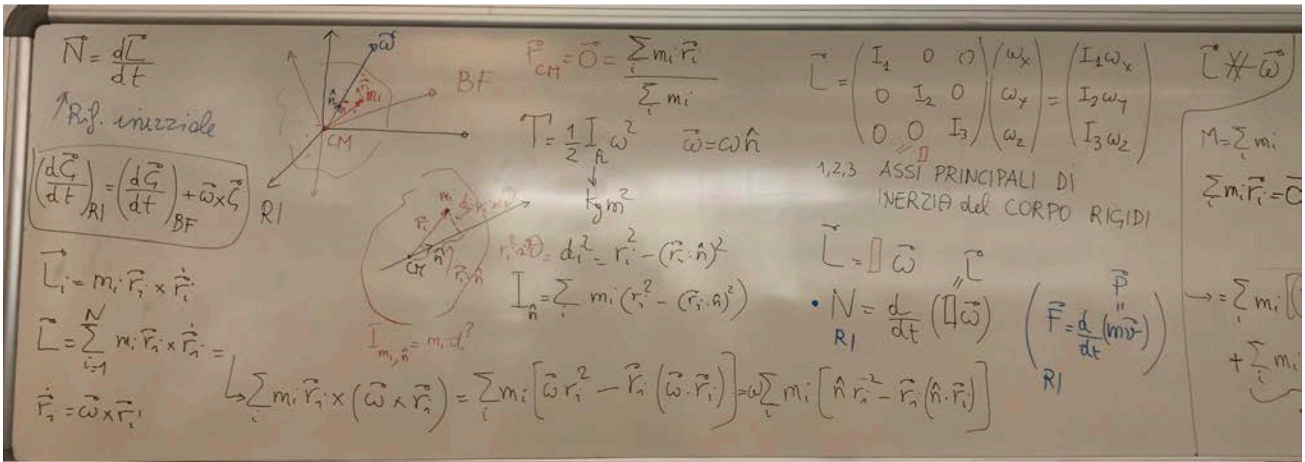
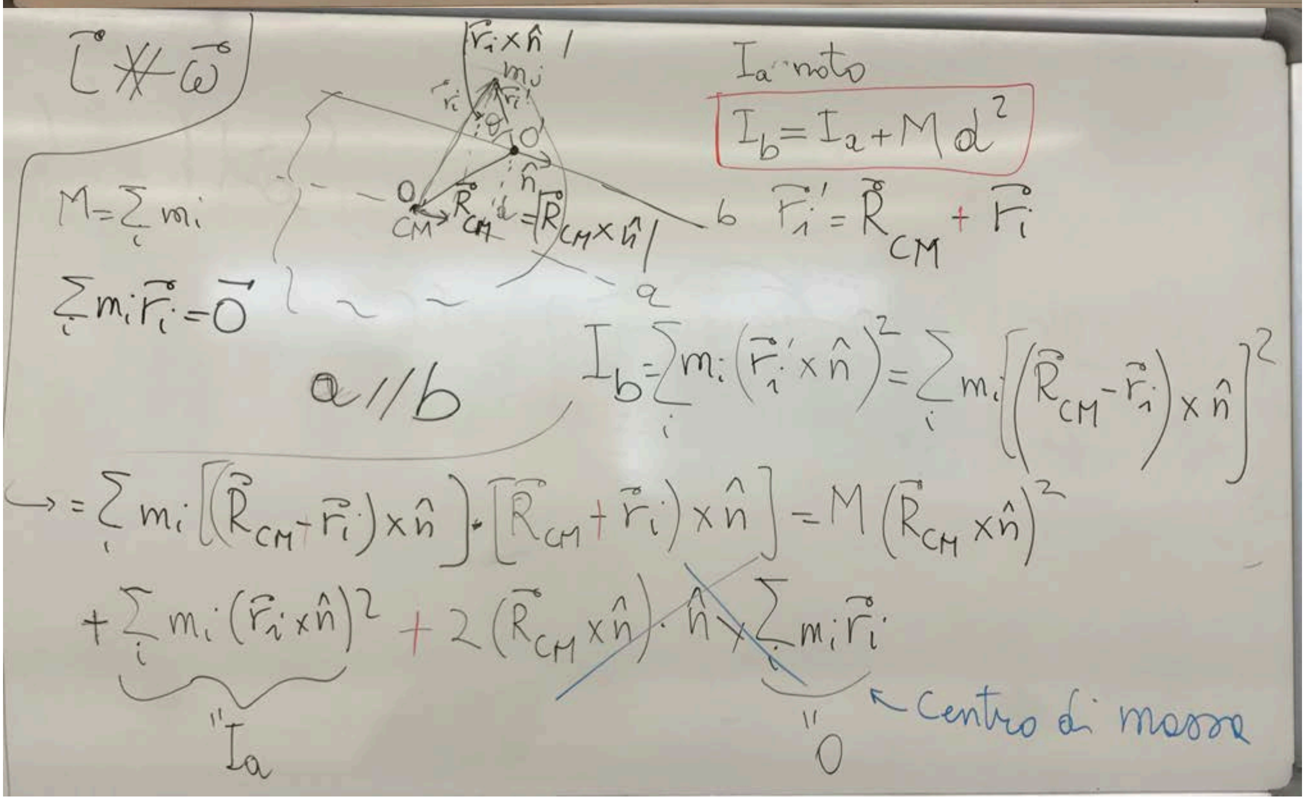
S10 - Decima settimana, lezione del 2 maggio 2017 (solo 12:20-13:30 causa assemblea studentesca) e 4 maggio 2017

Equazione del moto del corpo rigido; momento delle forze applicate e momento angolare.
Momento d'inerzia rispetto ad un asse non passante per il suo centro di massa.
Matrice dei momenti di inerzia nel riferimento degli assi principali di inerzia, relazione tra momento angolare, matrice dei momenti di inerzia e velocità angolare.
Calcolo dei momenti principali di inerzia per il disco sottile e il cilindro (con distribuzione di massa omogenea).
Esercizio: periodo di oscillazione di un cilindro sospeso con un filo di lunghezza trascurabile in presenza della accelerazione locale di gravità (piccole oscillazioni)

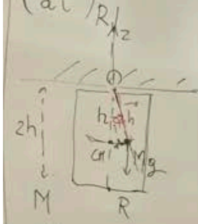


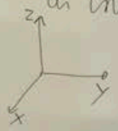


$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right) = \vec{N}$ $\vec{L} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\omega_x \\ I_2\omega_y \\ I_3\omega_z \end{pmatrix}$ $\vec{L} = [I]\vec{\omega}$

D

x, y, z assi principali di inerzia





$I_{O_{\perp asse}} = I_{CM \perp asse} + Mh^2$

$\vec{N} = \vec{h} \times M\vec{g}$

$N = -h M g \sin\vartheta$

Se fosse un punto messo in CM

ϑ piccolo: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{h}}$ $P = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$

$\frac{d}{dt}\left(I_{O_{\perp asse}}\,\omega\right) = -Mgh\sin\vartheta$

$I_{O_{\perp asse}}\ddot{\vartheta} = -Mgh\sin\vartheta$ se $\sin\vartheta \simeq \vartheta$

$\ddot{\vartheta} \simeq -\frac{Mgh}{I_{O_{\perp asse}}}\vartheta(t)$

$\ddot{\vartheta} + \omega_0^2\vartheta = 0$

$\omega_0^2 = \frac{Mgh}{\frac{1}{4}MR^2 + \frac{4}{3}Mh^2} = \frac{g}{\ell^*}$

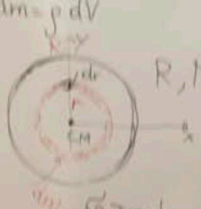
$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mgh}{I_{O_{\perp asse}}}} = \sqrt{\frac{g}{I_{O_{\perp asse}}/Mh}}$?

$= \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}Mh^2 + Mh^2 = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{4}{3}Mh^2$

$\ell^* = \frac{\frac{1}{4}R^2 + \frac{4}{3}h^2}{h}$

ρ $\frac{kg}{m^3}$ $M = \rho V$ $I_{CM,a} = \int_M d^2_{min,a}\,dm$

$dm = \rho\, dV$



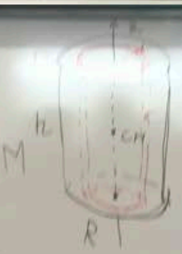
$dm = \sigma 2\pi r\,dr$

R, M $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$

$I_1 = I_2$

$I_z = \int_M r^2 dm = \int_0^R r^2 \sigma 2\pi\, dr = 2\pi\sigma\int_0^R r^3 dr = 2\pi\sigma\frac{R^4}{4}$

$= 2\pi\frac{M}{\pi R^2}\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}MR^2$

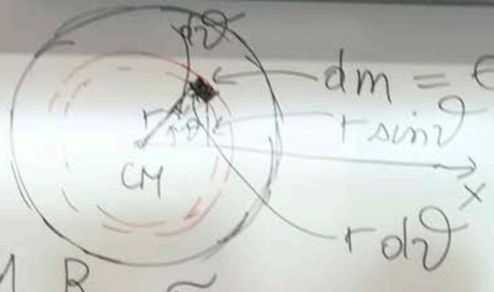


$\rho = \frac{M}{\pi R^2 h}$ $dm = \rho\, dV = \rho\, 2\pi r\, dr\, h$

$I_{\substack{asse\\simmetria}} = \int_M r^2 dm = 2\pi\rho h\int_0^R r^3 dr =$

$= 2\pi\rho h\frac{R^4}{4} = 2\pi h\frac{M}{\pi R^2 h}\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}MR^2$

non dipende da h



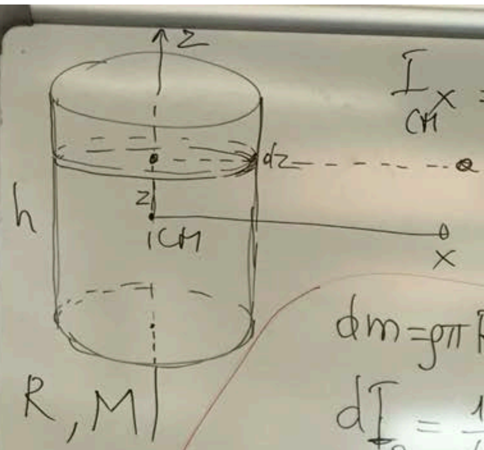
$dm = \sigma\, r\, d\vartheta\, dr$

M, R, σ

$I_{\substack{asse\\nel\ piano\\passante\ per\ CM}} = \int_M r^2\sin^2\vartheta\, dm =$

$= \sigma\int_0^R\int_0^{2\pi} r^3\sin^2\vartheta\, d\vartheta\, dr = \sigma\int_0^R r^3 dr\int_0^{2\pi}\sin^2\vartheta\, d\vartheta = \sigma\frac{R^4}{4}\pi = \frac{M}{\pi R^2}\frac{R^4}{4}\pi$

$= \frac{1}{4}MR^2$



R, M

ρ

$$I_{CM\,x} = 2\left(\frac{1}{4}\pi\rho R^4 \int_0^{h/2} dz + \rho\pi R^2 \int_0^{h/2} z^2\, dz\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{4}\rho\pi R^4 \frac{h}{2} + \rho\pi R^2 \frac{1}{3}\frac{h^3}{8}\right)$$

$$dm = \rho\pi R^2\, dz$$

$$dI_a = \frac{1}{4}\, dm\, R^2$$

$$dI_x = dI_a + z^2 dm = \frac{1}{4}\pi R^4 \rho\, dz + z^2 \rho\pi R^2 dz$$

$$= \frac{1}{4}\cancel{\pi} R^{\cancel{4}\,2} \cancel{h} \frac{M}{\cancel{\pi R^2 h}} + \frac{1}{12}\cancel{\pi R^2} h^{\cancel{3}\,2} \frac{M}{\cancel{\pi R^2 h}} =$$

$$= \frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{12} M h^2$$