

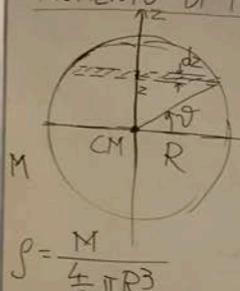
Lezione del 9 maggio 2017

Calcolo del momento d'inerzia di una sfera omogenea (usando quello di un disco); momenti di inerzia di un ellissoide triassiale.

Esercizio di un cilindro messo in rotazione con una cordicella; combinazione di moto di traslazione e rotazione; calcolo del lavoro fatto.

Derivazione delle equazioni di Eulero e loro applicazione al calcolo della precessione libera della terra.

**MOMENTO DI INERZIA DI UNA SFERA (omogenea)**



$$dI = \frac{1}{2} dm R^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{2} dm (R^2 - z^2)$$

$$dm = \pi (R^2 - z^2) dz \rho$$

$$I_{\text{sfera}} = \int_0^R \frac{1}{2} \pi \rho (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{1}{2} \pi \rho \int_0^R (R^4 + z^4 - 2R^2 z^2) dz =$$

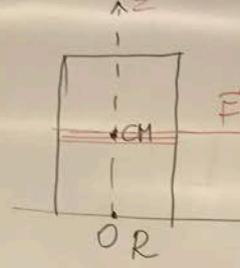
$$= \frac{1}{2} \pi \rho \left( R^4 z + \frac{z^5}{5} - 2R^2 \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{1}{2} \pi \rho R^5 \left( 1 + \frac{1}{5} - \frac{2}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \pi \rho R^5 \frac{8}{15} = \frac{1}{5} MR^2$$

$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R^3}$   
 $I_{\text{sfera}} = \frac{2}{5} MR^2$

$I_{\text{ellissoide}} = \frac{1}{5} M (b^2 + c^2)$  (x axis principale)  
 $I_{\text{ell}} = \frac{1}{5} M (c^2 + e^2)$  (y)  
 $I_{\text{ell}} = \frac{1}{5} M (e^2 + b^2)$  (z)

---



$\frac{dL}{dt} = \vec{N}$   
 $\frac{dL}{dt} = N = FR$

$\frac{d}{dt} (I \dot{\theta}) = I \ddot{\theta}$   
 $FR = \frac{1}{2} MR^2 \ddot{\theta}$

$\ddot{\theta} = \frac{2F}{MR} \frac{\text{kg m s}^{-2}}{\text{kg m}}$   
 Moto rotatorio uniformemente accelerato

$I_2 = \frac{1}{2} MR^2$   
 $L(t) = I_2 \dot{\theta}(t)$  tutto lungo z

$\dot{\theta}(t)$  posizione angolare  
 $\dot{\theta}(t)$  velocità angolare  
 $\ddot{\theta}(t)$  accelerazione ang. o, t

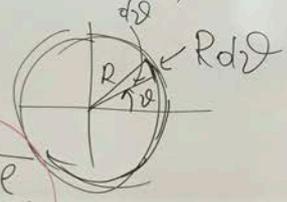
tutto lungo z

$$\dot{v}(t) = \frac{2F}{MR} t + \dot{v}(0) \rightarrow v(t) = \frac{1}{2} \frac{2F}{MR} t^2 + \dot{v}(0) = \frac{F}{MR} t^2$$

$$\ddot{x} = \frac{F}{M}$$

Calcolare  $\dot{v}_{max} = \dot{v}(t^*)$

$$L = R \dot{v}(t) = \frac{RF}{MR} t^2$$



a  $t^*$  tutte le cordicelle di lunghezza  $l$  e sciolte

$$l = \frac{F}{M} t^*{}^2 \Rightarrow t^* = \sqrt{\frac{Me}{F}}$$

$$\dot{v}_{max} = \dot{v}(t^*) = \frac{2F}{MR} \sqrt{\frac{Me}{F}} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{Fe}{M}} \text{ rad/s}$$

$$\dot{v}_{finale} = \dot{v}_{max} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{Fe}{M}}$$

$$T_{finale} = \frac{1}{2} I \dot{v}_{finale}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} MR^2 \cdot \frac{4}{R^2} \frac{Fe}{M} = Fe \text{ ROTAZIONE}$$

$$\ddot{x} = \frac{F}{M} \quad v_x = \frac{F}{M} t + \dot{x}(0)$$

$$v_{x, finale} = v_x(t^*) = \frac{F}{M} t^* = \frac{F}{M} \sqrt{\frac{Me}{F}} = \sqrt{\frac{Fe}{M}}$$

$$T_{traslazione finale} = \frac{1}{2} M v_{x, finale}^2 = \frac{1}{2} M \frac{Fe}{M} = \frac{1}{2} Fe$$

$$T_{totale finale} = Fe + \frac{1}{2} Fe = \frac{3}{2} Fe$$

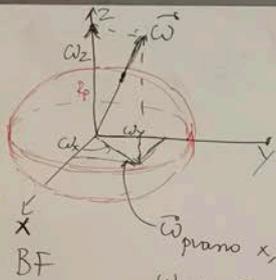
Lavoro (tutto) fatto da  $F$

$$L_{traslazione} = Fx(t^*)$$

$$x(t^*) = \frac{1}{2} \frac{F}{M} t^*{}^2 = \frac{1}{2} \frac{F}{M} \frac{Me}{F} = \frac{1}{2} l$$

$$L_{tras} = \frac{1}{2} Fe$$

$$L_{rotazione} = N \Delta \theta = FR \left( \frac{l}{R} \right) = Fl$$



$$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_1 \omega_x \\ I_2 \omega_y \\ I_3 \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\left( \frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{BF} = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_x \\ I_2 \dot{\omega}_y \\ I_3 \dot{\omega}_z \end{pmatrix} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{L} = \begin{pmatrix} \omega_y L_z - \omega_z L_y \\ \omega_z L_x - \omega_x L_z \\ \omega_x L_y - \omega_y L_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{N} = \vec{0} \quad ||$$

$$I_1 = I_2$$

$$\begin{cases} N_x = I_1 \dot{\omega}_x + \omega_y L_z - \omega_z L_y \\ N_y = I_2 \dot{\omega}_y + \omega_z L_x - \omega_x L_z \\ N_z = I_3 \dot{\omega}_z + \omega_x L_y - \omega_y L_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_x = I_1 \dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z (I_2 - I_3) \\ N_y = I_2 \dot{\omega}_y - \omega_z \omega_x (I_3 - I_1) \\ N_z = I_3 \dot{\omega}_z - \omega_x \omega_y (I_1 - I_2) \end{cases}$$

TERRA ISOLATA

$$\begin{cases} 0 = I_1 \dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z (I_1 - I_3) \\ 0 = I_2 \dot{\omega}_y - \omega_z \omega_x (I_3 - I_1) \\ 0 = I_3 \dot{\omega}_z + 0 \Rightarrow \omega_z = \text{costante} \end{cases}$$

$$\dot{\omega}_x = \omega_y \left[ \omega_z \frac{I_1 - I_3}{I_1} \right]$$

$$\dot{\omega}_y = -\omega_x \left[ \omega_z \frac{I_1 - I_3}{I_1} \right]$$

$I_3 > I_1$   
 $< 0$

$$\Omega = \omega_z \left( \frac{I_1 - I_3}{I_1} \right)$$

$$|\Omega| \ll \omega_z$$

Eq. di  
EULERO  
CORPO RIGIDO

$$\approx \frac{2\pi}{86164} \frac{\text{rot}}{\text{s}}$$

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_x = \dot{\omega}_y \Omega = -\omega_x \Omega^2 \\ \ddot{\omega}_y = -\omega_y \Omega^2 \end{cases}$$

