Nome | *Cognome* | *Numero di matricola* | *Coordinata posizione*

Primo compito in itinere di Fisica Generale 1 + Esercitazioni, a.a. 2017-2018 – 12 dicembre 2017

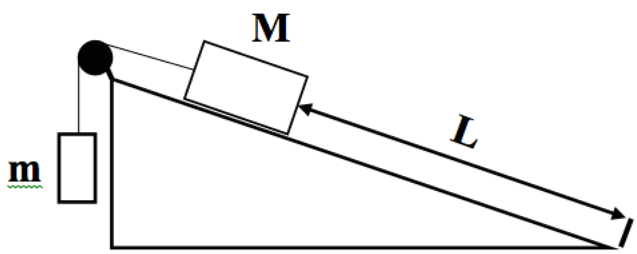
==

Premesse da leggere molto attentamente prima di cominciare:

- In ogni riquadro si deve scrivere per la grandezza richiesta la formula matematica seguita dal suo valore numerico a partire dai dati forniti per tutte, o anche solo per alcune, delle grandezze fisiche coinvolte. Il procedimento per arrivare alla formula finale va scritto nei fogli protocollo distribuiti specificando la numerazione data nel testo. Se il procedimento non è riportato e/o non è coerente con la formula e col valore numerico scritti nel riquadro, il risultato viene considerato nullo.
- Si richiede di usare sempre il sistema di unità di misura internazionale SI. I valori numerici vanno scritti usando le potenze del 10 e si richiede (salvo casi particolari che verranno segnalati) di riportare solo 2 cifre significative, facendo il calcolo complessivo e arrotondandolo solo alla fine.
- Si consegnano il foglio del testo, debitamente compilato, e almeno uno, o più, fogli protocollo a scelta individuale. La coordinate della posizione occupata in aula durante il compito viene fornita dalla docente e serve ad individuare compiti tra loro copiati, che verranno annullati.

==

Problema 1: Un blocco di massa M, schematizzabile come un punto materiale, è appoggiato su un piano inclinato di un angolo ϑ rispetto all'orizzontale. Sul piano è presente attrito con coefficienti μ_S (statico) e μ_D (dinamico), con $\mu_S < \tan\vartheta$. La massa M è collegata, tramite una fune inestensibile e di massa trascurabile ed una carrucola ideale senza attrito, ad un corpo di massa m, anch'esso schematizzabile come un punto materiale, sospeso sotto l'azione della accelerazione locale di gravità $g = 9.8\,\mathrm{ms}^{-2}$ (vedi Figura). La massa M si trova ad una distanza L dalla base del piano inclinato.



1. Scrivere la condizione che m deve soddisfare affinché il sistema cominci a muoversi

Assumete da ora in poi: $\vartheta = \pi/4$, $m = \frac{1}{3}M$, $\mu_S = 1/3$, $\mu_D = 1/4$, $L = 1\,\mathrm{m}$

2. Verificate che in queste condizioni il sistema si metta in moto e calcolate il modulo dell'accelerazione a

   $a =$

   Calcolate dopo quanto tempo t_1 la massa M raggiunge la base del piano inclinato

   $t_1 =$

3. Calcolate il modulo della velocità v_1 con il quale M raggiunge la base del piano inclinato

   $v_1 =$

4. Immaginate ora che alla base del piano inclinato la massa M rimbalzi e risalga lungo il piano stesso con velocità iniziale $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$. Considerando questo come nuovo istante iniziale, calcolate dopo quanto tempo t_2 la massa M si ferma e lo spazio L_2 da essa percorso nella risalita. (Nota: il filo lavora solo quando è in tensione)

   $t_2 =$

   $L_2 =$

Problema 2: Un sacchetto di sabbia di massa $M = 1\,\mathrm{kg}$ è in equilibrio appeso ad un perno tramite una fune inestensibile di massa trascurabile che controbilancia la forza peso (con $g = 9.8\,\mathrm{ms}^{-2}$). Un proiettile di massa $m = 30\,\mathrm{g}$ colpisce il sacco al tempo $t = 0$ con una velocità di modulo $v_\circ = 100\,\mathrm{m/s}$ che punta verso il basso formando un angolo $\vartheta = 30°$ rispetto ad un piano orizzontale, e vi si conficca in un tempo molto breve. Il sacchetto di sabbia, con inglobato il proiettile, comincia a muoversi.

1. Calcolate la velocità $\vec{v}_1$ del sacchetto di sabbia con inglobato il proiettile (schematizzato come un singolo corpo puntiforme) subito dopo l'urto e specificatene la direzione

   $\vec{v}_1 =$ $\boxed{}$

2. Calcolate l'impulso $\vec{\mathcal{J}}$ fornito dal perno durante l'urto

   $\vec{\mathcal{J}} =$ $\boxed{}$

3. Assumendo che le forze tra proiettile e sacchetto di sabbia siano costanti, trascurando il contributo della gravità, e assumendo che l'urto abbia una durata $\tau = 10^{-2}\,\mathrm{s}$, calcolate la tensione $\vec{T}$ della fune durante l'urto

   $\vec{T} =$ $\boxed{}$

4. Calcolate la massima altezza raggiunta dal sistema sacchetto di sabbia più proiettile nel suo moto successivo assumendo che ogni forma di attrito e/o di dissipazione siano trascurabili

   $h_{max} =$ $\boxed{}$

Soluzione del problema 1

1. Il sistema delle equazioni cardinali per le due masse ferme è il seguente:

$$\begin{cases} m\vec{g} + \vec{T} = 0 \\ M\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{AS} + \vec{N} = 0 \end{cases}$$

dove $\vec{T}$ è la tensione del filo, $\vec{N}$ la reazione normale del piano e $\vec{F}_{AS}$ è la forza di attrito statico. Proiettiamo queste equazioni vettoriali su un sistema di assi cartesiani ortogonali orizzontale e verticale per la massa m e parallelo e perpendicolare al piano inclinato per la massa M. Useremo per tutto il problema la seguente convenzione sui segni: per la massa M prendiamo come positivo il verso (lungo il piano inclinato) che punta in basso; per la massa m prendiamo come positivo il verso (lungo l'asse verticale) che punta in alto. La condizione di equilibrio per M lungo l'asse y ci fornisce il modulo della reazione normale $N = Mg\cos\vartheta$, inoltre l'equazione per la massa m ci fornisce il modulo della tensione del filo $T = mg$. Affinché il sistema si metta in moto bisogna che il modulo della componente x della risultante delle forze applicate ad M, tranne l'attrito, sia maggiore del valore massimo che la forza di attrito statico può assumere, quindi:

$$|Mg\sin\vartheta - mg| > \mu_s Mg\cos\vartheta$$

da cui otteniamo le condizioni:

$$\begin{cases} m < M(\sin\vartheta - \mu_s\cos\vartheta) \\ m > M(\sin\vartheta + \mu_s\cos\vartheta) \end{cases}$$

La prima si riferisce al moto verso la base del piano inclinato, la seconda, invece, al moto verso la sommità.

2. Con i dati del problema:

$$\frac{1}{3}M < M(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}) = M\frac{\sqrt{2}}{3}$$

quindi il sistema si mette in moto. Le equazioni del moto per M ed m lungo i loro assi sono:

$$\begin{cases} -mg + T = ma \\ Mg\sin\vartheta - T - \mu_D Mg\cos\vartheta = Ma \end{cases}$$

dove le accelerazioni delle due masse sono state poste uguali a causa del vincolo geometrico. Ricaviamo T dall'equazione del moto per la massa m, la sostituiamo nell'altra e risolviamo per a:

$$Mg\sin\vartheta - m(g+a) - \mu_D Mg\cos\vartheta = Ma \quad \Rightarrow a = g\Big(\frac{M}{M+m}\sin\vartheta - \frac{m}{M+m} - \mu_D\frac{M}{M+m}\cos\vartheta\Big)$$

e infine imponiamo i dati del problema:

$$a = \frac{3}{4}g(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}) = g(\frac{9}{32}\sqrt{2} - \frac{1}{4}) = 0.15g = 1.45\,\mathrm{ms^{-2}} > 0$$

Si tratta, quindi, di un moto uniformemente accelerato con accelerazione a, per cui:

$$L = \frac{1}{2}at_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2L}{g(\frac{9}{32}\sqrt{2} - \frac{1}{4})}} = 1.18\ \mathrm{s}$$

3. Dato che la velocità iniziale è nulla, la velocità finale v_1 al tempo t_1 è:

$$v_1 = at_1 = \sqrt{2La} = \sqrt{2Lg(\frac{9}{32}\sqrt{2} - \frac{1}{4})} = 1.70\,\mathrm{ms^{-1}}$$

Possiamo ottenere v_1 anche usando il teorema delle forze vive: l'energia cinetica totale deve essere uguale al lavoro totale fatto dalle forze in gioco. Lo applichiamo al tempo t_1, quando la massa M arriva in fondo al piano inclinato con velocità v_1 (si noti che siccome il filo è inestensibile la massa m si muove, in direzione verticale verso l'alto, con la stessa velocità di M). Deve valere:

$$\frac{1}{2}(M+m)v_1^2 = Mg\sin\vartheta L - \mu_D Mg\cos\vartheta L - mgL$$

da cui, con i valori numerici dati, otteniamo

$$v_1 = \sqrt{2Lg(\frac{9}{32}\sqrt{2} - \frac{1}{4})} = 1.70\,\mathrm{ms}^{-1}$$

come sopra.

4. Il corpo M rimbalza e risale lungo il piano inclinato partendo con velocità (negativa) di modulo v_1 calcolato sopra. L'equazione del moto della massa M nel suo moto di risalita del piano inclinato sarà simile a quella che abbiamo scritto al punto 2 tranne che la tensione del filo non c'è perché il filo non lavora e la forza di attrito dinamico questa volta punta verso il basso:

$$Mg\sin\vartheta + \mu_D Mg\cos\vartheta = Ma_2 \qquad \Rightarrow \qquad a_2 = g(\sin\vartheta + \mu_D\cos\vartheta) = g(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}) = g\frac{5}{8}\sqrt{2}$$

In questo caso il moto è uniformemente decelerato e la velocità istantanea durante la risalita è:

$$v(t) = -v_1 + a_2 t$$

che si azzera al tempo t_2:

$$t_2 = \frac{v_1}{a_2} = \frac{\sqrt{2Lg\left(\frac{9}{32}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)}}{g\frac{5}{8}\sqrt{2}} = \frac{8}{5}\sqrt{\frac{L}{g}(\frac{9}{32}\sqrt{2} - \frac{1}{4})} = 0.20\text{ s}$$

da cui otteniamo lo spazio L_2 percorso durante tutta la risalita:

$$-L_2 = -v_1 t_2 + \frac{1}{2}a_2 t_2^2 = -\frac{v_1^2}{a_2} + \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{a_2} = -\frac{1}{2}\frac{v_1^2}{a_2}$$

Usando a_2 appena calcolata e v_1 calcolato al punto 2 abbiamo:

$$L_2 = \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{a_2} = \frac{1}{2}\frac{2Lg\left(\frac{9}{32}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)}{g\frac{5}{8}\sqrt{2}} = L\frac{\left(\frac{9}{32}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)}{\frac{5}{8}\sqrt{2}} = 0.17\ L = 0.17\text{ m} \quad < \text{L}$$

Soluzione del problema 2

1. Usiamo un sistema di assi x, y standard (x positivo verso destra, y positivo verso l'alto). Siccome non ci sono forze esterne lungo l'asse orizzontale x, la componente della quantità di moto lungo questo asse prima e dopo l'urto si conserva. Quindi la velocità $\vec{v}_1$ dopo l'urto è diretta lungo x nello stesso verso della componente x della velocità $\vec{v}_0$ del proiettile ($\vec{v}_1 = (v_1, 0)$). In componenti otteniamo:

$$mv_0 \cos\vartheta = (M+m)v_1 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \frac{m}{M+m} v_0 \cos\vartheta = \frac{3 \times 10^{-2}\ \text{kg}}{(1 + 3\times 10^{-2})\ \text{kg}} 10^2\ \text{m/s}\ \frac{\sqrt{3}}{2} = 2.52\,\text{m/s}$$

2. Al momento dell'impatto il proiettile ha anche una componente della quantità di moto lungo l'asse y negativa, di modulo $mv_0 \sin\vartheta$. L'impulso fornito durante l'urto dal perno al quale è fissata la fune di sospensione sarà quindi uguale alla variazione di quantità di moto lungo y: $\vec{\mathcal{J}} = (0, \mathcal{J})$. Risulta:

$$\mathcal{J} = mv_0 \sin\vartheta = 3\times 10^{-2}\ \text{kg}\ \ \times 10^2\ \text{m/s}\ \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,\text{kg}\,\text{m/s} = 1.50\,\text{kg}\,\text{m/s}$$

3. La tensione $\vec{T}$ è diretta lungo l'asse y verso l'alto ($\vec{T} = (0, T)$) e viene fornita dalla fune per tutta la durata τ dell'urto in modo da bilanciare la variazione della quantità di moto lungo la verticale prodotta dal proiettile lungo questo asse. Nell'ipotesi di forze costanti si ha:

$$T = \frac{mv_0 \sin\vartheta}{\tau} = \frac{3\times 10^{-2}\ \text{kg}\ \ \times 10^2\ \text{m/s}\ \ \times 0.5}{10^{-2}\ \text{s}} = 1.50 \times 10^2\,\text{N}$$

4. Dopo l'urto i due corpi insieme si nuovono sotto l'azione della forza peso e della tensione del filo. Poiché la tensione del filo non compie lavoro perché è sempre perpendicolare al moto, possiamo applicare il teorema delle forze vive considerando il solo lavoro della forza peso per ricavare la massima altezza h_{max} richiesta:

$$\frac{1}{2}(M+m)v_1^2 = (M+m)gh_{max} \qquad \Rightarrow \qquad h_{max} = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{1}{2g}\Big(\frac{m}{M+m} v_0 \cos\vartheta\Big)^2 \simeq 3.25\times 10^{-1}\ \text{m} \simeq 32.5\,\text{cm}$$