

S9 - Nona settimana, lezione del 27 aprile 2017 (il 25 aprile lezione non tenuta per Festa della Liberazione)

Corpo rigido: definizione e gradi di libertà. Definizione dei 3 angoli di Eulero

Moto del corpo rigido rispetto al suo centro di massa.

Energia cinetica di un corpo rigido. Momento di inerzia rispetto all'asse istantaneo di rotazione.

Matrice di inerzia (3x3, diagonale) nel riferimento degli assi di simmetria di un corpo rigido (cenno alla sua relazione con il momento angolare).

**CORPO RIGIDO**

Gradi di libertà:  $3_{CM} + 2 + 1 = 6$

NEL SISTEMA DEL CM:  $3$

$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{RI} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{BF} + \vec{\omega} \times \vec{G}$

$\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{RI} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{BF}$

$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{RI}$   $\frac{kgms^{-1}}{s} = kgms^{-2} = N$

$\vec{N} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{RI}$   $kgms^{-2} = (kgms^{-2})m = Nm \leftarrow RI$

BF  $\alpha, \beta, \gamma$ : ANGOLI DI EULERO

$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$ : da RI  $\rightarrow$  BF

$\gamma \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ : da BF  $\rightarrow$  RI

$N$  intersezione tra  $XY$  e  $xy$

$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$   $kgms^{-1}$

$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$   $\frac{kgms^{-1}}{s} = kgms^{-2} = N$

$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i$

quantità di moto lineare

quantità di moto angolare

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) =$   $kgms^{-2} = (kgms^{-1})s^{-1}$

$\left(\dot{\vec{r}}_i\right)_{RI} = \left(\dot{\vec{r}}_i\right)_{BF} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) =$   $L \quad \omega$

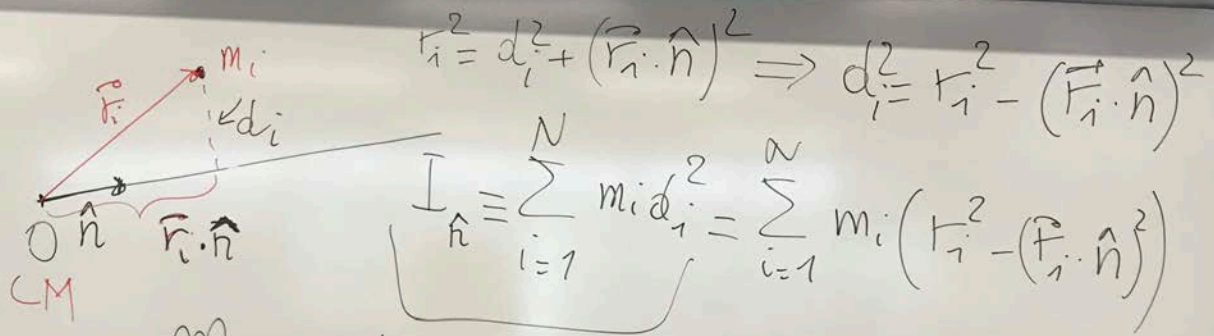
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left( \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \right) =$

$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left( \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \right) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}$   $I \omega^2$   $(kgm^2) s^{-2}$

$= \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i \left[ \vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \right]$

$T = \frac{1}{2} \omega^2 \left[ \sum_i m_i (r_i^2 - (\hat{n} \cdot \vec{r}_i)^2) \right] = \frac{1}{2} \vec{I} \omega^2$   $\vec{\omega} = \omega \hat{n}$

$kgm^2 \leftarrow \vec{I}$  un momento d'inerzia



$$r_i^2 = d_i^2 + (\vec{r}_i \cdot \hat{n})^2 \Rightarrow d_i^2 = r_i^2 - (\vec{r}_i \cdot \hat{n})^2$$

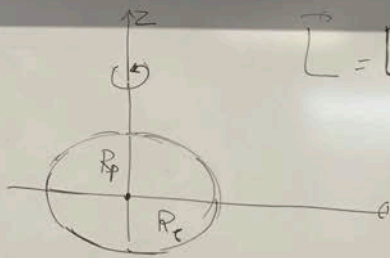
$$I_{\hat{n}} \equiv \sum_{i=1}^N m_i d_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - (\vec{r}_i \cdot \hat{n})^2)$$

Momento di inerzia di un corpo rigido rispetto ad un asse  $\hat{n}$

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

$$\left( \text{kg m}^2 \right) \text{s}^{-1}$$

↑            ↑  
I            ω



$$\vec{L} = I \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \omega_x \\ I_2 \omega_y \\ I_3 \omega_z \end{pmatrix}$$