Nome | *Cognome* | *Numero di matricola* | *Coordinata posizione*

Primo compito di Fisica Generale 1 + Esercitazioni, a.a. 2017-2018 – 4 Giugno 2018

==

Premesse da leggere molto attentamente prima di cominciare:

- In ogni riquadro si deve scrivere per la grandezza richiesta la formula matematica seguita dal suo valore numerico a partire dai dati forniti per tutte, o anche solo per alcune, delle grandezze fisiche coinvolte. Il procedimento per arrivare alla formula finale va scritto nei fogli protocollo distribuiti specificando la numerazione data nel testo. Se il procedimento non è riportato e/o non è coerente con la formula e col valore numerico scritti nel riquadro, il risultato viene considerato nullo.
- Si richiede di usare sempre il sistema di unità di misura internazionale SI. I valori numerici vanno scritti usando le potenze del 10 e si richiede (salvo casi particolari che verranno segnalati) di riportare solo 2 cifre significative, facendo il calcolo complessivo e arrotondandolo solo alla fine.
- Si consegnano il foglio del testo, debitamente compilato, e almeno uno, o più, fogli protocollo a scelta individuale. La coordinate della posizione occupata in aula durante il compito viene fornita dalla docente e serve ad individuare compiti tra loro copiati, che verranno annullati.

==

Problema 1: Una molla, di costante elastica $k = 200\,\mathrm{N/m}$ e lunghezza a riposo $l_0 = 20\,\mathrm{cm}$, ha un'estremità fissata nell'origine di un asse x orizzontale. All'altro estremo è fissata una massa $m = 5\,\mathrm{kg}$, vincolata a muoversi nella regione positiva dell'asse x. Al tempo $t = 0$ la molla è compressa completamente, la massa è ferma e viene lasciata libera di muoversi.

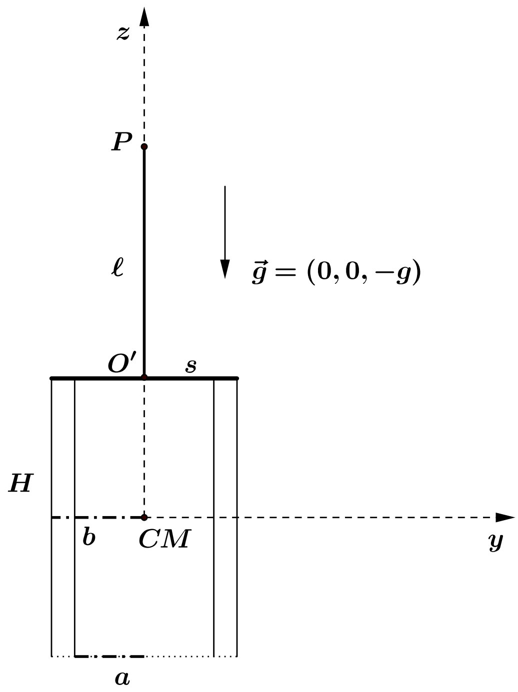
1. Si calcoli la posizione $x(t)$ della massa in funzione del tempo nell'ipotesi in cui non vi siano attriti.

2. Nell'ipotesi in cui vi sia attrito statico, si calcoli il limite sul suo coefficiente μ_S in modo che la massa, nella situazione data al tempo $t = 0$, possa mettersi in movimento .

3. Partendo dalla situazione data a t=0, e in presenza di un attrito statico che permetta alla massa m di mettersi in moto, assumiamo ora che vi sia attrito dinamico con coefficiente $\mu_D = 0.2$. In queste condizioni si calcoli la massima ascissa raggiunta dalla massa (x_{max}) ed i limiti sul coefficiente di attrito statico per cui la massa resta ferma in x_{max}.

4. Nella situazione del punto precedente si scriva la legge oraria $x(t)$ per t compreso tra l'istante 0 iniziale e il tempo massimo t_{max} in cui la massa si trova nella posizione x_{max}.

Problema 2: Un cilindro cavo di raggio interno a, raggio esterno b, altezza H e densità uniforme ϱ è posto in un sistema di riferimento inerziale x, y, z avente origine nel centro di massa CM del cilindro ed asse z lungo il suo asse di simmetria. La Figura mostra una sezione del sistema in cui l'asse x è perpendicolare al foglio con verso uscente. Una sbarretta orizzontale s, di massa trascurabile è fissata sulla faccia superiore del cilindro come in Figura. Il cilindro è sospeso dal punto P tramite un filo di massa trascurabile e lunghezza ℓ fissato nel punto di mezzo O' della sbarretta. Quando il cilindro viene ruotato attorno all'asse z di un angolo ϑ torcendo il filo, il filo esercita una forza di richiamo sul cilindro che tende a riportarlo verso la posizione di riposo (corrispondente a $\vartheta = 0$). Questa forza esercita un momento $\vec{N}$ il cui modulo è proporzionale all'angolo ϑ tramite la costante elastica di torsione del filo $k_{tor} > 0$.
I dati numerici del cilindro (da cui si calcola la sua massa M) sono: $a = 0.10\,\mathrm{m}$, $b = 0.13\,\mathrm{m}$, $H = 0.25\,\mathrm{m}$, $\varrho = 1.85 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.



1. Scrivete il momento $\vec{N}$ della forza di richiamo esercitata dal filo quando il cilindro viene ruotato di un generico angolo $\vartheta > 0$ dalla sua posizione di riposo. Indicate direzione e verso del vettore $\vec{N}$. Dite come cambia il momento $\vec{N}$ quando $\vartheta < 0$, e che tipo di moto vi aspettate che faccia il cilindro (assumendo che non ci sia alcuna dissipazione). Dite che dimensioni fisiche ha la costante k_{tor}.

2. Calcolate esplicitamente il momento d'inerzia I_z del cilindro rispetto all'asse z. Scrivete la formula di I_z e calcolatene il valore numerico.

3. Scrivete il momento angolare istantaneo L_z del cilindro rispetto all'asse z e l'equazione del moto del cilindro nel riferimento inerziale x, y, z. Confrontate questa equazione con quella di un pendolo semplice (in cui ϑ rappresenta in ogni istante la distanza angolare del pendolo dalla verticale) e dite quale è secondo voi la differenza principale tra i due casi.

4. Assumendo che il filo abbia, in unità SI, un valore della costante di torsione pari a $k_{tor} = 10^{-3}$, calcolate il valore numerico del periodo di oscillazione P_{tor} del cilindro.

Soluzione del problema 1

1. 1.1 L'equazione del moto e le condizioni iniziali sono

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= -k(x-l_0) \\ x(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{cases}$$

   da cui

$$x(t) = l_0\left[1 - cos\left(\omega\ t\right)\right] \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}}$$

2. La massa si mette in moto se $|\vec{F}_{molla}| > \mu_S mg$, quindi $\mu_s < \frac{kl_0}{mg} = 0.82$

3. La massima distanza si raggiunge quando la velocità è nulla. Scrivendo che la variazione di energia meccanica tra quando la massa arriva in x_{max} e l'istante iniziale in cui si trova nell'origine con la molla tutta compressa) è pari al lavoro della forza di attrito (l'unica non conservativa) si ha:

$$\frac{k(x_{max}-l_0)^2}{2} - \frac{kl_0^2}{2} = -\mu_D mgx_{max}$$

   da cui

$$x_{max} = 2\Big(l_0 - \mu_D\frac{mg}{k}\Big) = 30.2\text{cm}.$$

   La massa resta ferma in x_{max} se

$$k\left|x_{max} - l_0\right| < \mu_S mg$$

   quindi

$$\mu_S > \frac{kl_0}{mg}\left|1 - \frac{2\mu_D mg}{kl_0}\right| = 0.42.$$

   Inoltre resta valido quanto trovato al punto precedente, per cui dovrà anche continuare a valere $\mu_S < \frac{kl_0}{mg} = 0.82$, quindi deve essere $0.42 < \mu_S < 0.82$.

4. L'equazione del moto e le condizioni iniziali adesso sono

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= -k(x-l_0) - \mu_D mg \ \Rightarrow\ \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0 - \frac{\mu_D g}{k} \qquad (\omega^2 = \frac{k}{m}) \\ x(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{cases}$$

   Proviamo come soluzione generale quella dell'oscillatore armonico più un termine costante:

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t + (l_0 - \frac{mg\mu_D}{k})$$

   da cui imponendo le condizioni iniziali risulta: $A = 0$, $B = -(l_0 - \frac{mg\mu_D}{k})$ e quindi:

$$x(t) = \Big(l_0 - \frac{\mu_D mg}{k}\Big)\left[1 - cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t\right)\right]$$

   fino al tempo $t_{max} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Soluzione del problema 2

1. $N_z = -k_{tor}\vartheta$. Il vettore $\vec{N}$ è diretto lungo l'asse z ed ha segno negativo se l'angolo ϑ è positivo e viceversa ($\vec{N} = -k_{tor}\vartheta\hat{z}$); quindi il cilindro oscilla attorno alla posizione di riposo ($\vartheta = 0$). Poiché gli angoli sono adimensionali la costante di torsione ha le stesse dimensioni del momento della forza, quindi $[k_{tor}] = \mathrm{Nm} = \mathrm{Kgm^2s^{-2}}$.

2. $M = \left(\pi b^2 H - \pi a^2 H\right)\varrho = \pi H\varrho\left(b^2 - a^2\right) = 10.03\,\mathrm{kg}$.

   L'elemento di massa $dm = \varrho(2\pi r dr)H$ con $a \leqslant r \leqslant b$ si trova tutto alla stessa distanza r dall'asse z. Quindi

$$I_z = \int_M dm\, r^2 = 2\pi\varrho H\int_a^b r^3 dr = \frac{\pi\varrho H}{2}(b^4 - a^4) = \frac{\pi\varrho H}{2}(b^2 - a^2)(b^2 + a^2) = \frac{1}{2}M(b^2 + a^2) = 0.13\,\mathrm{kg\,m^2}$$

   Si può anche calcolare I_z come la differenza tra il momento di inerzia di un cilindro pieno di raggio b e quello di un cilindro pieno di raggio a. Poiché il momento di inerzia di un cilindro pieno omogeneo di raggio r e massa M_r è $I = \frac{1}{2}M_r r^2$ con $M_r = \varrho\pi r^2 H$ si ottiene:

$$I_z = \frac{1}{2}\varrho\pi b^2 H\ b^2 - \frac{1}{2}\varrho\pi a^2 H\ a^2 = \frac{1}{2}\varrho\pi H(b^2 - a^2)(b^2 + a^2) = \frac{1}{2}M(b^2 + a^2)$$

   Il testo intendeva verificare la capacità di calcolare il momento d'inerzia scegliendo l'elemento di massa più opportuno ed eseguendo poi l'integrale su tutta la massa del corpo.

3. Il momento angolare del sistema vale $L_z = I_z\dot{\vartheta}$, quindi

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}_z}{dt} = I_z\ddot{\vartheta}\hat{z}$$

   Lungo l'asse z allora si ha:

$$\begin{aligned} I_z\ddot{\vartheta} &= -k_{tor}\vartheta \\ \ddot{\vartheta} &= -\frac{k_{tor}}{I_z}\vartheta \\ \ddot{\vartheta} &= -\omega_\circ^2\vartheta \quad \text{con} \quad \omega_\circ = \sqrt{\frac{\mathrm{k_{tor}}}{\mathrm{I_z}}} \end{aligned}$$

   L'equazione del moto torsionale $\ddot{\vartheta} = -\omega_\circ^2\vartheta$ è esatta, mentre nel caso del pendolo semplice la stessa equazione con $\omega_\circ = \sqrt{g/\ell}$, e ℓ la lunghezza del filo, vale solo per piccole oscillazioni, cioè per piccoli angoli ϑ per cui vale $\sin\vartheta \simeq \vartheta$. Per le oscillazioni torsionali del cilindro il periodo trovato è lo stesso indipendentemente dall'ampiezza delle oscillazioni, mentre nel caso del pendolo semplice questo è vero solo per piccole oscillazioni.

   Inoltre per cilindro soggetto a forza elastica di torsione il periodo delle oscillazioni torsionali dipende dalla sua massa (tramite il momento d'inerzia I_z), mentre nel pendolo semplice la massa del corpo non interviene perché la forza gravitazionale che lo fa oscillare produce la stessa accelerazione su tutti i corpi. Nel pendolo di torsione la forza gravitazionale è bilanciata dal filo ma non influisce sulle oscillazioni torsionali, il cui periodo dipende dalla radice quadrata della massa, come si vede al punto successivo.

4. Il periodo è

$$P_{tor} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{k_{tor}}} = 73\,\mathrm{s}$$

   indipendentemente dall'ampiezza dell'oscillazione torsionale.