

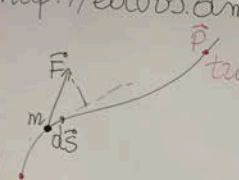
S1 - Prima settimana, lezioni del 14 e 16 febbraio 2017

- Lavoro, forze conservative e definizione di energia potenziale (con particolare attenzione al suo segno)
- Energia potenziale, energia cinetica e conservazione dell'energia totale
- Energia potenziale gravitazionale; definizione per un corpo sulla superficie della Terra e per un corpo a distanza generica. Risoluzione di un apparente paradosso.

Richiami:

- significato geometrico del prodotto scalare
- parametri dimensionali piccoli rispetto ad 1, sviluppi in serie di potenze e loro importanza in fisica
- ordini di grandezza e uso delle potenze di 10

<http://edwos.dm.unipi.it/homendnbil.html>



$a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

$g = \frac{GM}{R_T^2} \approx 9.8 \text{ ms}^{-2}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$

$\vec{a} + \vec{b} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

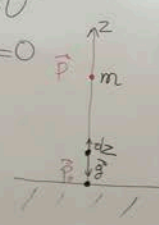
$L_{\vec{P}_0 \rightarrow \vec{P}} = \int_0^{z_0} -mg dz = -mg \int_0^{z_0} dz = -mgz_0 < 0$

$\vec{m}\vec{g} = (0, -mg) \quad U(z_0) = +mgz_0 > 0$

$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s}$

$Nm = kg m^2 s^{-2} = J$

$L = \int_{\vec{P}_0}^{\vec{P}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ Joule



FORZE CONSERVATIVE

$$U(\vec{P}) - U(\vec{P}_0) = - \int_{\vec{P}_0 \rightarrow \vec{P}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{\vec{P}_0}^{\vec{P}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$U(\vec{P}) = - \int_{\vec{P}_0}^{\vec{P}} \vec{F} \cdot d\vec{s} + U(\vec{P}_0)$$

energia potenziale della forza \vec{F}

livello di riferimento

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$U(\vec{P}) - U(\vec{P}_0) = - \int_{\vec{P}_0}^{\vec{P}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \quad \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v} \quad d\vec{s} = \vec{v} dt \quad \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$= - \int_{\vec{P}_0}^{\vec{P}} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = -m \int_{\vec{v}(\vec{P}_0)}^{\vec{v}(\vec{P})} \vec{v} \cdot d\vec{v} = RI$$

$$= m \int_{\vec{v}(\vec{P}_0)}^{\vec{v}(\vec{P})} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v^2$$

$$\vec{v}(\vec{P}) \quad \vec{v} \quad d\left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}\right) = d\left(\frac{1}{2} v^2\right) \quad U(\vec{P}) + \frac{1}{2} m v^2 = U(\vec{P}_0) + \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\int x dx = d\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$x dx$$

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$d(v^2) = d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot d\vec{v} + d\vec{v} \cdot \vec{v} = 2 \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r}$

$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{GMm}{r^3} \vec{r}$

$|\vec{F}| = \frac{GMm}{r^2}$

$U(\vec{P}) = - \int_{\infty}^r \left(-\frac{GMm}{r'^2}\right) \vec{r}' \cdot d\vec{r}' = +GMm \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{GMm}{r}$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

$\vec{F}_G = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}$

$[G] = m^3 s^{-2} kg^{-1}$

$G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1}$

$U(P) - U(\infty) = - \int_{\infty}^r d\mathcal{L} = +GMm \int_{\infty}^r \frac{1}{r'^2} dr' = GMm \int_0^r r'^{-2} dr' = -GMm \left[r'^{-1} \right]_{\infty}^r = -\frac{GMm}{r}$

$d\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{s}$

$d\mathcal{L} = \vec{F}_G \cdot d\vec{r} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} = -\frac{GMm}{r^2} dr$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$

$U(r) = -\frac{GMm}{r} < 0$

$\frac{m^3 s^{-2} kg^{-1} \cdot kg}{m} = kg m^2 s^{-2} = J$

$U(P) - U(0)$
 $\vec{g} = (0, -g)$
 $g = \frac{GMm}{R_T^2} \approx 9.8 \text{ ms}^{-2}$
 $U(P) - U(0) = - \int_0^h \vec{F} \cdot d\vec{z} = - \int_0^h (-mg) dz = +mg \int_0^h dz = mgh > 0$

$U(P) - U(0) = -\frac{GMm}{R_T+h} + \frac{GMm}{R_T}$
 $\frac{h}{R_T} = \frac{15 \text{ m}}{64 \cdot 10^6} = \frac{1.5}{64} \cdot 10^{-6} = \frac{15 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-6}}{64} = \frac{15 \cdot 10^{-7}}{64} = 2.3 \cdot 10^{-8}$

CM Terra $h \ll R_T$ $\frac{h}{R_T} \ll 1$ $10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$ $(10^a)^b = 10^{ab}$ $= 0.000000023$

$\epsilon \ll 1$
 $x \ll 1$
 $\frac{df}{dx} \equiv f'(x)$
 $\frac{d^2f}{dx^2} \equiv f''(x)$
 \vdots

SVILUPPO IN SERIE DI POTENZE (DI TAYLOR)

$f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + \frac{2x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^3)$

$x = \epsilon \ll 1$

$f'(x) = -1(1+x)^{-2}$ $f'(0) = -1$

$f''(x) = +2(1+x)^{-3}$ $f''(0) = +2$

$U(P) - U(0) = -GMm \left(\frac{1}{R_T+h} + \frac{1}{R_T} \right) = -GMm \left(\frac{1}{R_T \left(1 + \frac{h}{R_T} \right)} - \frac{1}{R_T} \right) =$

$= -\frac{GMm}{R_T} \left(\frac{1}{1+\epsilon} - 1 \right)$

$\approx -\frac{GMm}{R_T} \left(1 - \frac{h}{R_T} + \frac{h^2}{R_T^2} + \dots - 1 \right) \approx -\frac{GMm}{R_T^2} \left(-h + \frac{h^2}{R_T} + \dots \right)$

$\approx \frac{GMm}{R_T^2} h - \frac{GMm}{R_T^2} h \left(\frac{h}{R_T} \right) + \dots \approx mgh - mgh \left(\frac{h}{R_T} \right)$

$\approx mgh \left(1 - \frac{h}{R_T} \right) > 0$