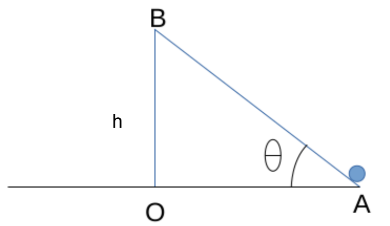
Compito n. 20

Nome | *Cognome* | *Numero di matricola*

Compito di Fisica Generale 1 + Esercitazioni del 17/01/2018.

- Modalità di risposta: si scriva la formula risolutiva nell'apposito riquadro e si barri la lettera associata al valore numerico corretto. Si effettuino entrambe le operazioni, scrivendo prima la formula e poi calcolando il valore numerico, senza mescolare le cose. Tra le alternative numeriche proposte c'è sempre la risposta corretta. Salvo specifica richiesta, i valori numerici sono approssimati con tre cifre significative (Es.: 1.3051×10^{-2} diventa 1.31×10^{-2} o 0.0131). L'approssimazione va eseguita solo alla fine e non ad ogni passaggio intermedio. Attenzione: si svolga l'esercizio sui fogli protocollo assegnati. Se la soluzione scritta nel riquadro non viene ritrovata su tali fogli, la risposta, anche se corretta, non verrà considerata valida!
- Accanto ad ogni domanda è riportato il seguente punteggio: (xx,yy). "xx" indica il punteggio che si ottiene rispondendo correttamente; "yy" indica l'eventuale penalizzazione per ogni risposta sbagliata.
- Si assuma per l'intensità dell'accelerazione gravitazionale sulla superficie terrestre il valore g = 9.81 ms^{-2}.

Problema 1: Si consideri il sistema in figura. Un punto materiale di massa m = 10 grammi si trova alla base (punto A in figura) di un piano inclinato di un angolo θ =0.480 rad. La sommità del piano inclinato (punto B in figura) si trova ad un'altezza h =0.860 m. Si supponga inizialmente che il piano inclinato sia liscio. Determinare:



1. il minimo modulo della velocità iniziale del punto materiale affinchè esso raggiunga il punto B. (4,0)

   $v_{0,min}$ [m/s] = $\boxed{}$ A $\boxed{3.06}$ B $\boxed{1.01}$ C $\boxed{1.33}$ D $\boxed{5.57}$ E $\boxed{4.11}$

Si supponga adesso che il piano inclinato non sia liscio e che il coefficiente di attrito dinamico μ_D valga 0.300. Determinare nuovamente:

2. il minimo modulo della velocità iniziale del punto materiale affinchè raggiunga il punto B. (5,0)

   $v_{0,min}^{attrito}$ [m/s] = $\boxed{}$ A $\boxed{0.427}$ B $\boxed{3.93}$ C $\boxed{0.635}$ D $\boxed{3.38}$ E $\boxed{5.16}$

3. il minimo coefficiente di attrito statico μ_S tale per cui una volta arrivato in B il punto materiale rimanga in equilibrio sulla sommità del piano inclinato (punto B). (3,0)

   μ_S = $\boxed{}$ A $\boxed{0.198}$ B $\boxed{0.521}$ C $\boxed{1.30}$ D $\boxed{0.217}$ E $\boxed{0.294}$

Si supponga adesso che la velocità del punto materiale in A sia tale per cui esso raggiunge il punto B con una velocità non nulla, pari a v_B=3.10 m/s. Determinare:

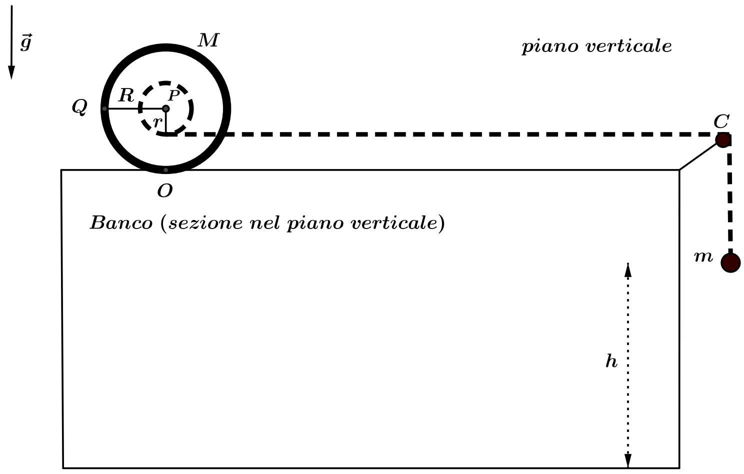
4. a quale distanza d dal punto O (indicato in figura) il punto materiale m toccherà terra in questo caso. (3,0)

   d [m] = $\boxed{}$ A $\boxed{21.5}$ B $\boxed{8.37}$ C $\boxed{1.80}$ D $\boxed{23.3}$ E $\boxed{1.62}$

Troverete che la massa m = 10 grammi del punto materiale non interviene mai in nessuno dei conti precedenti.

5. Spiegate perché. (1,0)

Problema 2: Un disco, che schematizziamo come sottile ed omogeneo di massa $M = 0.200\,\mathrm{kg}$ e raggio $R = 0.08\,\mathrm{m}$, è in realtà composto di due dischi affacciati l'uno all'altro con in mezzo una scanalatura di raggio $r = 0.05\,\mathrm{m}$ ($r < R$) nella quale si arrotola una cordicella, come in uno yo-yo per bambini. Il disco è posto su un banco, come in figura, e la cordicella, alla quale è appesa una passa $m = 0.05\,\mathrm{kg}$, passa lungo una carrucola C.
Il piano del banco è perfettamente liscio, la cordicella ha massa trascurabile e la carrucola si considera perfetta.
Quando il disco rotola con velocità angolare ω, calcolate:



1. la velocità lineare v_P del centro di massa P del disco (1,0)

   v_P [m/s] = ☐ Non si richiede valore numerico

2. l'energia cinetica totale del disco (3,0)

   $E_{cin-disco}$ [J] = ☐ Non si richiede valore numerico

Partendo da fermo, per effetto del peso della massa m, il disco rotola. Dopo che ha compiuto un giro completo, calcolate:

3. la variazione di altezza Δh della massa m (3,0)

   Δh [m] = ☐ A $\boxed{0.189}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

4. di quanto è variata l'energia potenziale della massa m dopo un giro completo del disco, specificando se tale variazione è positiva o negativa (2,0)

   ΔE_{pot-m} [J] = ☐ A $\boxed{-0.0925}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

5. la velcoità v_{P-fin} del centro di massa P del disco dopo che esso ha compiuto, rotolando, un giro completo (4,0)

   v_{P-fin} [m/s] = ☐ A $\boxed{0.648}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

Ora vogliamo impedire che il disco si muova, e decidiamo di farlo applicando una forza $\vec{F}$ nel punto Q in modo che il punto O di contatto del disco con il banco resti fermo. Si chiede di

6. calcolare il modulo di $\vec{F}$ e di specificarne direzione e verso (3,0)

   F [N] = ☐ A $\boxed{0.184}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

Soluzione del problema 1

1. Imponendo la conservazione dell'energia meccanica (la forza peso è conservativa e la reazione del piano, che è liscio, essendo perpendicolare al piano non compie lavoro) troviamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_{0,min}^2 &= mgh \\ \Rightarrow v_{0,min} &= \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

Lo stesso risultato si ottiene scrivendo l'equazione del moto lungo il piano inclinato, con coordinata ξ con origine nel punto B, diretta lungo il piano inclinato verso il basso. Il moto uniformemente accelerato con accelerazione constante positiva $g\sin\vartheta$ (nel punto A si ha $\xi_A = \frac{h}{\sin\vartheta}$), e si deve imporre che il punto materiale arrivi nel punto B con velocità nulla.

2. In presenza di attrito dinamico, l'energia non si conserva, ma si può imporre che la variazione di energia meccanica è pari al lavoro fatto dalla forza di attrito dinamico. Tale lavoro vale

$$\begin{aligned} L_{attrito} &= -\mu_D mg\cos\vartheta\overline{AB} \\ &= -\mu_D mg\cos\vartheta\frac{h}{\sin\vartheta} \end{aligned}$$

Pertanto imponiamo

$$mgh - \frac{1}{2}m[v_{0,min}^{attrito}]^2 = L_{attrito}$$

e quindi

$$v_{0,min}^{attrito} = \sqrt{2gh\Big(1+\frac{\mu_D}{\tan\vartheta}\Big)}$$

Si noti che la velocità minima in presenza di attrito dinamico è maggiore che nel caso precedente, come è ragionevole che sia. Questo ci rassicura di aver scelto correttamente il segno della forza di attrito dinamico.

3. La reazione vincolare, perpendicolare al piano inclinato, vale $R = mg\cos\vartheta$; la forza di attrito statico, diretta lungo il piano inclinato, vale, in modulo, $F_{AS} = \mu_S R = \mu_S mg\cos\vartheta$. Il punto materiale arrivato in B resterà in equilibrio se la forza di attrito statico sarà maggiore o uguale alla componente della forza gravitazionale lungo il piano $mg\sin\vartheta$. Quindi deve essere:

$$\mu_S mg\cos\vartheta \geq mg\sin\vartheta \quad \Rightarrow \quad \mu_S \geq \tan\vartheta \tag{1}$$

4. Scegliendo un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy con y positivo verso l'alto e x positivo verso sinistra le equazioni del moto per il punto materiale che parte da B (di coordinate $(0,h)$) con velocità iniziale $(-v_B\cos\vartheta, v_B\sin\vartheta)$ sono:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= 0 \\ \ddot{y}(t) &= -g \end{aligned}$$

che integrando due volte con le condizioni iniziali date forniscono:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_B t\cos\vartheta \\ y(t) &= h + v_B t\sin\vartheta - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Dalla condizione $y(t_c) = 0$ si ottiene il tempo di caduta t_c, che vale

$$t_c = \frac{v_B\sin\vartheta}{g}\left[1+\sqrt{1+\frac{2gh}{v_B^2\sin^2\vartheta}}\right] \tag{2}$$

dove nella soluzione della equazione di secondo grado si deve scegliere il segno + altrimenti il punto massa toccherebbe terra con una velocità lungo y minore di quella $v_B\sin\vartheta$ con cui è partito, che non possibile. Otteniamo quindi:

$$d = v_B\cos\vartheta\cdot t_c = \frac{v_B^2\sin\vartheta\cos\vartheta}{g}\left[1+\sqrt{1+\frac{2gh}{v_B^2\sin^2\vartheta}}\right] \tag{3}$$

5. La massa m del punto materiale non entra mai per il principio di equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale per cui tutti i corpi, per effetto della forza gravitazionale della Terra, cadono con la stessa accelerazione. Inoltre, poichè le forze di attrito e le reazioni vincolari sono anch'esse proporzionali alla forza gravitazionale, anche le accelerazioni da esse prodotte non dipendono dalla massa del corpo in questione. Dire, come hanno fatto molti, che "la massa non è rilevante perché si semplificca" è un altro modo di porre la stessa domanda, cioè: Perché la massa si semplifica?

Soluzione del problema 2

1. Mentre il disco rotola senza strisciare con velocità angolare ω (che è un vettore $\vec{\omega}$ perpendicolare al piano verticale nel punto P, di verso entrante se il disco avanza verso destra), dopo un periodo $2\pi/\omega$ il punto di contatto col blocco ha percorso la distanza $2\pi R$, quindi si è mosso con velocità lineare (spazio percorso diviso tempo impiegato) $2\pi R/(2\pi/\omega) = \omega R$, e così il centro di massa del disco, quindi:
$$v_P = \omega R \tag{4}$$
Lo steso succede per una bicicletta, e per questo se le ruote hanno raggio più grande, una pedalata ci fa avanzare di più che nel caso di una bicicletta con ruote più piccole.

2. Il disco ha energia cinetica perché avanza e anche energia rotazionale perché gira. Quindi:
$$E_{cin-disco} = \frac{1}{2}Mv_P^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{5}$$
dove I è il momento di inerzia del disco rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa e perpendicolare al disco stesso:
$$I = \frac{1}{2}MR^2 \tag{6}$$
Quindi possiamo scrivere l'energia cinetica totale del disco in termini della velocità lineare v_P del suo centro di massa appena calcolata sopra:
$$E_{cin-disco} = \frac{1}{2}Mv_P^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}MR^2\Big)\frac{v_P^2}{R^2} = \frac{3}{4}Mv_P^2 \tag{7}$$

3. In un giro completo del disco il suo centro di massa si sposta di $2\pi R$, ma la cordicella arrotolandosi si accorcia di $2\pi r$, quindi la massa m scende di:
$$\Delta h = 2\pi(R-r) \tag{8}$$

4. Siccome la massa m scende, la sua energia potenziale, che è proporzionale all'altezza dal punto di zero (alla base del blocco) diminuisce:
$$\Delta E_{pot-m} = -mg\Delta h = -2mg\pi(R-r) < 0 \tag{9}$$

5. Per rispondere a questa domanda usiamo la conservazione dell'energia tra l'istante iniziale quando tutto è fermo e c'è solo l'energia potenziale della massa m appesa ad altezza h dal suolo, e quindi l'energia totale del sistema è:
$$E_i = mgh \tag{10}$$
e l'istante finale (quando il disco ha fatto un giro completo). Si noti che la massa m non scende con la stessa velocità v_P con cui avanza il centro di massa del disco, ma con v_P meno la velocità con cui, mentre il disco rotola, la cordicella cui è appesa m si arrotola, che è $\omega r = \frac{v_P}{R}r$. Quindi, la massa m scende con velocità $(v_P - \frac{v_P}{R}r)$. All'istante finale (quando il disco ha fatto un giro completo) l'energia totale del sistema è: energia cinetica del disco M che avanza e gira (calcolata al punto 2), più energia cinetica della massa m che scende con la velocità appena calcolata, più energia potenziale della massa m che alla fine del giro completo si trova ad altezza $h - \Delta h$, Δh calcolata al punto 3. Quindi:
$$E_{fin} = \frac{3}{4}Mv_{P-fin}^2 + \frac{1}{2}m(v_{P-fin} - \frac{v_{P-fin}}{R}r)^2 + mg(h-\Delta h) \tag{11}$$
Poiché l'energia si conserva (non ci sono dissipazioni) abbiamo:
$$E_i = E_{fin} \quad \Rightarrow \quad v_{P-fin} = \sqrt{\frac{mg\Delta h}{\frac{3}{4}M + \frac{1}{2}m\big(1-\frac{r}{R}\big)^2}} \tag{12}$$

6. Per impedire al disco di rotolare bisogna considerare il momento delle forze in gioco rispetto al punto di contatto O. Su O agisce il momento della forza peso di m diretta verticalmente verso il basso con braccio $R-r$. Esso vale $mg(R-r)$ e farebbe rotolare il disco verso destra. Per impedirlo applicando una forza F in Q, che ha braccio R, essa deve essere diretta verso il basso (in modo che farebbe rotolare il disco verso sinistra). Il disco non si muove se i due momenti sono uguali in modulo, cioè se $FR = mg(R-r)$, da cui otteniamo F:
$$F = \frac{mg(R-r)}{R} = mg\big(1-\frac{r}{R}\big) \tag{13}$$