Fisica Generale I con esercitazioni per studenti di Chimica.
Esercizi su argomenti del secondo semestre
proposti da Anna Nobili e Marco Mendolicchio, svolti in classe e raccolti da Marco Mendolicchio

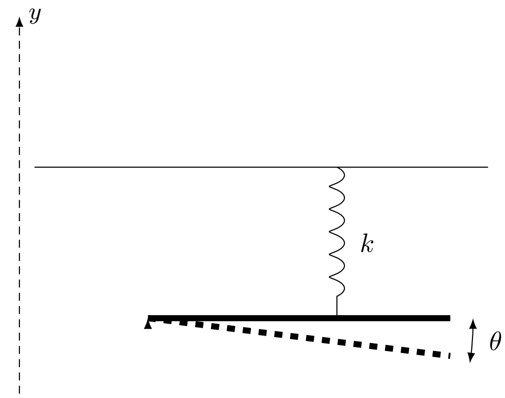
---

Esercitazione di Giovedì 18 maggio 2017

Anno accademico 2016-2017

Esercizio 1

Un'asta omogenea di massa M e lunghezza L è incernierata ad un estremo e mantenuta in posizione orizzontale da una molla di costante elastica k. La molla è collegata all'asta ad una distanza dal perno pari a $2L/3$.



Si determini il periodo delle piccole oscillazioni rispetto alla posizione di equilibrio.

Soluzione 1

Sia δy l'allungamento della molla mentre il sistema è all'equilibrio. Questo può essere determinato mediante il bilanciamento dei momenti torcenti:

$$Mg\frac{L}{2} = \frac{2}{3}Lk\delta y \quad \to \quad \delta y = \frac{3Mg}{4k} \tag{1}$$

Nel momento in cui il sistema viene spostato dall'equilibrio, l'asta inizia ad oscillare. L'accelerazione angolare può essere esplicitata mediante la seconda equazione cardinale, considerando sempre i momenti della forza elastica e della forza peso:

$$I\dot{\omega} = Mg\frac{L}{2} - \frac{2}{3}kL(y + \delta y) \tag{2}$$

Questa espressione può essere ulteriormente sviluppata sostituendo il valore δy determinato in precedenza:

$$I\dot{\omega} = Mg\frac{L}{2} - \frac{2}{3}kL\left(y + \frac{3Mg}{4k}\right) = \cancel{Mg\frac{L}{2}} - \frac{2}{3}kLy - \cancel{Mg\frac{L}{2}} = -\frac{2}{3}kLy \tag{3}$$

A questo punto, se θ è l'angolo definito dal movimento dell'asta, l'ipotesi di piccole oscillazioni permette di approssimare come segue:

$$y \approx \frac{2L}{3}\theta \tag{4}$$

Quindi otteniamo:

$$I\dot{\omega} = I\ddot{\theta} = -\frac{2}{3}kL\frac{2}{3}L\theta = -\frac{4}{9}k^2L^2\theta \tag{5}$$

Ricordando ora che il momento di inerzia di un'asta rispetto ad un asse passante per un suo estremo vale $I = 1/3ML^2$:

$$\frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta} = -\frac{4}{9}k^2L^2\theta \quad \to \quad \ddot{\theta} = -\frac{4}{3}\frac{k}{M}\theta \tag{6}$$

Questa è l'equazione di un oscillatore armonico di frequenza ω e periodo T uguali a:

$$\omega = \sqrt{\frac{4k}{3M}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{4k}} \tag{7}$$

Soluzione 2

Questo problema può essere risolto utilizzando anche la conservazione dell'energia, che in questo caso è data da tre contributi:

- Energia cinetica rotazionale ($\mathcal{T}_{rot}$) dovuta alla rotazione dell'asta attorno al perno;
- Energia potenziale ($\mathcal{U}_{asta}$) dovuta all'asta;
- Energia potenziale elastica ($\mathcal{U}_{el}$), dovuta alla compressione e all'allungamento della molla.

L'energia cinetica rotazionale viene calcolata considerando una rotazione attorno alla posizione in cui si trova il perno. Di conseguenza, il momento di inerzia necessario si determina mediante il teorema degli assi paralleli:

$$I = I_{\text{CM}} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2 \tag{8}$$

Possiamo quindi scrivere $\mathcal{T}_{rot}$:

$$\mathcal{T}_{rot} = \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2 \tag{9}$$

Nel momento in cui l'asta forma un angolo θ con la posizione orizzontale, il centro di massa si trova in posizione $L\sin\theta/2$, mentre la compressione della molla vale $2L\sin\theta/3$. L'energia complessiva dunque vale:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \mathcal{T}_{rot} + \mathcal{U}_{asta} + \mathcal{U}_{el} \\ &= \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MgL\sin\theta + \frac{1}{2}k\left(\frac{2}{3}L\sin\theta\right)^2 \\ &= \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MgL\sin\theta + \frac{2}{9}kL^2\sin^2\theta\end{aligned} \tag{10}$$

Sfruttando il principio di conservazione dell'energia, imponiamo che $d\mathcal{E}/dt = 0$:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{1}{2}MgL\dot{\theta}\cos\theta + \frac{4}{9}kL^2\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = 0 \tag{11}$$

Semplificando $\dot{\theta}$, e imponendo la condizione di piccole oscillazioni ($\theta \ll 1$):

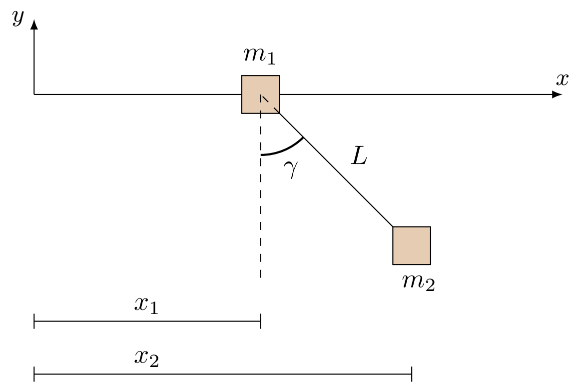
$$\frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}MgL + \frac{4}{9}kL^2\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{4}{3}\frac{k}{M}\theta - \frac{3}{2}\frac{g}{L} \tag{12}$$

Da questo segue che si tratta di un oscillatore armonico di frequenza:

$$\omega = \sqrt{\frac{4k}{3M}} \tag{13}$$

Esercizio 2

Si consideri un pendolo costituito da un punto di materiale di massa m_1 libero di scorrere senza attrito lungo una guida orizzontale, al quale è collegata una seconda massa m_2 mediante un filo inestensibile di lunghezza L. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio. Discutere inoltre il risultato ottenuto nel limite $m_1 \gg m_2$.



Soluzione

Sia x l'ascissa della massa m_1 (non viene considerata la y in quanto questa può muoversi solo orizzontalmente). Le coordinate della prima massa sono dunque espresse semplicemente come:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Le coordinate della seconda massa possono essere definite in funzione di quelle della prima massa, della lunghezza del filo e dell'angolo che il filo forma con la verticale, γ:

$$\begin{cases} x_2 = x + L\sin\gamma \\ y_2 = -L\cos\gamma \end{cases} \tag{15}$$

Sia $\mathcal{E}$ l'energia complessiva. Questa in generale è data dai contributi cinetici ($\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$) e di energia potenziale ($\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$) di entrambe le masse:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \\ &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x_1}^2 + \dot{y_1}^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x_2}^2 + \dot{y_2}^2) + m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x_2}^2 + \dot{y_2}^2) + mgy_2 \end{aligned} \tag{16}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato che $y_1 = 0 \to \dot{y_1} = 0$. Per completare il calcolo, calcoliamoci i valori delle velocità. Considerando che x e γ dipendono dal tempo:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \dot{x} \\ \dot{x_2} = \dot{x} + L\dot{\gamma}\cos\gamma \\ \dot{y_2} = L\dot{\gamma}\sin\gamma \end{cases} \tag{17}$$

Infine, inseriamo tutte le quantità trovate all'interno dell'espressione di $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \mathcal{K} + \mathcal{U} &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left[(\dot{x} + L\dot{\gamma}\cos\gamma)^2 + L^2\dot{\gamma}^2\sin^2\gamma\right] - m_2 g L\cos\gamma \\ &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left[L^2\dot{\gamma}^2 + 2L\dot{x}\dot{\gamma}\cos\gamma\right] - m_2 g L\cos\gamma \end{aligned} \tag{18}$$

Poiché non sono presenti forze esterne agenti lungo l'asse x, la quantità di moto lungo tale asse si conserva:

$$m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad m_1\dot{x} + m_2(\dot{x} + L\dot{\gamma}\cos\gamma) = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{x} = -\frac{m_2 L\dot{\gamma}\cos\gamma}{m_1 + m_2} \tag{19}$$

Questa espressione può essere sostituita nell'equazione (18), in modo da eliminare x:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(-\frac{m_2 L\dot{\gamma}\cos\gamma}{m_1+m_2}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left[L^2\dot{\gamma}^2 - 2L\dot{\gamma}\cos\gamma\frac{m_2 L\dot{\gamma}\cos\gamma}{m_1+m_2}\right] - m_2 gL\cos\gamma \\ &= \frac{m_2^2 L^2\dot{\gamma}^2\cos^2\gamma}{2(m_1+m_2)} + \frac{1}{2}m_2 L^2\dot{\gamma}^2 - L\frac{m_2^2 L^2\dot{\gamma}^2\cos^2\gamma}{m_1+m_2} - m_2 gL\cos\gamma \\ &= -\frac{m_2^2 L^2\dot{\gamma}^2\cos^2\gamma}{2(m_1+m_2)} + \frac{1}{2}m_2 L^2\dot{\gamma}^2 - m_2 gL\cos\gamma\end{aligned} \tag{20}$$

A questo punto possiamo imporre che l'energia si conservi nel tempo ($d\mathcal{E}/dt = 0$). Per semplificare le equazioni successive, è più conveniente riscrivere l'energia nella forma seguente:

$$\mathcal{E} = A\dot{\gamma}^2\cos^2\gamma + B\dot{\gamma}^2 + C\cos\gamma \tag{21}$$

dove:

$$A = -\frac{m_2^2 L^2}{2(m_1+m_2)} < 0 \qquad B = \frac{1}{2}m_2 L^2 > 0 \qquad C = -m_2 gL < 0 \tag{22}$$

Ora procediamo con il calcolo della derivata:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 2A\dot{\gamma}\ddot{\gamma}\cos^2\gamma - 2A\dot{\gamma}^3\cos\gamma\sin\gamma + 2B\dot{\gamma}\ddot{\gamma} - C\dot{\gamma}\sin\gamma = 0 \tag{23}$$

Adesso utilizziamo l'ipotesi di piccole oscillazioni, ossia $\gamma \ll 1$. In queste condizioni, possiamo fare le consuete approssimazioni $\sin\gamma \approx \gamma$ e $\cos\gamma \approx 1 - \gamma^2/2$:

$$2A\dot{\gamma}\ddot{\gamma}\left(1 - \gamma^2 + \frac{\gamma^4}{4}\right) - 2A\dot{\gamma}^3\left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right)\gamma + 2B\dot{\gamma}\ddot{\gamma} - C\dot{\gamma}\gamma = 0 \tag{24}$$

Sviluppando tutti i termini:

$$2A\dot{\gamma}\ddot{\gamma} - \boxed{2A\dot{\gamma}\ddot{\gamma}\gamma^2} + \boxed{\frac{1}{2}A\dot{\gamma}\ddot{\gamma}\gamma^4} - \boxed{2A\dot{\gamma}^3\gamma} + \boxed{A\dot{\gamma}^3\gamma^3} + 2B\dot{\gamma}\ddot{\gamma} - C\dot{\gamma}\gamma = 0 \tag{25}$$

Tutti i termini superiori al II ordine (che nell'espressione (25) sono racchiusi nei riquadri) vengono eliminati, a dare la seguente espressione:

$$2A\dot{\gamma}\ddot{\gamma} + 2B\dot{\gamma}\ddot{\gamma} - C\dot{\gamma}\gamma = 0 \tag{26}$$

Semplificando $\dot{\gamma}$ e successivamente raccogliendo $\ddot{\gamma}$ otteniamo:

$$\ddot{\gamma} - \frac{C}{2(A+B)}\gamma = 0 \tag{27}$$

Dato che $C < 0$ e $A + B > 0$ il coefficiente $-C/2(A+B)$ è complessivamente positivo. Di conseguenza, questa è l'equazione di un'oscillatore armonico di frequenza:

$$\omega = \sqrt{-\frac{C}{2(A+B)}} \tag{28}$$

L'unica operazione rimasta da fare è quella di inserire i valori di A, B e C nell'espressione di ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{m_2 gL}{2\left[-\frac{m_2^2 L^2}{2(m_1+m_2)} + \frac{1}{2}m_2 L^2\right]}} = \sqrt{\frac{m_2 gL}{m_2 L^2 - \frac{m_2^2 L^2}{m_1+m_2}}} = \sqrt{\frac{m_2 g\cancel{L}}{\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}L^{\cancel{2}}}} \tag{29}$$

Questa espressione può essere riscritta in una forma più maneggevole tramite l'introduzione della massa ridotta $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$:

$$\omega = \sqrt{\frac{m_2 g}{\mu L}} \tag{30}$$

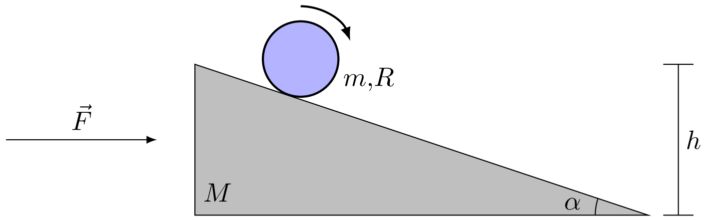
Nel caso in cui $m_1 \gg m_2$:

$$\omega = \sqrt{\frac{m_2 g}{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} L}} \approx \sqrt{\frac{m_2 g}{\frac{\cancel{m_1} m_2}{\cancel{m_1}} L}} = \sqrt{\frac{\cancel{m_2} g}{\cancel{m_2} L}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{31}$$

che corrisponde alla frequenza del pendolo classico. Infatti, nel caso in cui la condizione $m_1 \gg m_2$ sia verificata, la massa m_1 resta sostanzialmente ferma, come è possibile notare anche dall'equazione (19). In tale circostanza, il sistema fisico diviene sempre più vicino a quello di un pendolo classico, dove solo la massa m_2 si muove in maniera apprezzabile.

Esercizio 3

Un piano inclinato di un angolo α e di massa M poggia su una superficie orizzontale liscia. La faccia inclinata del piano presenta un attrito noto e su di essa viene fatta rotolare senza strisciare una sfera omogenea di massa m e raggio R, il cui centro scende di un tratto h in verticale, mentre il cuneo viene mantenuto in quiete da un'apposita forza orizzontale $\vec{F}$.



a) Si calcolino il valore di tale forza orizzontale e la massima pendenza del piano compatibile con un puro rotolamento della sfera.

b) Si calcoli la velocità angolare della sfera dopo aver sceso il tratto h.

c) Si risponda alla domanda precedente nel caso in cui la forza orizzontale sia assente.

Soluzione

a) Considerando l'intero sistema piano inclinato + sfera, l'unica forza esterna agente è $\vec{F}$. Di conseguenza, possiamo effettuare un collegamento tra questa e la quantità di moto lungo l'asse x (p_x):

$$F = \frac{dp_x}{dt} = m\ddot{x} \tag{32}$$

dove x rappresenta la posizione del centro di massa della sfera. Le forze agenti sul cilindro sono la forza peso e la reazione vincolare. Il problema si semplifica ragionando in termini di forze parallele e perpendicolari al piano inclinato. Dato che la reazione vincolare N è una forza perpendicolare al piano scomponiamo anche la forza peso $F_p = mg$ nelle sue due componenti:

$$\begin{cases} F_{p\parallel} = mg\sin\alpha \\ F_{p\perp} = mg\cos\alpha \end{cases} \tag{33}$$

Infine, possiamo scrivere le componenti cartesiane del centro di massa utilizzando lo stesso sistema:

$$\begin{cases} x = \xi\cos\alpha \\ y = \xi\sin\alpha \end{cases} \tag{34}$$

dove abbiamo introdotto la variabile ξ, che rappresenta la distanza percorsa dal centro di massa della sfera parallelamente al piano. In questo modo, l'equazione (32) diventa:

$$F = m\ddot{\xi}\cos\alpha \tag{35}$$

portandoci a concludere che per determinare F dobbiamo trovare l'espressione di $\ddot{\xi}$. Se la sfera si muove rotolando senza strisciare vale la seguente relazione:

$$\ddot{\xi} = R\dot{\omega} \quad \rightarrow \quad F = mR\dot{\omega}\cos\alpha \tag{36}$$

dove infatti $\ddot{\xi}$ e $\dot{\omega}$ sono l'accelerazione del centro di massa della sfera e la sua accelerazione angolare.
Il problema si è dunque ricondotto al calcolo di $\dot{\omega}$, che può essere determinata mediante l'applicazione della seconda equazione cardinale. In questo caso scegliamo come polo il punto di contatto P tra la sfera e il piano inclinato:

$$mgR\sin\theta = I_P\dot{\omega} \tag{37}$$

dove $mgR\sin\alpha$ rappresenta il momento della componente parallela della forza peso rispetto al polo di contatto P. Questa espressione può essere semplificata prima calcolando il momento di inerzia tramite il teorema degli assi paralleli,

$$I_P = I_{CM} + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2 \quad \rightarrow \quad mgR\sin\alpha = \frac{7}{5}mR^2\dot{\omega} \tag{38}$$

Semplificando l'espressione precedente otteniamo:

$$\frac{5}{7}g\sin\alpha = \dot{\omega}R = \ddot{\xi} \tag{39}$$

Sostituendo quindi $\ddot{\xi}$ dentro l'espressione (35), otteniamo:

$$F = m\ddot{\xi}\sin\alpha = \frac{5}{7}g\sin\alpha\cos\alpha \tag{40}$$

Una volta trovato il valore di F possiamo trovare la pendenza massima compatibile con la condizione di puro rotolamento. Infatti, il puro rotolamento è garantito fino a quando la condizione

$$F_a \leq mg\cos\alpha\mu_s \tag{41}$$

dove F_a rappresenta la forza di attrito e μ_s il coefficiente di attrito statico. Per trovare la forza di attrito, scriviamo l'equazione del moto:

$$m\ddot{\xi} = mg\sin\alpha - F_a \tag{42}$$

e quindi ricaviamo F_a:

$$F_a = m(g\sin\alpha - \ddot{\xi}) = m\left(g\sin\alpha - \frac{5}{7}g\sin\alpha\right) = \frac{2}{7}mg\sin\alpha \tag{43}$$

Applicando la disuguaglianza (41), otteniamo il risultato cercato:

$$\frac{2}{7}mg\sin\alpha \leq mg\cos\alpha\mu_s \quad \rightarrow \quad \tan\alpha \leq \frac{7}{2}\mu_s \tag{44}$$

b) Per determinare la velocità angolare dopo aver percorso il tratto verticale h è sufficiente applicare la legge di conservazione dell'energia:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \tag{45}$$

Utilizzando la condizione di puro rotolamento ($v_{CM} = \omega R$), possiamo riscrivere l'espressione precedente,

$$mgh = \frac{1}{2}m\omega^2R^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \tag{46}$$

da cui otteniamo:

$$\omega^2 = \frac{2mgh}{mR^2 + I_{CM}} \tag{47}$$

Quindi, sostituendo $I_{CM} = 2/5mR^2$:

$$\omega^2 = \frac{2mgh}{mR^2 + \frac{2}{5}mR^2} = \frac{1}{R^2}\frac{10}{7}gh \tag{48}$$

c) In questo caso, non essendoci forze esterne agenti sul sistema, la quantità di moto lungo l'asse x si conserva. Contrassegnando con X la posizione del piano inclinato lungo l'asse delle ascisse possiamo scrivere:

$$M\dot{X} + m(\dot{X} + \dot{\xi}\cos\alpha) = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{X} = -\frac{m\dot{\xi}\cos\alpha}{M+m} \tag{49}$$

Inoltre, vale sempre la legge di conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{m}{2}(\dot{X} + \dot{\xi}\cos\alpha)^2 + \frac{m}{2}(\dot{\xi}\sin\alpha)^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \\ mgh &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{X}^2 + \frac{m}{2}\dot{\xi}^2 + m\dot{X}\dot{\xi}\cos\alpha + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}m\cancel{R^2}\frac{\dot{\xi}^2}{\cancel{R^2}} \end{aligned} \tag{50}$$

L'ultima operazione necessaria è quella di sostituire nell'espressione sopra il valore di $\dot{X}$:

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}\cancel{(M+m)}\frac{m^2\dot{\xi}^2\cos^2\alpha}{(M+m)^{\cancel{2}}} + \frac{7}{10}m\dot{\xi}^2 - \frac{m^2}{M+m}\dot{\xi}^2\cos^2\alpha \\ \frac{7}{10}\dot{\xi}^2 - \frac{m\dot{\xi}^2\cos^2\alpha}{2(M+m)} &= gh \quad \rightarrow \quad \dot{\xi}^2 = \left(\frac{7M + 7m - 5m\cos^2\alpha}{10(M+m)}\right)^{-1} gh \end{aligned} \tag{51}$$

Sostituendo $\dot{\xi} = \omega R$, otteniamo l'espressione cercata:

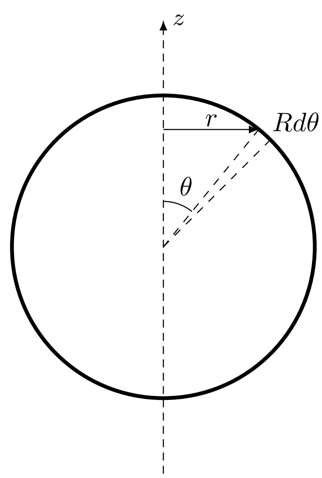
$$\omega^2 = \frac{gh}{R^2}\left(\frac{7M + 7m - 5m\cos^2\alpha}{10(M+m)}\right)^{-1} = \frac{2gh}{R^2\left(\frac{7}{5} - \frac{m}{M+m}\cos^2\alpha\right)} \tag{52}$$

Esercizio 4

Calcolare il momento di inerzia di una sfera cava di massa M e raggio R di spessore trascurabile rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa, considerando una densità di superficie σ omogenea. Si calcoli inoltre tale momento di inerzia per un asse passante per la sfera e posto ad una distanza $R/2$ dal suo centro.

Soluzione

Essendo la densità di superficie omogenea, il centro di massa della sfera coincide con il suo centro geometrico. Per il calcolo del momento di inerzia, l'integrale da calcolare successivamente può essere convenientemente espresso ragionando in termini della coordinata θ rappresentata in figura:



Utilizzando la definizione possiamo definire il momento di inerzia passante per il suo centro di massa I_{CM}::

$$I_{\text{CM}} = \int_M r^2 dm \tag{53}$$

Per poter svolgere l'integrale dunque, dobbiamo esprimere r e dm in funzione di θ. L'espressione di r è molto semplice:

$$r = R\sin\theta \tag{54}$$

Per quanto riguarda dm invece:

$$dm = \sigma dS \tag{55}$$

Nell'espressione precedente dS rappresenta la superficie di un anello con uno spessore infinitesimo $Rd\theta$. Dunque per poterlo calcolare, sarà sufficiente moltiplicare a $Rd\theta$ la lunghezza di una circonferenza di raggio $r = R\sin\theta$, ossia:

$$dS = (2\pi r)Rd\theta = (2\pi R\sin\theta)Rd\theta = 2\pi R^2\sin\theta d\theta \tag{56}$$

Inserendo questo risultato nell'equazione (55) otteniamo:

$$dm = 2\pi\sigma R^2\sin\theta d\theta \tag{57}$$

A questo punto possiamo impostare e risolvere l'integrale dell'equazione (53):

$$\begin{aligned} I_{\text{CM}} &= \int_M r^2 dm = \sigma\int_S r^2 dS == \sigma\int_S (R\sin\theta)^2 dS = \\ &= \sigma\int_0^\pi (R\sin\theta)^2(2\pi R^2\sin\theta d\theta) = 2\pi\sigma R^4\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \end{aligned} \tag{58}$$

Il valore dell'integrale è calcolabile come segue:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta &= \int_0^{\pi} \sin\theta(1-\cos^2\theta)d\theta = \int_0^{\pi}\sin\theta d\theta - \int_0^{\pi}\sin\theta\cos^2\theta d\theta \\ &= \left[-\cos\theta + \frac{cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} = \left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(-1+\frac{1}{3}\right) = 2-\frac{2}{3} = \frac{4}{3}\end{aligned} \tag{59}$$

Quindi il valore di I_{CM} è:

$$I_{\text{CM}} = \frac{8}{3}\pi\sigma R^4 \tag{60}$$

Sfruttando la definizione di σ secondo cui,

$$\sigma = \frac{M}{4\pi R^2} \tag{61}$$

e sostituendola all'interno dell'espressione di I_{CM} otteniamo:

$$I_{\text{CM}} = \frac{8}{3}\pi\frac{M}{4\pi R^2}R^4 = \frac{2}{3}MR^2 \tag{62}$$

Per calcolare il momento di inerzia I_d rispetto ad un asse posto a distanza $d = R/2$ dal centro della sfera, utilizziamo il teorema degli assi paralleli:

$$I_d = I_{\text{CM}} + Md^2 = \frac{2}{3}MR^2 + \frac{1}{4}MR^2 = \frac{11}{12}MR^2 \tag{63}$$