Fisica Generale I con esercitazioni per studenti di Chimica.
Esercizi su argomenti del secondo semestre
proposti da Anna Nobili e Marco Mendolicchio, svolti in classe e raccolti da Marco Mendolicchio

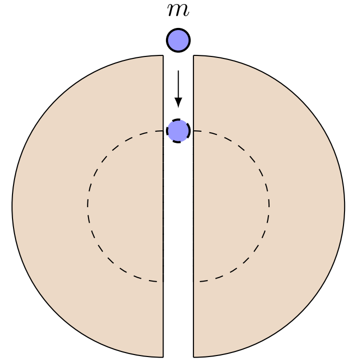
---

Esercitazione di Martedì 23 maggio 2017

Anno accademico 2016-2017

Esercizio 1

Si supponga di scavare un tunnel passante per il centro della Terra, congiungente due punti diametralmente opposti della superficie del pianeta. Un punto materiale di massa m viene lasciato cadere da una delle due imboccature. Considerando trascurabili sia l'attrito che la rotazione della Terra, si risponda alle seguenti domande.



a) Si determini l'equazione del moto del corpo e specificare di che moto si tratta.

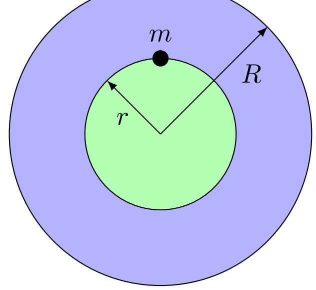
b) Determinare il tempo necessario al corpo per attraversare l'intero tunnel.

c) Calcolare la velocità massima assunta dal corpo durante il tragitto.

<u>SUGGERIMENTO</u>: l'esercizio diventa facilmente risolvibile una volta dimostrato che un guscio sferico di massa M esercita su un punto materiale esterno ad esso la stessa forza di attrazione gravitazionale di un punto materiale di massa M posto al suo centro. Inoltre tale guscio esercita una forza gravitazionale complessivamente nulla su un punto materiale posto al suo interno.

Soluzione

Il suggerimento specificato nel testo è estremamente utile, dato che considerando il corpo in un generico punto del tunnel:

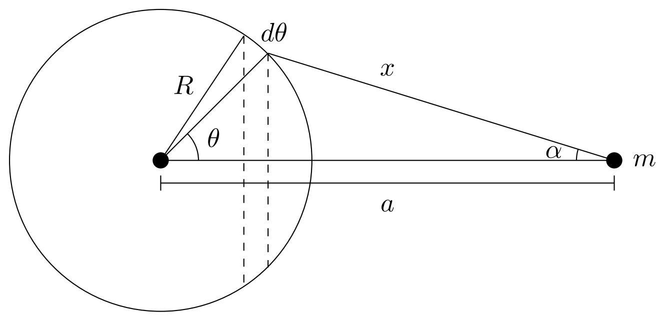


quello che vediamo è che la massa m risente in linea generale dell'attrazione gravitazionale del guscio esterno di spessore $R-r$ e della sfera interna di raggio r. Le due proprietà da dimostrare permetteranno di assumere che il primo contributo sia nullo, e di scrivere l'unica forza agente sulla massa m, ossia quella di attrazione gravitazionale. La forza di attrazione diventa dunque la forza tra un punto materiale di massa $M(r)$ posto al centro della Terra e un punto materiale di massa m a distanza r dal primo:

$$\vec{F} = -\frac{GmM(r)}{r^2}\hat{r} \tag{1}$$

dove $\hat{r}$ specifica il versore radiale ed è esplicitata la dipendenza della massa della sfera più interna da r. Infatti, per quanto detto sopra, la massa di cui m risente in termini di attrazione gravitazionale e solo quella della sfera più interna, il cui raggio è delimitato dalla posizione della massa m stessa.

Dimostriamo quindi la prima proprietà, ossia che se abbiamo un guscio sferico di spessore infinitesimo e massa M, questo esercita su un punto materiale esterno di massa m la stessa forza di attrazione gravitazionale di un punto di massa M posto al centro del guscio stesso. Per questa dimostrazione facciamo riferimento alla seguente figura:



Il guscio sferico in questione può essere considerato come tanti anelli di spessore infinitesimo $Rd\theta$. La massa m è posta a distanza a dal centro del guscio. La forza gravitazionale esercitata da ogni anello vale:

$$dF = \frac{GmdM}{x^2}\cos\alpha \quad \rightarrow \quad F = \int dF = Gm\int dM\frac{\cos\alpha}{x^2} \tag{2}$$

Per poter risolvere questo integrale, dobbiamo esprimere tutte le quantità presenti (dM e $\cos\alpha$) in funzione di x. Il $\cos\alpha$ può essere espresso tramite il teorema del coseno:

$$R^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos\alpha \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{a^2 + x^2 - R^2}{2ax} \tag{3}$$

Per quanto riguarda il termine dM, prima lo esprimiamo in funzione dell'elemento di superficie dS e della densità di superficie $\sigma = M/4\pi R^2$:

$$dM = \sigma dS \tag{4}$$

Il raggio dell'anello rappresentato in figura (tra le linee tratteggiate) è pari a $R\sin\theta$. Di conseguenza la circonferenza vale $2\pi R\sin\theta$, e l'elemento di superficie dS:

$$dS = 2\pi R\sin\theta R d\theta = 2\pi R^2\sin\theta d\theta \quad \rightarrow \quad dM = 2\pi\sigma R^2\sin\theta d\theta \tag{5}$$

Sapendo che $d(\cos\theta) = -\sin\theta d\theta$ e che, sempre per il teorema dei coseni vale la seguente uguaglianza:

$$\cos\theta = \frac{a^2 + R^2 - x^2}{2aR} \tag{6}$$

possiamo scrivere che:

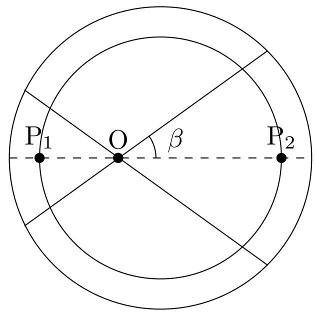
$$\sin\theta d\theta = -d(\cos\theta) = \frac{x}{aR}dx \tag{7}$$

Combinando i precedenti risultati:

$$\begin{aligned} F &= Gm\int dM\frac{\cos\alpha}{x^2} = Gm\int_{a-R}^{a+R}\frac{1}{x^2}\overbrace{\left(\frac{a^2 + x^2 - R^2}{2ax}\right)}^{\cos\alpha}\underbrace{2\pi\sigma R^2\frac{x}{aR}dx}_{dM} \\ &= \frac{2\pi\sigma GmR}{a^2}\int_{a-R}^{a+R}\frac{a^2 + x^2 - R^2}{x^2}dx = \frac{2\pi GmR}{a^2}\frac{M}{4\pi R^2}\int_{a-R}^{a+R}\left(1 + \frac{a^2 - R^2}{x^2}\right)dx \\ &= \frac{GmM}{4Ra^2}\left[x - \frac{a^2 - R^2}{x}\right]_{a-R}^{a+R} = \frac{GmM}{4Ra^2}4R = \frac{GmM}{a^2} \end{aligned} \tag{8}$$

che è proprio la forza di attrazione gravitazionale tra due corpi di massa m ed M posti ad una distanza a.

Come specificato in precedenza, ora vogliamo dimostrare che la forza di attrazione gravitazionale esercitata dal guscio su un punto materiale di massa m posto al suo interno è complessivamente nulla. Per fare ciò si consideri il seguente schema:



dove l'angolo β permette di definire un cono. Siano d_1 e d_2 le distanze tra il punto O e i punti P_1 e P_2 rispettivamente. Dato che le aree delle superfici del guscio sferico contenute dalle due parti sono proporzionali ai quadrati delle distanze introdotte precedentemente, possiamo dire:

$$\begin{cases} m_1 = \sigma\pi(d_1 \tan\beta)^2 dS \\ m_2 = \sigma\pi(d_2 \tan\beta)^2 dS \end{cases} \tag{9}$$

dove dS rappresenta lo spessore infinitesimo del guscio. Scrivendo le due forze:

$$\begin{cases} F_1 = \dfrac{Gm_1 m_P}{d_1^2} = G\sigma\pi \tan^2\beta m_P dS \\ F_2 = \dfrac{Gm_2 m_P}{d_2^2} = G\sigma\pi \tan^2\beta m_P dS \end{cases} \tag{10}$$

che sono uguali in modulo, ed essendo opposte in verso si annullano reciprocamente. Dunque la somma netta delle forze in P è pari a 0, e questo risultato è di validità generale: vale per qualsiasi scelta del punto P. Concludendo, un guscio di spessore non trascurabile può essere ottenuto sommando diversi gusci di spessore infinitesimo, rendendo i risultati precedenti perfettamente estendibili anche a questo caso.

a) Poiché il corpo è libero di muoversi solo lungo il tunnel, la sua posizione può essere identificata dalla coordinata $r(t)$, che definisce sua distanza dal centro della Terra ad ogni istante. Per prima cosa definiamo quali sono le forze agenti su tale corpo, che in questo caso sono rappresentate dalla sola forza di attrazione gravitazionale:

$$F = -\frac{GmM(r)}{r^2} \tag{11}$$

E' importante notare che nella formula precedente, è esplicitata la dipendenza della massa M da r. Infatti, nel momento in cui il corpo si avvicina al centro della Terra, questo risente dell'attrazione gravitazionale di una sfera che ha un raggio sempre minore. Questo è perfettamente coerente con il fatto che avvicinandosi al centro della Terra diminuisce l'energia potenziale del corpo, che si trasforma in energia cinetica. Il valore di $M(r)$ sarà dunque dato dalla massa di una sfera di raggio r e densità ρ_T:

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_T \tag{12}$$

La densità ρ_T, considerata omogenea, è uguale a:

$$\rho_T = \frac{M_T}{V_T} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{3M_T}{4\pi R_T^3} \tag{13}$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione (12) otteniamo:

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \left(\frac{3M_T}{4\pi R_T^3}\right) = M_T \left(\frac{r}{R_T}\right)^3 \tag{14}$$

Adesso abbiamo tutte le informazioni per definire l'equazione del moto:

$$m\ddot{r} = F = -\frac{Gm}{r^2} M_T \left(\frac{r}{R_T}\right)^3 = -\frac{GmM_T}{R_T^3} r \tag{15}$$

Possiamo adesso semplificare le masse ed ottenere:

$$\ddot{r} = -\frac{GM_T}{R_T^3} r = -\frac{GM_T}{R_T^2}\frac{1}{R_T} r = -\frac{g}{R_T} r \quad \text{dove abbiamo sostituito:} \quad g = \frac{GM_T}{R_T^2} \tag{16}$$

Otteniamo dunque la seguente equazione:

$$\ddot{r} + \frac{g}{R_T} r = 0 \tag{17}$$

Quindi il moto compiuto dal corpo è quello di un oscillatore armonico con frequenza angolare $\omega = \sqrt{g/R_T}$. L'equazione del moto generale si scrive nella forma:

$$r(t) = A(\cos \omega t + \phi) \tag{18}$$

Per determinare A e ϕ ci avvaliamo delle condizioni iniziali. Poichè il corpo all'istante iniziale si trova all'imboccatura del tunnel:

$$r(0) = R_T \tag{19}$$

Inoltre, essendo inizialmente fermo:

$$\dot{r}(0) = 0 \tag{20}$$

Calcoliamo la velocità tramite la derivata temporale di r:

$$\dot{r} = -\omega A(\sin \omega t + \phi) \tag{21}$$

Adesso applichiamo le condizioni iniziali: L'applicazione delle condizioni iniziali porta a $\phi = 0$ e $A = R_T$ dunque:

$$r = R_T \cos \omega t = R_T \cos\left(\sqrt{\frac{g}{R_T}} t\right) \tag{22}$$

b) Il periodo di oscillazione fornisce il tempo necessario alla massa a percorrere il tunnel avanti e indietro. Perciò il tempo t^* necessario per attraversare il tunnel è pari alla metà del periodo di oscillazione:

$$t^* = \frac{T}{2} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi\sqrt{\frac{R_T}{g}} = \pi\sqrt{\frac{R_T}{g}} \tag{23}$$

c) La conservazione dell'energia ci permette di trovare la velocità massima. Infatti, all'istante iniziale il corpo è fermo e tutta l'energia è energia potenziale. Nel momento in cui passa dal centro della terra, l'energia potenziale si azzera, trasformandosi completamente in energia cinetica. Il potenziale in un generico punto r viene determinato tramite l'integrale della forza F:

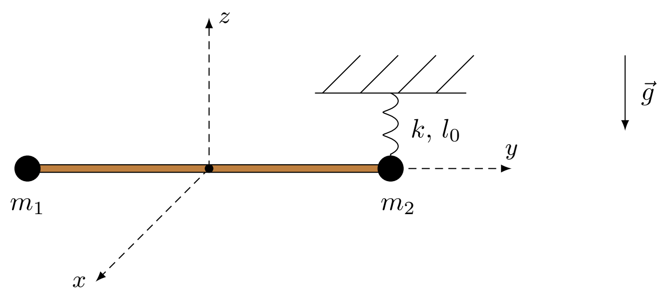
$$\mathcal{U}(r) = -\int drF(r) = \int dr\frac{GM_T m}{R_T^3} r = \frac{GM_T m}{R_T^3}\int drr = \frac{GM_T m}{2R_T^3} r^2 \quad \rightarrow \quad \mathcal{U}(R_T) = \frac{GM_T m}{2R_T} \tag{24}$$

La velocità massima dunque vale:

$$\frac{GM_T m}{2R_T} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 \quad \rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T^3} R_T^2} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T^3}} R_T = \omega R_T \tag{25}$$

Esercizio 2

Si consideri un'asta di massa M, lunghezza L e densità lineare omogenea $\lambda = M/L$. Agli estremi di tale asta sono fissate due masse $m_1 = M/3$ e $m_2 = 2M/3$. Alla massa m_2 è collegata una molla disposta in posizione verticale in modo che l'asta sia mantenuta in posizione orizzontale:



a) Si determini l'allungamento Δl della molla necessario a mantenere l'asta in posizione orizzontale.

b) La molla viene improvvisamente eliminata, permettendo all'asta di ruotare fino a quando non raggiunge la posizione verticale. Calcolare la velocità angolare ω_v dell'asta nel momento in cui raggiunge la posizione verticale e, sempre in tale configurazione, le velocità delle due masse.

c) Calcolare la posizione del centro di massa dell'asta quando questa si trova in posizione verticale. Quando l'asta arriva in posizione verticale, sta ruotando con velocità angolare ω_v, e dato che il CM non si trova nell'origine avrà un'accelerazione centrifuga. Si trovi il valore di tale accelerazione, e si scriva come vettore nel piano xyz.

Soluzione

a) Dato che l'asta è costretta a mantenere la posizione orizzontale, una buona strategia per trovare Δl è quella di imporre il bilanciamento dei momenti torcenti rispetto al centro dell'asta (infatti l'asta non ruota). In questo caso, la somme dei momenti orari e antiorari devono essere uguali. In particolare, la forza peso della massa m_2 origina un momento orario, mentre la forza elastica e la forza peso della massa m_1 originano dei momenti antiorari:

$$m_1 g \frac{L}{2} + k\Delta l \frac{L}{2} = m_2 g \frac{L}{2} \quad \rightarrow \quad m_1 g + k\Delta l = m_2 g \tag{26}$$

A questo punto possiamo sostituire i valori di m_1 e m_2:

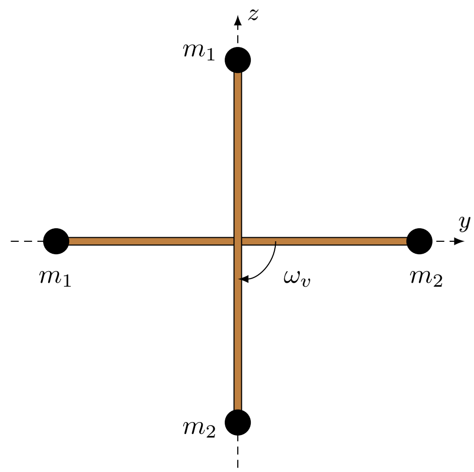
$$\frac{1}{3}Mg + k\Delta l = \frac{2}{3}Mg \quad \rightarrow \quad k\Delta l = \frac{1}{3}Mg \tag{27}$$

Quindi l'allungamento della molla vale:

$$\Delta l = \frac{Mg}{3k} \tag{28}$$

b) In questo caso è applicabile la conservazione dell'energia, quindi l'unica operazione da fare è quella di scrivere l'energia iniziale (subito dopo aver eliminato la molla) e quella finale in cui l'asta si trova in posizione verticale.

Si consideri il seguente schema:



Dopo la rotazione, le coordinate delle due masse m_1 e m_2 diventano rispettivamente $(0,0,L/2)$ e $(0,0,-L/2)$. L'energia iniziale $\mathcal{E}_0$ è nulla, in quanto subito dopo lo s sgancio la massa non è ancora in movimento, ed è disposta orizzontalmente:

$$\mathcal{E}_0 = 0 \tag{29}$$

L'energia finale $\mathcal{E}_f$ è invece data dalla somma delle energie cinetiche e potenziali:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_f &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_1g\frac{L}{2} - m_2g\frac{L}{2} + \frac{1}{2}I\omega_v^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{3}M\left(\omega_v\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{3}M\left(\omega_v\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}Mg\frac{L}{2} - \frac{2}{3}Mg\frac{L}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ML^2\omega_v^2 = \\
&= \frac{1}{24}ML^2\omega_v^2 + \frac{1}{12}ML^2\omega_v^2 + \frac{1}{6}MgL - \frac{1}{3}MgL + \frac{1}{24}ML^2\omega_v^2 = \\
&= \frac{1}{6}ML^2\omega_v^2 - \frac{1}{6}MgL
\end{aligned} \tag{30}$$

dove abbiamo introdotto il momento di inerzia I di un'asta rispetto al suo centro di massa:

$$I = 2\int_0^{L/2}\lambda x^2dx = 2\frac{M}{L}\int_0^{L/2}x^2dx = 2\frac{M}{L}\frac{1}{3}\frac{L^3}{8} = \frac{1}{12}ML^2 \tag{31}$$

Imponiamo la condizione $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_f$:

$$\frac{1}{6}ML^2\omega_v^2 - \frac{1}{6}MgL = 0 \quad \to \quad \omega_v = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{32}$$

A questo punto possiamo scrivere le velocità delle due masse nel momento in cui si trovano in posizione verticale:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{L}{2}\omega_v = \frac{1}{2}L\sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{1}{2}\sqrt{gL} \\ v_2 = -\frac{L}{2}\omega_v = -\frac{1}{2}L\sqrt{\frac{g}{L}} = -\frac{1}{2}\sqrt{gL} \end{cases} \tag{33}$$

Le due velocità sono dirette lungo l'asse y, e quindi:

$$\vec{v}_1 = \left(0, \frac{1}{2}\sqrt{gL}, 0\right) \qquad ; \qquad \vec{v}_2 = \left(0, -\frac{1}{2}\sqrt{gL}, 0\right) \tag{34}$$

c) Nel momento in cui l'asta si trova in posizione verticale, la massa è distribuita interamente lungo l'asse z. Di conseguenza, se chiamiamo con $\vec{r}_{\mathrm{CM}}$ la posizione del centro di massa avremo che:

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = (x_{\mathrm{CM}}, y_{\mathrm{CM}}, z_{\mathrm{CM}}) = (0, 0, z_{\mathrm{CM}}) \tag{35}$$

dove z_{CM} vale:

$$z_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} = \frac{\frac{L}{2}\frac{1}{3}M + M \cdot 0 - \frac{L}{2}\frac{2}{3}M}{\frac{1}{3}M + M + \frac{2}{3}M} = -\frac{1}{12}L \tag{36}$$

Quando l'asta arriva in posizione verticale sta ruotando con velocità angolare ω_v attorno all'asse x in verso orario. Siccome il CM non si trova nell'origine avrà un'accelerazione centrifuga che in modulo vale:

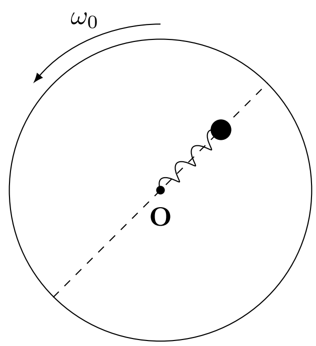
$$a_c = \omega_v^2(-\frac{L}{12}) = -\frac{g}{\cancel{L}}\frac{\cancel{L}}{12} = -\frac{g}{12} \tag{37}$$

Esprimendo il risultato in forma vettoriale otteniamo il seguente risultato:

$$\vec{a}_c = \left(0, 0, -\frac{g}{12}\right) \tag{38}$$

Esercizio 3

Si consideri un disco disposto sul piano orizzontale che ruota rispetto ad un asse passante per il suo centro con una velocità angolare $\omega_0 = 6.28\ \text{s}^{-1}$. Su tale disco è presente una scanalatura lungo la quale un punto materiale di massa $m = 1.5$ Kg, collegato al centro del disco tramite una molla di costante elastica $k = 250$ N/m e lunghezza a riposo $\ell_0 = 50$ cm, è libero di muoversi senza attrito. Per le domande si faccia riferimento al seguente schema, che rappresenta il sistema visto dall'alto:



a) Si calcoli la posizione di equilibrio $\overline{r}$ della massa m, intesa come distanza dal centro del disco.

b) Si consideri di porre la massa ad una distanza dal centro proprio uguale a $\overline{r}$. Se la velocità del disco fosse istantaneamente aumentata a $\omega = 3\omega_0/2$, si calcolino la frequenza delle oscillazioni e le distanze minima e massima dal punto **O**.

c) Calcolare in tali circostanze il massimo valore della forza di reazione vincolare dovuta alla guida, fornita dal vincolo ortogonalmente alla guida stessa.

Soluzione

a) Per determinare la posizione di equilibrio della massa m è necessario imporre che la sommatoria delle forze dirette radialmente sia complessivamente nulla. La massa risente della forza elastica della molla:

$$\vec{F}_{el} = -k(r - \ell_0)\hat{r} \tag{39}$$

dove r rappresenta la distanza della massa dal punto **O** ed $\hat{r}$ il versore radiale. Inoltre, essendo quello in esame un sistema di riferimento rotante, dobbiamo considerare anche la forza centrifuga:

$$\vec{F}_c = m\omega_0^2 r\hat{r} \tag{40}$$

Imponiamo che la risultante delle forze lungo $\hat{r}$ sia nulla per determinare la posizione di equilibrio $\overline{r}$:

$$k(\overline{r} - \ell_0) = m\omega_0^2\overline{r} \quad \rightarrow \quad \overline{r} = \frac{k\ell_0}{k - m\omega_0^2} = \frac{\ell_0}{1 - \dfrac{m\omega_0^2}{k}} = \frac{0.5}{1 - \dfrac{1.5 \cdot 6.28^2}{2.5 \cdot 10^2}} = 0.66\ \text{m} \tag{41}$$

L'espressione di $\overline{r}$ giustamente conferma che ad un aumento della velocità angolare anche la posizione di equilibrio è sempre più distante dal centro del disco. Inoltre, per $\omega_0 = 0$ otteniamo che $r = \ell_0$. In ogni caso l'espressione (41) è valida finchè $\omega_0^2 < k/m$.

b) Nel caso in cui la velocità angolare venga aumentata, $\overline{r}$ non è più una posizione di equilibrio. Infatti nel momento in cui la velocità angolare aumenta abbiamo una nuova posizione di equilibrio $\overline{\overline{r}}$ che ha la stessa espressione di $\overline{r}$, in cui l'unica differenza si ha nella frequenza:

$$\overline{\overline{r}} = \frac{\ell_0}{1 - \dfrac{m\omega^2}{k}} = \frac{0.5}{1 - \dfrac{1.5 \cdot (1.5 \cdot 6.28)^2}{2.5 \cdot 10^2}} = 1.07 \text{ m} \tag{42}$$

Chiamando sempre con r la distanza della massa dal centro del disco è possibile scrivere la seguente equazione del moto:

$$m\ddot{r} = -k(r - \ell_0) + m\omega^2 r \quad \rightarrow \quad m\ddot{r} = (m\omega^2 - k)r + k\ell_0 \tag{43}$$

L'equazione del moto da risolvere dunque è:

$$\ddot{r} = -\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) r + \frac{k}{m}\ell_0 = -\Omega^2 r + \frac{k}{m}\ell_0 \tag{44}$$

Da questa espressione vediamo che la frequenza angolare e il periodo valgono:

$$\begin{cases} \Omega = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \omega^2} = \sqrt{\dfrac{k - m\omega^2}{m}} = \sqrt{\dfrac{2.5 \cdot 10^2 - 1.5 \cdot (1.5 \cdot 6.28)^2}{1.5}} = 8.83 \text{ s}^{-1} \\ T = \dfrac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k - m\omega^2}} = \dfrac{6.28}{8.83} = 0.71 \text{ s} \end{cases} \tag{45}$$

Concludiamo trovando l'equazione del moto, che ci permetterà di trovare le posizioni minima e massima. Dato che all'interno dell'equazione (44) è presente anche un termine noto costante, la soluzione generale avrà la seguente forma:

$$r = \mathcal{A}\cos(\Omega t + \phi) + \mathcal{B} \tag{46}$$

dove $\mathcal{B}$ è un fattore costante che può essere determinato sostituendo $\mathcal{B}$ ad r nell'equazione (44):

$$-\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\mathcal{B} + \frac{k}{m}\ell_0 = 0 \tag{47}$$

Sviluppando questa espressione vediamo che $\mathcal{B}$ è proprio uguale a $\overline{\overline{r}}$:

$$\mathcal{B} = \frac{\dfrac{k}{m}\ell_0}{\dfrac{k}{m} - \omega^2} = \frac{\dfrac{\cancel{k}}{\cancel{m}}\ell_0}{\dfrac{\cancel{k}}{\cancel{m}}\left(1 - \dfrac{m}{k}\omega^2\right)} = \overline{\overline{r}} \tag{48}$$

Possiamo inserire questo risultato all'interno dell'equazione (46) e riscriverla:

$$r = \mathcal{A}\cos(\Omega t + \phi) + \overline{\overline{r}} \tag{49}$$

dove in questo caso $r(0) = \overline{r}$ e $\dot{r}(0) = 0$. Applicando la condizione sulla velocità:

$$\dot{r} = -\omega\mathcal{A}\sin(\Omega t + \phi) \tag{50}$$

da cui:

$$\dot{r}(0) = -\Omega\mathcal{A}\sin\phi = 0 \quad \rightarrow \quad \phi = 0 \tag{51}$$

L'equazione del moto aggiornata è:

$$r = \mathcal{A}\cos(\Omega t) + \overline{\overline{r}} \tag{52}$$

Per la posizione iniziale:

$$r(0) = \overline{r} \quad \rightarrow \quad \mathcal{A} = \overline{r} - \overline{\overline{r}} \tag{53}$$

L'equazione del moto finale è:

$$r = (\overline{r} - \overline{\overline{r}})\cos(\Omega t) + \overline{\overline{r}} \tag{54}$$

dove

$$\begin{cases} r_{max} = \overline{\overline{r}} - \mathcal{A} = 2\overline{\overline{r}} - \overline{r} = 2 \cdot 1.07 - 0.66 = 1.48 \text{ m} \\ r_{min} = \overline{\overline{r}} + \mathcal{A} = \overline{r} = 0.66 \text{ m} \end{cases} \tag{55}$$

c) Nel sistema di riferimento non inerziale il punto materiale ha solo velocità in direzione radiale. Lungo tale direzione agiscono la forza elastica e la forza centrifuga, mentre in direzione ortogonale agiscono la forza di Coriolis e la reazione vincolare. Dato che lungo la direzione ortogonale alla scanalatura non abbiamo moto le due forze devono annullarsi a vicenda. Il modulo della reazione vincolare R dunque vale:

$$R = 2m\omega v = 2m\omega\dot{r} \tag{56}$$

dove v è la velocità radiale. Questa è massima quando la massa passa per la posizione di equilibrio durante il moto di oscillazione:

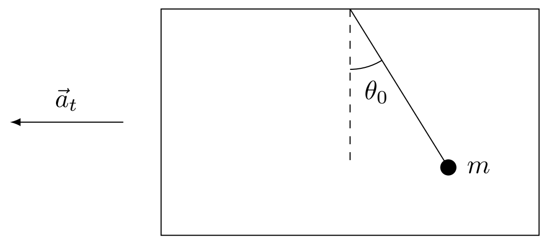
$$v_{max} = A\Omega \tag{57}$$

Quindi, il massimo della reazione vincolare vale:

$$R_{max} = 2m\omega v_{max} = 2m\omega\mathcal{A}\Omega = 2 \cdot 1.5 \cdot 0.41 \cdot 1.5 \cdot 6.28 \cdot 8.83 = 102.30 \text{ N} \tag{58}$$

Esercizio 4

Si determini il moto di un pendolo costituito da un punto materiale di massa m collegato al soffitto di un carrello che si muove con accelerazione costante $\vec{a}_t$ tramite una fune inestensibile di lunghezza L e di massa trascurabile.



a) Determinare l'angolo equilibrio θ_0 che il pendolo forma con la verticale e la tensione $\vec{T}$ della corda in tale configurazione.

b) Determinare il periodo delle piccole oscillazioni intorno a tale posizione di equilibrio, verificando esplicitamente il risultato nel caso in cui $|\vec{a}_t| = 0$.

Soluzione

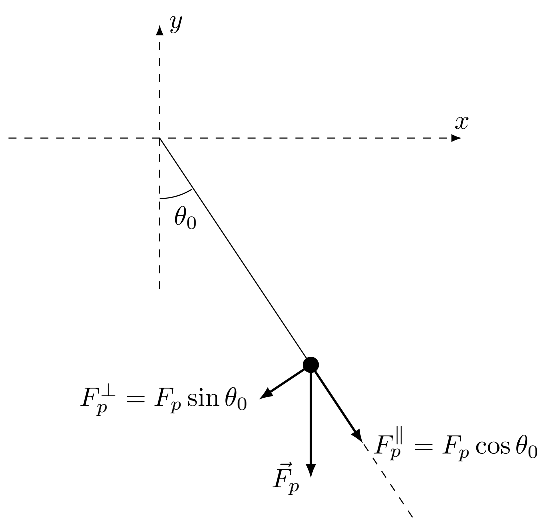
a) Nel caso più semplice in cui il vagone è immobile oppure in movimento con una velocità costante, la posizione di equilibrio del pendolo $\theta_0 = 0$. Nel caso in cui invece l'accelerazione del carrello sia diversa da zero, la massa risente di una forza di trascinamento $\vec{F}_t$ uguale a:

$$\vec{F}_t = -m\vec{a}_t \tag{59}$$

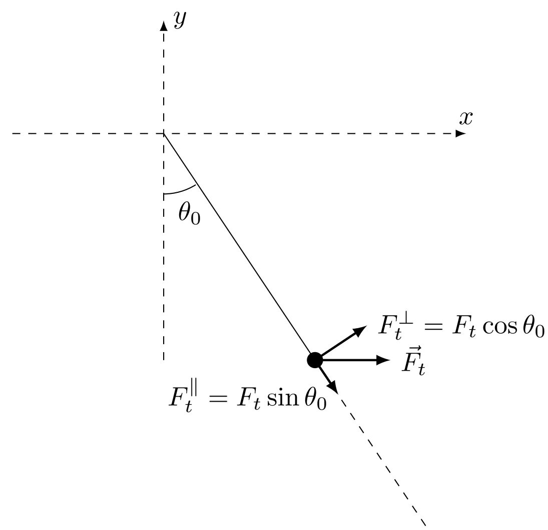
Inoltre, alla massa sono applicate anche la tensione del filo $\vec{T}$ e la forza peso $\vec{F}_p$. La condizione di equilibrio prevede che:

$$\vec{F}_t + \vec{T} + \vec{F}_p = 0 \tag{60}$$

Il problema diventa facilmente risolvibile ragionando in termini di forze dirette parallelamente e perpendicolarmente alla direzione della corda. In questo caso le forze $\vec{F}_p$ e $\vec{F}_t$ devono essere scomposte in tali componenti. Per la forza peso le componenti sono:



Effettuando una scomposizione analoga alla precedente, troviamo le componenti anche della forza apparente $\vec{F}_t$:



Dato che la massa è in equilibrio, le sommatorie delle forze parallele e perpendicolari alla direzione della corda devono essere complessivamente nulle:

$$\begin{cases} T - F_p^{\parallel} - F_c^{\parallel} = 0 \\ F_t^{\perp} - F_p^{\perp} = 0 \end{cases} \tag{61}$$

Esplicitando tutte le quantità:

$$\begin{cases} T = mg\cos\theta_0 + ma_t \sin\theta_0 \\ ma\cos\theta_0 = mg\sin\theta_0 \end{cases} \tag{62}$$

Dalla seconda equazione otteniamo:

$$\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} = \frac{ma_t}{mg} = \frac{a_t}{g} \tag{63}$$

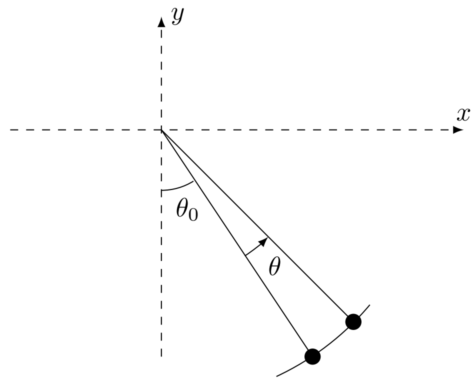
Quindi l'angolo di equilibrio θ_0 può essere espresso:

$$\tan\theta_0 = \frac{a_t}{g} \quad \rightarrow \quad \theta_0 = \arctan\frac{a_t}{g} \tag{64}$$

A questo punto possiamo utilizzare la prima equazione per determinare anche il modulo della tensione del filo:

$$\begin{aligned} T &= mg\cos\left(\arctan\frac{a_t}{g}\right) + ma_t \sin\left(\arctan\frac{a_t}{g}\right) \\ &= \frac{mg}{\sqrt{1+\left(\frac{a_t}{g}\right)^2}} + \frac{ma_t\left(\frac{a_t}{g}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{a_t}{g}\right)^2}} = \frac{mg^2}{\sqrt{a_t^2+g^2}} + \frac{ma_t^2}{\sqrt{a_t^2+g^2}} = m\sqrt{a_t^2+g^2} \end{aligned} \tag{65}$$

b) Per trovare l'equazione del moto si consideri la variabile θ che definisce l'angolo rispetto alla posizione di equilibrio, e quindi l'angolo $\theta + \theta_0$ rispetto alla verticale:



In questo caso sfruttiamo le forze che sono dirette perpendicolarmente al filo. In sostanza l'equazione del moto da risolvere è:

$$mL\ddot{\theta} = F_t^{\perp} - F_p^{\perp} \tag{66}$$

dove:

$$\begin{cases} F_t^{\perp} = ma_t \cos(\theta + \theta_0) = ma_t(\cos\theta\cos\theta_0 - \sin\theta\sin\theta_0) \\ F_p^{\perp} = mg\sin(\theta + \theta_0) = mg(\sin\theta\cos\theta_0 + \cos\theta\sin\theta_0) \end{cases} \tag{67}$$

Inserendo queste espressioni nell'equazione (66) e semplificando m:

$$\begin{aligned} L\ddot{\theta} &= a_t(\cos\theta\cos\theta_0 - \sin\theta\sin\theta_0) - g(\sin\theta\cos\theta_0 + \cos\theta\sin\theta_0) \\ &= \cos\theta(a_t\cos\theta_0 - g\sin\theta_0) - \sin\theta(a_t\sin\theta_0 + g\cos\theta_0) \end{aligned} \tag{68}$$

La parentesi che moltiplica $\cos\theta$ scompare, perché l'equazione (64) permette di trovare che:

$$\frac{a_t}{g} = \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} \quad \rightarrow \quad a_t\cos\theta_0 = g\sin\theta_0 \tag{69}$$

L'equazione del moto dunque diventa:

$$L\ddot{\theta} = -\sin\theta(a_t\sin\theta_0 + g\cos\theta_0) \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{a_t\sin\theta_0 + g\cos\theta_0}{L}\sin\theta \tag{70}$$

L'ipotesi di piccole oscillazioni permette di approssimare $\sin\theta \approx \theta$ quindi:

$$\ddot{\theta} = -\frac{a_t\sin\theta_0 + g\cos\theta_0}{L}\theta \tag{71}$$

Questo è un oscillatore armonico di frequenza angolare ω e periodo T uguali a:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_t\sin\theta_0 + g\cos\theta_0}{L}} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{a_t\sin\theta_0 + g\cos\theta_0}} \tag{72}$$

Nel caso in cui $|\vec{a}_t| = 0$ anche $\theta_0 = 0$ e quindi:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{73}$$

che sono proprio i risultati del pendolo classico.