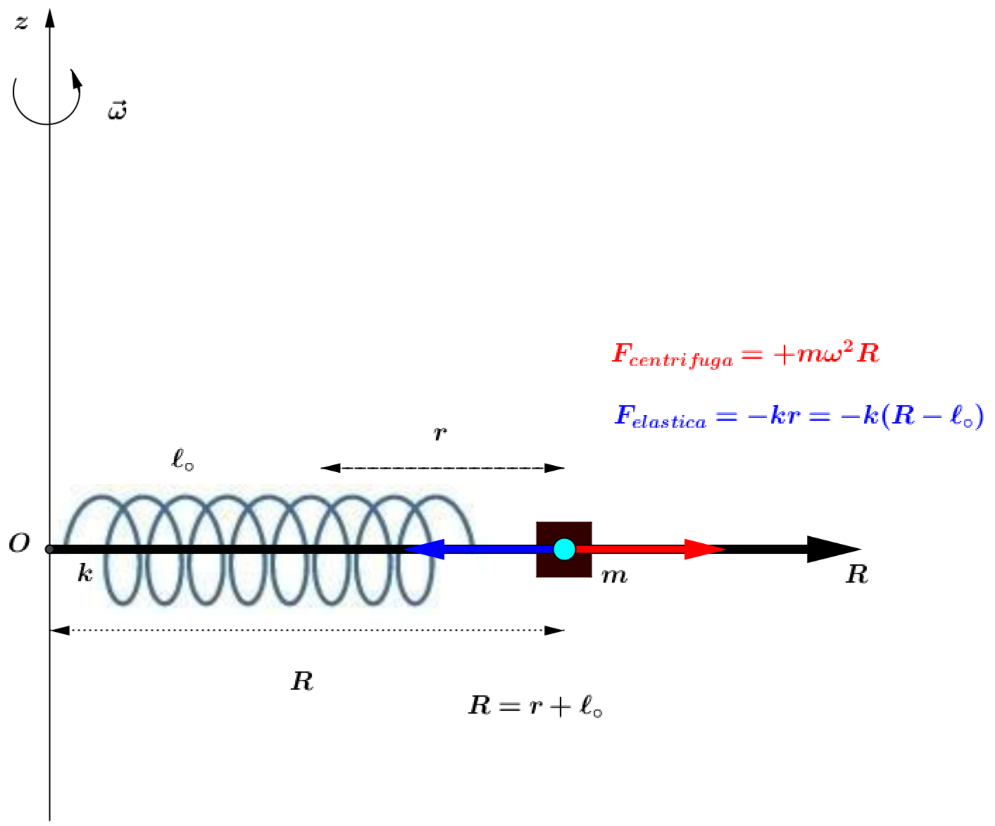

Figura 2: Come la Fig. 1 con aggiunta delle forze in gioco lungo l'asse R, che sono state disegnate nel caso particolare in cui sono uguali in modulo. Ne deriva che la posizione del cubetto indica quella all'equilibrio come calcolata al punto 2.

   $F_{elastica} = -kr = -k(R - \ell_\circ)$

   $F_{centrifuga} = +m\omega^2 R$

2. L'equilibrio si ha quando le due forze si uguagliano in modulo, il che accade per $R = R_{eq}$:

   $m\omega^2 R_{eq} - k(R_{eq} - \ell_\circ) = 0$ da cui segue:

   $R_{eq} = \frac{k\ell_\circ}{k - m\omega^2} = \ell_\circ \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{k/m}}$

   $R_{eq} > \ell_\circ \quad \Rightarrow \quad k > k - m\omega^2$

   che è senz'altro vero se $\omega \neq 0$ (il cubetto ha massa $m > 0$). Quindi, se l'asta ruota (anche con velocità angolare molto piccola, e non importa se in senso orario o antiorario) la posizione di equilibrio del cubetto si trova sempre più lontana dall'origine di $\ell_\circ$ (che vedremo al punto successivo essere la posizione di equilibrio in assenza di rotazione).

Sebbene non sia richiesto dal testo, se si vuole esprimere la posizione di equilibrio in termini della variabile r, sapendo che $R = r + \ell - \circ$ otteniamo

$r_{eq} = \ell_\circ \frac{m\omega^2}{k-m\omega^2}$

3. Nel caso particolare in cui l'asta non ruoti l'equilibrio si ha ad una distanza da O pari alla lunghezza di riposo della molla $\ell_\circ$. Se il cubetto viene spostato da questa posizione di equilibrio (cioè se la molla viene allungata o accorciata rispetto alla sua lunghezza di riposo ℓ_o) il cubetto oscillerà attorno ad ℓ_o e sappiamo che la frequenza angolare di oscillazione di un oscillatore armonico di massa m e costante elastica k è:

   $\omega_\circ = \sqrt{\frac{k}{m}}$

4. E' la relazione tra R_{eq} scritta al punto 2 e ℓ_o, che riscriviamo usando la ω_o^2 al posto di k/m e che sviluppiamo in serie del parametro piccolo $\omega^2/\omega_\circ^2 \ll 1$ (che significa che l'asta ruota con una frequenza molto lenta rispetto alla frequenza naturale di oscillazione dell'oscillatore cubetto+molla):

   $R_{eq} = \ell_\circ \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_\circ^2}} \simeq \ell_\circ \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_\circ^2}\right)$

5. Sappiamo dal punto 1 quali sono le forze agenti sul cubetto di massa m, quindi la sua equazione del moto (unidimensionale: il moto si svolge lungo l'asse R, vedi Fig. 1) nella variabile R è:

   $m\ddot{R} = m\omega^2 R - kr$

   $\ddot{R} + \frac{k-m\omega^2}{m} R - \frac{k}{m}\ell_\circ = 0$

6. Passando alla variabile $\xi = R - R_{eq}$, che rappresenta lo spostamento del cubetto rispetto alla sua posizione di equilibrio, l'equazione del moto scritta sopra diventa:

   $\ddot{\xi} + \frac{k-m\omega^2}{m}\xi = 0$

7. L'equazione del moto nella variabile ξ scritta sopra è l'equazione del moto di un oscillatore unidimensionale con frequenza angolare, che chiamiamo Ω (rad/s), il cui quadrato è:

   $\Omega^2 = \frac{k-m\omega^2}{m}$

   Poiché sappiamo che $k = m\omega_\circ^2$, abbiamo

   $\Omega^2 = \omega_\circ^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_\circ^2}\right)$

   e quindi:

   $\Omega = \omega_\circ \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_\circ^2}}$

   che nel caso $\omega^2/\omega_\circ^2 \ll 1$ si può approssimare come:

   $\Omega \simeq \omega_\circ \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega_\circ^2}\right)$

   Confrontando questa relazione con quella scritta al punto 4 notiamo che quando l'asta è in rotazione molto lenta rispetto alla frequenza di oscillazione naturale dell'oscillatore $\omega_\circ$ la posizione di equilibrio *si allontana (aumenta)* rispetto a quella in assenza di rotazione (che era $\ell_\circ$) di una frazione $\frac{\omega^2}{\omega_\circ^2}$ mentre la frequenza angolare dell'oscillatore *diminuisce* rispetto a quella che aveva in assenza di rotazione della frazione $\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega_\circ^2}$ (cioè, quando è in rotazione il periodo di oscillazione è un po' più lungo di quando era a riposo).

8. Da quanto appena scritto sopra segue che nel caso particolare $\omega_\circ = 10\omega$ la posizione di equilibrio in rotazione si allontana di $1/100$ di $\ell_\circ$ e la frequenza di oscillazione diminuisce di $1/200$ di $\omega_\circ$