

Fisica I, a.a. 2016–2017 – primo appello

13 Giugno 2017

1 Problema n. 1

Si consideri il sistema in figura. Un corpo di massa $m = 0.930 \text{ kg}$ è appoggiato su una superficie orizzontale liscia, alla cui estremità è posta una molla di costante elastica $k = 1.40 \cdot 10^3 \text{ N/m}$ e una certa lunghezza a riposo ℓ_0 . Il corpo comprime la molla di un certo $\Delta\ell$ e dopo una distanza $d = 0.52 \text{ m}$ entra in una guida, sempre liscia, a forma circolare, di raggio $r = 0.88 \text{ m}$ (la guida è come quelle di legno con cui giocano i bambini, ovvero l'oggetto si appoggia sulla guida). Determinare:

1. il modulo della velocità del corpo quando entra nella guida circolare se la compressione della molla vale $\Delta\ell = 0.280 \text{ m}$ (2 punti)
2. la compressione minima della molla affinché il corpo raggiunga il punto più alto della guida (4 punti)
3. la compressione minima della molla affinché il corpo riesca a fare un giro completo (2 punti)
4. il modulo della reazione vincolare esercitata dalla guida circolare sul corpo quando questo si trova ad un angolo $\vartheta = 29.0^\circ$, sapendo che la velocità con cui entra nella guida vale $v_0 = 8.70 \text{ m/s}$ (4 punti)

Si supponga adesso che nel tratto d ci sia attrito, rappresentato da un coefficiente di attrito dinamico $\mu_D = 0.75$. Determinare:

5. la velocità con cui il corpo entra nella guida circolare, sapendo che la molla è compressa di $\Delta\ell = 0.33 \text{ m}$ (4 punti)

2 Soluzione n. 1

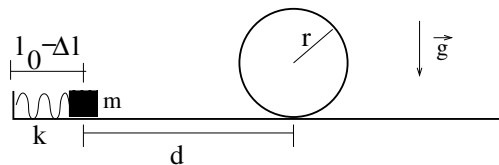


Figura 1

1. Per conservazione dell'energia si può scrivere

$$\frac{1}{2}k\Delta\ell^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

E quindi

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}\Delta\ell}$$

2. La condizione richiesta è che nel punto più alto, il corpo arrivi con velocità nulla. Imponendo di nuovo la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}k\Delta\ell_{min}^2 = mg(2r)$$

E quindi

$$\Delta\ell_{min1} = \sqrt{\frac{4mgr}{k}}$$

3. Qui la condizione richiesta è che quando il corpo arriva nel punto più alto, la reazione vincolare sia nulla. Lo si può anche vedere notando che nel punto più alto la gravità sia bilanciata dall'accelerazione centrifuga.

Allora

$$m\frac{v_{top}^2}{r} = mg \quad v_{top}^2 = gr$$

Imponendo di nuovo la conservazione dell'energia, si trova

$$\frac{1}{2}mv_{min}^2 = \frac{1}{2}mv_{top}^2 + 2mgr = \frac{1}{2}mgr + 2mgr = \frac{5}{2}mgr$$

Poiché

$$\frac{1}{2}mv_{min}^2 = \frac{1}{2}k\Delta\ell_{min2}^2$$

si trova che

$$\Delta\ell_{min2} = \sqrt{\frac{5mgr}{k}}$$

4. La conservazione dell'energia tra quando il corpo entra nella guida con velocità v_o e quando si trova ad un certo angolo ϑ rispetto alla verticale si scrive:

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}mv^2(\vartheta) + mgr(1 - \cos(\vartheta)) \quad v^2(\vartheta) = v_o^2 - 2gr(1 - \cos(\vartheta))$$

Poichè deve valere

$$m\frac{v^2(\vartheta)}{r} = R_{vinc}(\vartheta) - mg \cos(\vartheta)$$

si ha che

$$R_{vinc}(\vartheta) = (3 \cos(\vartheta) - 2)mg + m\frac{v_o^2}{r}$$

5. Il problema può essere risolto scrivendo l'equazione del moto della massa m sotto l'azione della accelerazione costante (e negativa) dovuta all'attrito dinamico: $a = -\mu_D g$ (moto uniformemente decelerato), oppure usando il teorema delle forze vive.

- L'equazione del moto è:

$$\ddot{x}(t) = -\mu_D g$$

da cui:

$$\dot{x}(t) = v_o - \mu_D g t$$

$$x(t) = v_o t - \frac{1}{2}\mu_D g t^2$$

dove v_o è la velocità iniziale $v_o = \sqrt{k/m\Delta\ell}$ e abbiamo preso $x(0) = 0$. Quindi imponendo

$$d = v_o t_{entrata} - \frac{1}{2}\mu_D g t_{entrata}^2 \quad \text{cioè} \quad \mu_D g t_{entrata}^2 - 2v_o t_{entrata} + 2d = 0$$

si trova

$$t_{entrata} = \frac{v_o}{\mu_D g} \pm \sqrt{\frac{v_o^2}{\mu_D^2 g^2} - 2\frac{d}{\mu_D g}}$$

La soluzione fisica è quella con il segno negativo. Sostituendo, troviamo

$$v(t_{entrata}) = \sqrt{v_o^2 - 2\mu_D g d} = \sqrt{\frac{k}{m}\Delta\ell^2 - 2\mu_D g d}$$

- Il teorema della forze vive dice che la variazione di energia meccanica è pari al lavoro delle forze dissipative. Quindi

$$\frac{1}{2}mv(t_{entrata})^2 - \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 = -\mu_D m g d$$

Da cui

$$v(t_{entrata}) = \sqrt{\frac{k}{m}\Delta\ell^2 - 2\mu_D g d}$$

3 Problema n. 2

E' dato un cilindro isolato, omogeneo di densità $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$, raggio $R = 0.45 \text{ m}$ e altezza $H = 0.72 \text{ m}$ libero di ruotare senza attrito attorno al proprio centro di massa. Sia z il suo asse di simmetria e x, y, z il sistema di riferimento (solidale col cilindro) dei suoi assi principali di inerzia.

1. Determinare il momento d'inerzia I_3 rispetto all'asse z (1 punto)
2. Determinare il momento d'inerzia I_1 rispetto all'asse x (2 punti)
3. Determinare il momenti d'inerzia I_2 rispetto all'asse y (1 punto)

Al tempo t_o il cilindro viene messo in rotazione con velocità angolare $\vec{\omega}_o = (\omega_x, 0, 0)$, con $\omega_x = 14 \text{ rad/s}$.

Al tempo successivo t_1 si osserva che il cilindro non ruota esattamente come previsto, ma ha una velocità angolare $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ con $\omega_y = \omega_z = 2.1 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s}$. Essendo ω_y e ω_z entrambe molto minori di ω_x si assume di poter trascurare il loro prodotto.

4. Scrivere il momento angolare \vec{L} del cilindro al tempo t_1 e calcolate le sue componenti L_x, L_y, L_z (1+1+1 punti)

5. Quanto vale la derivata temporale di \vec{L} rispetto al tempo calcolata nel riferimento inerziale (con origine nel centro di massa)? (2 punti)

Ricordando la formula $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{RifIner} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{RifRot} + \vec{\omega} \times \vec{L}$ che lega la derivata temporale di un vettore nel riferimento inerziale a quella nel riferimento rotante; ricordando che il cilindro è simmetrico attorno all'asse z e che termini contenenti il prodotto $\omega_y \omega_z$ possono essere trascurati:

6. Scrivere le equazioni

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= \dots; \\ \dot{\omega}_y &= \dots; \\ \dot{\omega}_z &= \dots \quad (1 + 2 + 1 \text{ punti})\end{aligned}$$

7. Scrivere $\omega_y(t) = \dots$ (integrando l'equazione $\dot{\omega}_y = \dots$ trovata al punto precedente) e calcolate quanto vale $\omega_y(t_1 + 200)$ quando sono passati 200 s dal tempo iniziale t_1 . Dite se la rotazione iniziata al tempo t_1 è stabile SI o NO (3 punti)

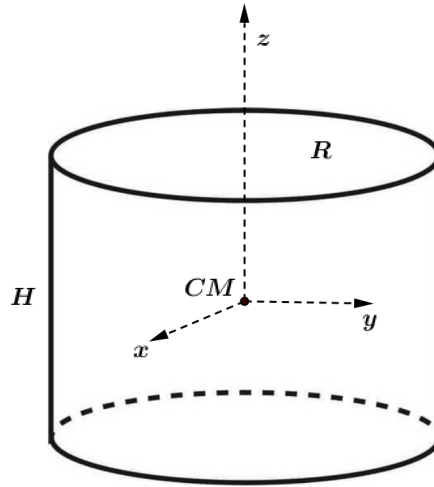


Figura 2

4 Soluzione n. 2

1 Il momento d'inerzia I_3 rispetto all'asse di simmetria z si calcola (come a lezione) integrando su gusci cilindrici elementari attorno all'asse z e si ottiene (essendo $M = \pi R^2 H \rho$):

$$I_3 = \frac{1}{2} MR^2$$

2. Il momento d'inerzia rispetto all'asse x si calcola (come a lezione) a partire dal momento d'inerzia di un disco elementare parallelo al piano x, y rispetto ad asse passante per il suo centro di massa e parallelo all'asse x , e poi utilizzando il teorema di Huygens-Steiner. Si ottiene:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{12} M(3R^2 + H^2)$$

3. Per simmetria attorno all'asse z : $I_2 = I_1$

$$4. \vec{L} = (I_1 \omega_x, I_1 \omega_y, I_3 \omega_z)$$

5. $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{RifIner} = \vec{N} = 0$ perché il cilindro è isolato e quindi il momento delle forze applicate \vec{N} è nullo (legge di Newton per il moto di un corpo rigido che vale in un riferimento). Per procedere basta poi usare la relazione ricordata nel testo. Si noti che si sta trattando un corpo rigido il cui centro di massa è fisso nell'origine. Non si può trattarlo come un punto massa.

6. Usando la formula ricordata e seguendo le istruzioni del testo troviamo le equazioni richieste (equazioni di Eulero):

$$\dot{\omega}_x = \omega_y \omega_z \frac{I_1 - I_3}{I_1} \simeq 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_x = \text{costante}$$

$$\dot{\omega}_y = \omega_z \omega_x \frac{I_3 - I_1}{I_1}$$

$$\dot{\omega}_z = \omega_x \omega_y \frac{I_1 - I_2}{I_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_z = \text{costante}$$

7. Integrando la seconda delle equazioni precedenti (dove risulta $\dot{\omega}_y = \text{costante}$) abbiamo:

$$\omega_y(t) = \left(\omega_z \omega_x \frac{I_3 - I_1}{I_1}\right)t + \omega_y(t = t_1) \quad \text{la velocità angolare } \omega_y \text{ cresce linearmente col tempo.}$$

La rotazione attorno ad un asse perpendicolare all'asse di simmetria (l'asse x in questo caso) NON è stabile. Troviamo infatti che la velocità angolare di rotazione attorno all'altro asse perpendicolare all'asse di simmetria (l'asse y) cresce linearmente nel tempo. L'esempio numerico mostra che partendo da una piccola velocità angolare ω_y , dopo poco tempo essa raggiunge un valore grande rispetto ad ω_x che era inizialmente dominante, e non possiamo più risolvere il problema trascurando il prodotto $\omega_y \omega_z$ (quindi non succederà che ω_y aumenti indefinitamente nel tempo!). Abbiamo comunque capito che la rotazione attorno ad uno qualunque dei 2 assi perpendicolari all'asse di simmetria è instabile.