Fisica Generale I con esercitazioni per studenti di Chimica.
Esercizi su argomenti del secondo semestre
proposti da Anna Nobili e Marco Mendolicchio, svolti in classe e raccolti da Marco Mendolicchio

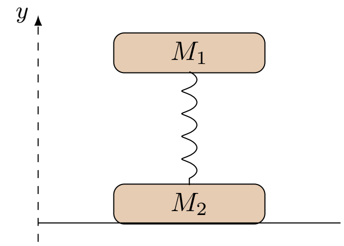
---

Esercitazione di Martedì 16 maggio 2017

Anno accademico 2016-2017

Esercizio 1

Si considerino due masse $M_1 = 3$ Kg ed $M_2 = 4$ Kg connesse da una molla di costante elastica $k = 200$ N/m e lunghezza a riposo $\ell_0 = 1$ m disposte verticalmente, e sia M_2 la massa disposta sul pavimento. La molla viene compressa di una lunghezza δ a partire dalla posizione di equilibrio del sistema, e successivamente viene lasciata libera. Considerando trascurabile qualsiasi forma di attrito si risponda alle seguenti domande.



a) Supponendo che la molla venga compressa di una lunghezza δ sufficientemente grande da permetterne il distacco da terra, calcolare la posizione della massa superiore (M_1) quando quella inferiore (M_2) si distacca da terra. Si calcoli inoltre la minima compressione δ_{min} necessaria affinchè avvenga il distacco.

b) Determinare il periodo di oscillazione della distanza tra le due masse dopo il distacco da terra.

Soluzione

a) Le forze agenti su questo sistema sono tutte orientate lungo l'asse y rappresentato in figura. Chiamando con y_1 e y_2 le coordinate associate rispettivamente alle masse M_1 e M_2. Sul blocco inizialmente disposto sul pavimento, agisce una reazione vincolare R, che si azzera una volta che avviene il distacco. Questa sarà proprio la condizione da imporre successivamente:

$$R = 0 \tag{1}$$

Per prima cosa è necessario scrivere l'equazione del moto del corpo di massa M_2, considerando che su di esso agiscono la forza peso, la forza elastica e la reazione vincolare:

$$M_2 \ddot{y}_2 = -M_2 g - k(\ell_0 - y_1) + R \tag{2}$$

All'istante del distacco la massa M_2 è ferma, il che implica $\ddot{y}_2 = 0$:

$$-M_2 g - k(\ell_0 - y_1) + R = 0 \tag{3}$$

Imponendo ora che $R = 0$, otteniamo la posizione di della massa superiore al momento del distacco di quella inferiore da terra (y_1^*):

$$-M_2 g - k\ell_0 + k y_1^* = 0 \quad \to \quad y_1^* = \frac{M_2 g + k\ell_0}{k} = \frac{4 \cdot 9.81 + 2 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^2} = 1.19 \text{ m} \tag{4}$$

Per garantire il distacco, è necessario che δ sia uguale almeno alla differenza tra il valore di y_1^* (quando avviene il distacco) e il valore di y_1 di equilibrio (y_1^0). Quest'ultimo è facilmente calcolabile in quanto l'equazione del moto di y_1 è:

$$M_1 \ddot{y}_1 = k(\ell_0 - y_1) - M_1 g \tag{5}$$

Il corpo è in equilibrio quando tutte le forze applicate ad esso danno un contributo complessivo nullo, ossia:

$$k(\ell_0 - y_1^0) - M_1 g = 0 \quad \to \quad y_1^0 = \ell_0 - \frac{M_1 g}{k} = 1 - \frac{3 \cdot 9.81}{2 \cdot 10^2} = 0.85 \text{ m} \tag{6}$$

Quindi il valore minimo di δ vale:

$$\delta_{min} = y_1^* - y_1^0 = \frac{M_2 g + k\ell_0}{k} - \left(\ell_0 - \frac{M_1 g}{k}\right) = \frac{M_2 g}{k} + \cancel{\ell_0} - \cancel{\ell_0} + \frac{M_1 g}{k} = \frac{(M_1 + M_2)g}{k} \tag{7}$$

Inserendo i valori numerici:

$$\delta_{min} = \frac{(3+4)\cdot 9.81}{2 \cdot 10^2} = 0.34 \text{ m} \tag{8}$$

b) Per prima cosa, definiamo quali sono le equazioni del moto delle due masse una volta che il distacco è avvenuto. Entrambi i corpi risentono della forza elastica e delle rispettive forze peso. Quindi:

$$\begin{cases} M_1 \ddot{y}_1 = k(\ell_0 - y_1 + y_2) - M_1 g \\ M_2 \ddot{y}_2 = -k(\ell_0 - y_1 + y_2) - M_2 g \end{cases} \tag{9}$$

A questo punto scriviamo esplicitamente le leggi per $\ddot{y}_1$ e $\ddot{y}_2$:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = \frac{k}{M_1}(\ell_0 - y_1 + y_2) - g \\ \ddot{y}_2 = -\frac{k}{M_2}(\ell_0 - y_1 + y_2) - g \end{cases} \tag{10}$$

Essendo interessati alla distanza tra le due masse, una buona idea ora è quella di sottrarre le due equazioni membro a membro:

$$\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 = \left(\frac{k}{M_1} + \frac{k}{M_2}\right)(\ell_0 - y_1 + y_2) \tag{11}$$

Per rendere l'espressione più compatta, definiamo la coordinata relativa della posizione della massa M_2 rispetto alla posizione della massa M_1, $y = y_1 - y_2$, e la introduciamo nell'espressione precedente:

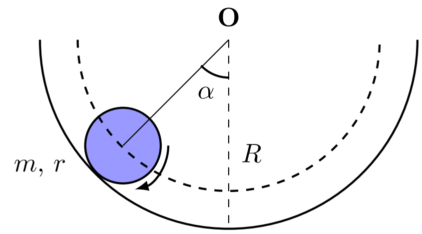
$$\ddot{y} = \left(k\frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}\right)(\ell_0 - y) = -\frac{k}{\mu}(y - \ell_0) \qquad \text{con} \qquad \mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} = 1.71 \text{ Kg} \tag{12}$$

dove μ rappresenta la massa ridotta del sistema. Questa è l'equazione di un oscillatore armonico di frequenza angolare ω uguale a:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^2}{1.71}} = 10.81 \text{ s}^{-1} \tag{13}$$

Esercizio 2

Una sferetta omogenea di massa m e raggio r si muove lungo una superficie a forma di cavità semisferica di raggio R disposta verticalmente, rotolando senza strisciare.



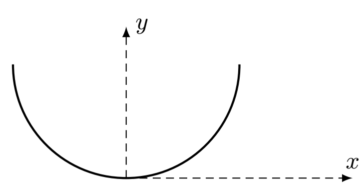
a) Si esprimano in funzione di $\dot{\alpha}$, cioè della velocità angolare del centro di massa della sfera rispetto ad **O**, la velocità lineare del centro di massa e la velocità angolare della sfera.

b) Si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio ($\alpha = 0$).

c) Supposto ora che la sfera venga abbandonata in quiete a partire da $\alpha_{max} = 30°$, calcolare le due velocità di cui al punto a) quando il centro della sfera transita per la verticale.

Soluzione

a) Il centro di massa (CM) della sfera è vincolato a muoversi lungo una semicirconferenza centrata nel punto **O** (come la cavità) di raggio $R - r$. Considerando un sistema di assi cartesiani O_{xy} orientato come in figura,



il centro di massa viene individuato dalle coordinate $(x_{\mathrm{CM}}, y_{\mathrm{CM}})$ che valgono:

$$\begin{cases} x_{\mathrm{CM}} = -(R-r)\sin\alpha \\ y_{\mathrm{CM}} = (R-r)(1-\cos\alpha) \end{cases} \tag{14}$$

Dato che la velocità del CM è data da,

$$v_{\mathrm{CM}} = \sqrt{\dot{x}_{\mathrm{CM}}^2 + \dot{y}_{\mathrm{CM}}^2} \tag{15}$$

per prima cosa è necessario calcolare le velocità lungo i due assi, derivando rispetto al tempo l'equazione (14):

$$\begin{cases} \dot{x}_{\mathrm{CM}} = -\dot{\alpha}(R-r)\cos\alpha \\ \dot{y}_{\mathrm{CM}} = \dot{\alpha}(R-r)\sin\alpha \end{cases} \tag{16}$$

Quindi utilizzando l'espressione (15):

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{CM}} &= \sqrt{(-\dot{\alpha}(R-r)\cos\alpha)^2 + (\dot{\alpha}(R-r)\sin\alpha)^2} \\ &= \sqrt{\dot{\alpha}^2(R-r)^2\cos^2\alpha + \dot{\alpha}^2(R-r)^2\sin^2\alpha} = \dot{\alpha}(R-r)\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} \\ &= \dot{\alpha}(R-r) \end{aligned} \tag{17}$$

La velocità del CM espressa in termini di $\dot{\alpha}$ dunque vale:

$$v_{\mathrm{CM}} = \dot{\alpha}(R-r) \tag{18}$$

Inoltre, v_{CM} può essere calcolata sfruttando anche la condizione di puro rotolamento:

$$v_{\mathrm{CM}} = \omega r \tag{19}$$

Entrambe le espressioni (15) e (19) permettono il calcolo di v_{CM} e possono essere combinate in modo da determinare anche ω in funzione di $\dot{\alpha}$:

$$\dot{\alpha}(R-r) = \omega r \quad \rightarrow \quad \omega = \dot{\alpha}\frac{R-r}{r} \tag{20}$$

b) L'energia totale della sfera può essere scritta come la somma di un contributo cinetico e uno potenziale. In particolare, l'energia cinetica è il risultato di un contributo traslazionale e uno rotazionale:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{21}$$

Questa equazione può essere sviluppata sostituendo ad ω il risultato espresso nell'equazione (20) e considerando che il momento di inerzia della sfera omogenea vale $2/5mr^2$:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m[\dot{\alpha}(R-r)]^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{5}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}m\dot{\alpha}^2(R-r)^2 + \frac{1}{5}mr^2\omega^2 \tag{22}$$

L'energia potenziale $\mathcal{U}$ viene espressa mediante la coordinata y_{CM} calcolata precedentemente:

$$\mathcal{U} = mgy_{\mathrm{CM}} = mg(R-r)(1-\cos\alpha) \tag{23}$$

Adesso abbiamo tutte le informazioni necessarie per scrivere l'energia complessiva $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \mathcal{T} + \mathcal{U} \\
&= \frac{1}{2}m\dot{\alpha}^2(R-r)^2 + \frac{1}{5}Mr^2\omega^2 + mg(R-r)(1-\cos\alpha) \\
&= \frac{1}{2}m\dot{\alpha}^2(R-r)^2 + \frac{1}{5}Mr^2\left(\dot{\alpha}\frac{R-r}{r}\right)^2 + mg(R-r)(1-\cos\alpha) \\
&= \frac{1}{2}m\dot{\alpha}^2(R-r)^2 + \frac{1}{5}M\cancel{r^2}\dot{\alpha}^2\frac{(R-r)^2}{\cancel{r^2}} + mg(R-r)(1-\cos\alpha) \\
&= \frac{7}{10}\dot{\alpha}^2(R-r)^2 + mg(R-r)(1-\cos\alpha)
\end{aligned} \tag{24}$$

A questo punto sfruttiamo il principio di conservazione dell'energia, che ci permette di affermare che questa non varia nel tempo ($d\mathcal{E}/dt = 0$):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{7}{5}m\dot{\alpha}\ddot{\alpha}(R-r)^2 + mg(R-r)\sin(\alpha)\dot{\alpha} = 0 \tag{25}$$

Semplificando $\dot{\alpha}$, m ed $(R-r)$ otteniamo:

$$\frac{7}{5}\ddot{\alpha}(R-r) = -g\sin(\alpha) \quad \rightarrow \quad \ddot{\alpha} = -\frac{5}{7}\frac{g}{R-r}\sin\alpha \tag{26}$$

L'ultimo passaggio prevede di applicare l'ipotesi di piccole oscillazioni ($\alpha \ll 1$), per cui abbiamo che $\sin\alpha \approx \alpha$ (ossia il primo termine dell'espansione in serie di Taylor della funzione $\sin\alpha$ rispetto ad α):

$$\ddot{\alpha} = -\frac{5}{7}\frac{g}{R-r}\alpha \quad \leftrightarrow \quad \ddot{\alpha} = -\Omega^2\alpha \tag{27}$$

Questa è la classica equazione di un oscillatore armonico di frequenza:

$$\Omega = \sqrt{\frac{5}{7}\frac{g}{R-r}} \tag{28}$$

Di conseguenza, il periodo delle piccole oscillazioni vale:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\frac{R-r}{g}} \tag{29}$$

E' importante specificare che lo stesso risultato si può ottenere anche adoperando la seconda equazione cardinale (provare per esercizio!).

c) Come specificato precedentemente, la sfera si muove di puro rotolamento, condizione che ci permette di applicare la conservazione dell'energia. All'istante iniziale, ossia quando $\alpha = \pi/6$, la sfera possiede solamente energia potenziale, mentre quando passa per la verticale questa si è completamente trasformata in energia cinetica:

$$mg(R-r)\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &mg(R-r)\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{7}{10}\dot{\alpha}^2 m(R-r)^2 \\ &5(2-\sqrt{3})g = 7\dot{\alpha}^2(R-r) \quad \rightarrow \quad \dot{\alpha}^2 = \frac{5}{7}(2-\sqrt{3})\left(\frac{R-r}{g}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{31}$$

Tramite la relazione tra $\dot{\alpha}$ e ω definita in precedenza, possiamo trovare quest'ultima:

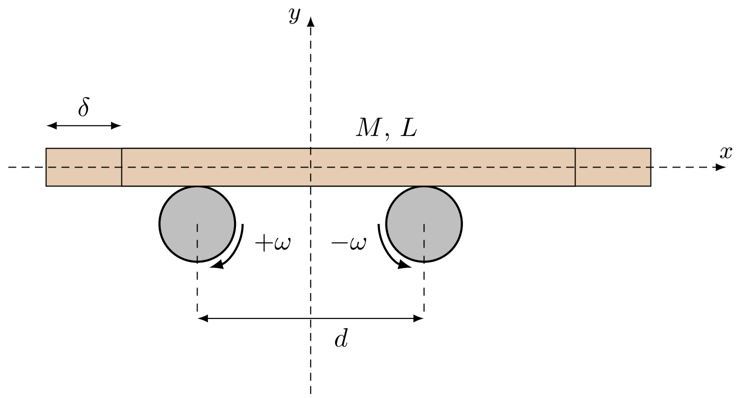
$$\omega^2 = \dot{\alpha}^2\left(\frac{R-r}{r}\right)^2 = \frac{5}{7}(2-\sqrt{3})\frac{R-r}{r^2}g \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{5}{7}(2-\sqrt{3})(R-r)g} \tag{32}$$

Infine, utilizziamo la relazione tra ω e v_{CM}:

$$v_{\mathrm{CM}} = \omega r = \sqrt{\frac{5}{7}(2-\sqrt{3})(R-r)g} \tag{33}$$

Esercizio 3

Si consideri una lastra di densità omogenea con massa M e lunghezza L posizionata su due cilindri rotanti in senso opposto con una velocità angolare ω. Sia d la distanza tra i centri dei due cilindri e μ il coefficiente di attrito dinamico tra la lastra e i cilindri. La lastra viene inizialmente posizionata in modo che il centro di questa sia posizionato esattamente alla stessa distanza tra i due cilindri. Successivamente, il centro della lastra viene spostato di un valore δ dalla sua posizione iniziale, per poi essere lasciata libera. Si determini l'equazione del moto della lastra.



Soluzione

Dato che il nostro scopo è quello di trovare l'equazione del moto della lastra, è necessario determinare tutte le forze agenti su di essa. In questo contesto, studieremo il moto lungo gli assi x ed y, poiché lungo z (l'asse perpendicolare al piano del foglio) non sono presenti forze, e dunque non avremo movimento. Lungo l'asse y non abbiamo movimento visto che la lastra non si solleva dai due cilindri. La sommatoria delle componenti y di tutte le forze deve dunque annullarsi. Queste sono la forza peso della lastra (Mg) e le due reazioni vincolari dovute ai cilindri (R_1 e R_2):

$$Mg = R_1 + R_2 \tag{34}$$

Lungo l'asse x le forze agenti sono le forze di attrito dinamico dovute al contatto tra la lastra i due cilindri. I cilindri ruotano in senso opposto, portando a due forze di attrito che sono anch'esse dirette in verso opposto. L'equazione del moto assume la seguente forma:

$$M\ddot{x} = F_A^{(1)} - F_A^{(2)} = \mu R_1 - \mu R_2 \tag{35}$$

dove x rappresenta la coordinata del centro di massa della lastra (che coincide con il centro geometrico della lastra, poiché omogenea). Dato che la lastra non ruota attorno al proprio centro di massa, possiamo sfruttare la seconda equazione cardinale, secondo cui i momenti delle forze di attrito rispetto al centro di massa si devono complessivamente annullare. In una situazione come quella rappresentata in figura, la forza di attrito $F_A^{(1)}$ è caratterizzata da un braccio uguale a $d/2 + x$, mentre $F_A^{(2)}$ da un braccio uguale $d/2 - x$. Come detto precedentemente, tali momenti devono essere uguali. Considerando che $F_A^{(1)} = \mu R_1$ e $F_A^{(2)} = \mu R_2$:

$$\cancel{\mu} R_1 \left(\frac{d}{2} + x \right) = \cancel{\mu} R_2 \left(\frac{d}{2} - x \right) \tag{36}$$

Combinando le espressioni (34), (35) e (36), il problema viene ricondotto a un sistema di tre equazioni e tre incognite (x, R_1 e R_2):

$$\begin{cases} Mg = R_1 + R_2 \\ M\ddot{x} = \mu R_1 - \mu R_2 \\ R_1\left(\dfrac{d}{2} + x\right) = R_2\left(\dfrac{d}{2} - x\right) \end{cases} \tag{37}$$

L'operazione più immediata è quella di ricavare R_1 dalla prima equazione,

$$R_1 = Mg - R_2 \tag{38}$$

e sostituirla nelle restanti due:

$$\begin{cases} M\ddot{x} = \mu(R_1 - R_2) = \mu(Mg - R_2 - R_2) = \mu Mg - 2\mu R_2 \\ (Mg - R_2)\left(\dfrac{d}{2} + x\right) = R_2\left(\dfrac{d}{2} - x\right) \end{cases} \tag{39}$$

Adesso isoliamo R_2 dalla seconda equazione:

$$\begin{aligned} &\frac{Mgd}{2} + Mgx - \frac{R_2 d}{2} - \cancel{R_2 x} = \frac{R_2 d}{2} - \cancel{R_2 x} \\ &Mgd + 2Mgx = 2R_2 d \\ &R_2 = \frac{1}{2}Mg + Mg\frac{x}{d} \end{aligned} \tag{40}$$

Da questo risultato abbiamo la conferma di una cosa che ci aspettiamo: se $x = 0$ allora $R_2 = 1/2Mg$. Infatti, nel caso in cui la lastra sia perfettamente centrata, le due reazioni vincolari sono uguali tra di loro e, tramite l'espressione (34), singolarmente uguali a metà della forza peso.
Adesso possiamo sostituire l'espressione di R_2 nell'equazione del moto lungo x:

$$M\ddot{x} = \mu Mg - 2\mu\left(\frac{1}{2}Mg + Mg\frac{x}{d}\right) = \cancel{\mu Mg} - \cancel{\mu Mg} - \frac{2\mu Mg}{d}x \tag{41}$$

Quindi l'equazione del moto nella sua forma dipendente solo da x è:

$$\cancel{M}\ddot{x} = -\frac{2\mu \cancel{M} g}{d}x \tag{42}$$

Questa equazione rappresenta un oscillatore armonico di frequenza:

$$\omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{d}} \tag{43}$$

E' ben noto che la soluzione dell'equazione può essere scritta nella forma:

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \tag{44}$$

Nell'espressione compaiono due incognite, ossia A e ϕ. La loro determinazione è possibile tramite le condizioni iniziali. Infatti noi sappiamo la posizione del centro di massa della lastra e la sua velocità (che è nulla) all'istante $t = 0$. Applicandole potremo trovare i valori desiderati. Partiamo dalla velocità,

$$\dot{x} = -\omega A\sin(\omega t + \phi) \quad \rightarrow \quad \dot{x}(0) = -A\sin(\phi) = 0 \quad \rightarrow \quad \phi = 0 \tag{45}$$

che ci porta a:

$$x = A\cos(\omega t) \tag{46}$$

A questo punto applichiamo la condizione sulla posizione:

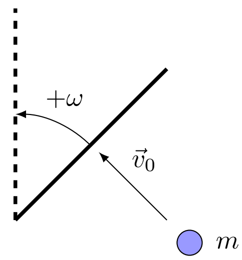
$$x(0) = \delta \quad \rightarrow \quad A = \delta \tag{47}$$

Il risultato cercato è dunque

$$x(t) = \delta\cos(\omega t) \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{d}} \tag{48}$$

Esercizio 4

Un'asta orizzontale di lunghezza d e massa M può ruotare liberamente su un piano orizzontale senza attrito, attorno ad uno dei suoi estremi. Una massa m con velocità iniziale $\vec{v}_0$ ortogonale all'asta la colpisce ad una distanza $x < d$ dall'asse di rotazione rimanendovi attaccata. Si determini il valore di x che massimizza la velocità angolare dell'asta, e l'espressione di questa.



Soluzione

Nel momento in cui la massa colpisce l'asta dando vita ad un urto anelastico, le imprime un momento, mettendola in rotazione. Il momento angolare in questo caso è calcolabile tramite la consueta relazione:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}_0 \tag{49}$$

Trasformando l'equazione precedente in termini dei moduli, e applicando la relazione che lega il momento angolare alla velocità angolare:

$$L = mv_0x = I\omega(x) \tag{50}$$

A questo punto, dobbiamo calcolare il momento di inerzia I. Questo sarà dato dal contributo dell'asta e della massa. Tali contributi sono calcolati scegliendo come polo il punto in cui passa l'asse di rotazione:

$$I = I_{asta} + mx^2 = \left(\frac{1}{12}Md^2 + \frac{1}{4}Md^2\right) + mx^2 = \frac{1}{3}Md^2 + mx^2 \tag{51}$$

A questo punto possiamo sostituire questo risultato nell'espressione (50):

$$mv_0x = \left(\frac{1}{3}Md^2 + mx^2\right)\omega(x) \tag{52}$$

Quindi ricaviamo la frequenza angolare $\omega(x)$ in funzione della distanza di attacco x:

$$\omega(x) = \frac{3mv_0x}{Md^2 + 3mx^2} \tag{53}$$

Per trovare il valore di x_{max} che massimizza $\omega(x)$ calcoliamo gli zeri della derivata:

$$\frac{d\omega(x)}{dx} = \frac{3mv_0(Md^2 + 3mx^2) - 18m^2v_0x^2}{(Md^2 + 3mx^2)^2} = 0 \tag{54}$$

Semplificando il denominatore, che è sempre > 0:

$$3mv_0(Md^2 + 3mx_{max}^2) - 18m^2v_0x_{max}^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_{max} = d\sqrt{\frac{M}{3m}} \tag{55}$$

Applicando infine l'equazione (53), possiamo trovare la velocità angolare massima:

$$\omega_{max} = \frac{3mv_0x_{max}}{Md^2 + 3mx_{max}^2} = \frac{3mv_0d\sqrt{\frac{M}{3m}}}{Md^2 + 3md^2\frac{M}{3m}} = \frac{v_0}{2d\sqrt{\frac{M}{3m}}} \tag{56}$$