Nome	Cognome	Numero di matricola	Coordinata posizione

Secondo compito in itinere di Fisica Generale 1 + Esercitazioni, a.a. 2017-2018 – 22 Maggio 2018

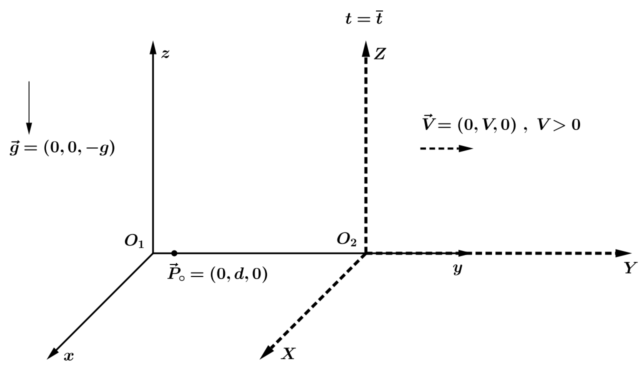
==

Premesse da leggere molto attentamente prima di cominciare:

- In ogni riquadro si deve scrivere per la grandezza richiesta la formula matematica seguita dal suo valore numerico a partire dai dati forniti per tutte, o anche solo per alcune, delle grandezze fisiche coinvolte. Il procedimento per arrivare alla formula finale va scritto nei fogli protocollo distribuiti specificando la numerazione data nel testo. Se il procedimento non è riportato e/o non è coerente con la formula e col valore numerico scritti nel riquadro, il risultato viene considerato nullo.
- Si richiede di usare sempre il sistema di unità di misura internazionale SI. I valori numerici vanno scritti usando le potenze del 10 e si richiede (salvo casi particolari che verranno segnalati) di riportare solo 2 cifre significative, facendo il calcolo complessivo e arrotondandolo solo alla fine.
- Si consegnano il foglio del testo, debitamente compilato, e almeno uno, o più, fogli protocollo a scelta individuale. La coordinate della posizione occupata in aula durante il compito viene fornita dalla docente e serve ad individuare compiti tra loro copiati, che verranno annullati.

==

Problema 1: R_1 è un riferimento inerziale fisso con origine in O_1 ed assi xyz. R_2 (origine in O_2, assi XYZ) è un altro riferimento inerziale che si muove con velocità costante $\vec{V} = (0, V, 0)$ rispetto ad R_1 come mostrato in Figura. Al tempo $t = 0$ si ha che: l'origine di R_2 si trova in $\vec{P}_\circ = (0, d, 0)$, R_2 inizia a muoversi con velocità $\vec{V}$ e gli osservatori R_1 ed R_2 lanciano (ciascuno) un corpo puntiforme, di massa m_1 ed m_2 rispettivamente, dalla propria origine degli assi e con velocità, rispetto al proprio sistema di riferimento, $\vec{v}_\circ = (0, 0, v_\circ)$. I dati numerici sono: $V = 5\,\mathrm{ms}^{-1}$, $d = 1\,\mathrm{m}$, $m_1 = 1.5\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$, $v_\circ = 8\,\mathrm{ms}^{-1}$, $g = 9.81\,\mathrm{ms}^{-2}$.



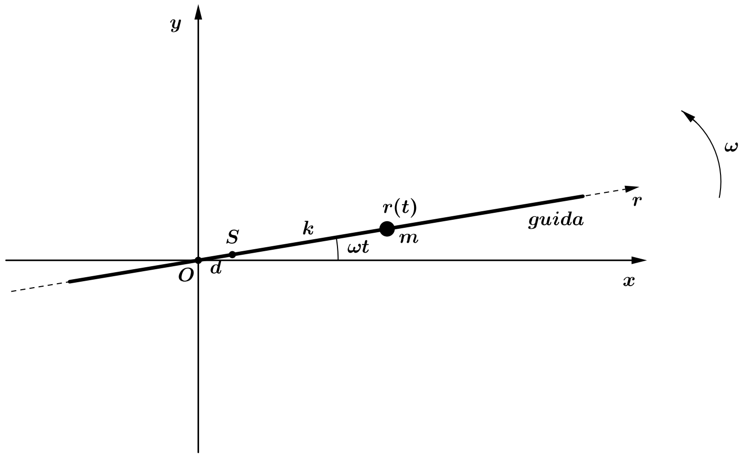
1. L'osservatore in R_1 studia il moto della massa m_1. Conclude che essa arriva ad una altezza massima z_{1max} e poi ricade a terra al tempo $t_{1caduta}$ nel punto $\vec{P}_{1caduta}$. Scrivete le formule e il valore numerico per ciascuna di queste tre grandezze.

2. L'osservatore in R_1 studia il moto della massa m_2 nel riferimento R_1. Conclude che essa arriva ad una altezza massima z_{2max}, poi ricade a terra al tempo $t_{2caduta}$ nel punto $\vec{P}_{2caduta}$. Scrivete le formule e il valore numerico per ciascuna di queste tre grandezze e anche del punto $\vec{P}_{O2-caduta}$ in cui si trova l'origine O_2 al tempo $t_{2caduta}$.

3. Scrivete la formula della traiettoria di m_2 nel sistema di riferimento R_1 ed indicate di che tipo di curva si tratta.

4. Adesso è presente una forza di attrito viscoso (cioè proporzionale alla velocità del corpo) $\vec{F}(t) = -\beta\vec{v}(t)$ con coefficiente di proporzionalità β ignoto. L'osservatore in R_1 osserva che, in presenza di questa forza di attrito, la massa m_1 raggiunge un'altezza massima $z'_{1max} = \frac{2}{3} z_{1max}$. Sulla base di questo dato calcolate il lavoro $L_{attrito}$ fatto dalla forza di attrito viscoso durante il moto di salita della massa m_1.

Problema 2: In Figura il riferimento piano Oxy è inerziale. L'asse r ruota attorno ad O con velocità angolare ω ed è mostrato al tempo t. Lungo l'asse r il segmento in grassetto rappresenta una guida liscia nella quale la massa puntiforme $m = 0.1\,\text{kg}$ viene richiamata da una molla ideale di costante elastica $k = 0.04\,\text{N/m}$, lunghezza a riposo e massa nulle verso il punto di richiamo S che non coincide con il centro di rotazione e origine degli assi O, ma si trova a distanza $d = 0.005\,\text{m}$ da esso. (La molla tra il punto S e la massa m non è disegnata in Figura).



1. L'oscillatore armonico considerato ha, in assenza di rotazione, una sua frequenza di oscillazione naturale $\omega_\circ$ che potete calcolare. Nel caso in cui ruoti con una velocità angolare $\omega_1 < \omega_\circ$ (con $\omega_1 = 0.063\,\text{rad/s}$), calcolate la posizione di equilibrio r_{1eq} della massa m, dite se è maggiore, minore o uguale a d e calcolate il valore numerico del rapporto r_{1eq}/d.

2. La velocità angolare di rotazione viene ora aumentata ad un valore $\omega_2 = 0.3\,\text{rad/s}$ (osservate che $\omega_1 < \omega_2 < \omega_\circ$). Chiamiamo r_{1eq} e r_{2eq} le posizioni di equilibrio della massa m nei due casi. Calcolate il momento angolare di rotazione, $\vec{L}_1$ ed $\vec{L}_2$ della massa m per ciascuna posizione di equilibrio, scrivete nel riquadro la loro differenza $\vec{\Delta L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$ e calcolatene il valore numerico.

3. La velocità angolare di rotazione viene aumentata ulteriormente fino al valore $\omega_3 = 70\,\text{rad/s}$. Scrivete la posizione di equilibrio r_{3eq} della massa m e, siccome è $\omega_3 \gg \omega_\circ$ sviluppatela in serie tenendo solo termini dell'ordine di $\omega_\circ^2/\omega_3^2$. Calcolatene il valore numerico facendo attenzione al suo segno. Dite se questa posizione di equilibrio può essere raggiunta dalla massa m vincolata a muoversi lungo la guida.

4. Assumete che all'istante t mostrato in Figura, mentre la guida sta ruotando con velocità angolare ω, la massa m abbia una velocità $\dot{r}(t) > 0$. In queste condizioni sulla massa agisce una forza $F_\perp$ perpendicolare alla direzione r della guida. Scrivete questa forza e specificatene il verso.

Soluzione del problema 1

1. Il moto della massa m_1 si svolge lungo l'asse z del riferimento R_1.

$$\ddot{z} = -g$$
$$\dot{z} = -gt + v_\circ$$
$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_\circ t$$

m_1 raggiunge l'altezza massima quando la sua velocità si annulla:

$$0 = -gt_{1max} + v_\circ \quad \Rightarrow \quad t_{1max} = \frac{v_\circ}{g}$$

il tempo che impiega la massa m per ricadere a terra è pari a quello di salita, quindi:

$$t_{1caduta} = 2t_{1max} = \frac{2v_\circ}{g}$$

per cui l'altezza massima risulta:

$$z_{1max} = -\frac{1}{2}gt_{1max}^2 + v_\circ t_{1max} = \frac{v_\circ^2}{2g}$$

inoltre:

$$\vec{P}_{1caduta} = (0, 0, 0)$$

Si noti che era possibile trovare l'altezza massima anche sfruttando il teorema di conservazione dell'energia meccanica in quanto l'unica forza agente su m_1 è la forza di gravità che è conservativa:

$$mgz_{1max} = \frac{1}{2}m_1 v_\circ^2$$

da cui

$$z_{1max} = \frac{v_\circ^2}{2g}$$

Con i valori numerici dati: $t_{1caduta} = 1.63\,\mathrm{s}$, $z_{1max} = 3.26\,\mathrm{m}$

2. Nel riferimento R_1 dell'osservatore O_1 il moto della massa m_2 si svolge nel piano y, z. Seguendo lo schema del punto precedente si ottiene:

$$\ddot{x} = 0 \ , \ \ddot{y} = 0 \ , \ \ddot{z} = -g$$
$$\dot{x} = 0 \ , \ \dot{y} = V \ , \ \dot{z} = -gt + v_\circ$$
$$x = 0 \ , \ y = Vt + d \ , \ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_\circ t$$
$$0 = -gt_{2max} + v_\circ \quad \Rightarrow \quad t_{2max} = \frac{v_\circ}{g}$$
$$t_{2caduta} = 2t_{2max} = \frac{2v_\circ}{g}$$
$$z_{2max} = -\frac{1}{2}gt_{2max}^2 + v_\circ t_{2max} = \frac{v_\circ^2}{2g}$$
$$y_{2caduta} = Vt_{2caduta} = \frac{2Vv_\circ}{g}$$
$$\vec{P}_{2caduta} = (0, \frac{2Vv_\circ}{g} + d, 0)$$

All'istante $t_{2caduta}$ di caduta della massa m_2 l'osservatore posto nell'origine del riferimento R_2, che a $t = 0$ si trovava nel punto $\vec{P}_\circ$ si troverà nel punto $\vec{P}_{O2-2caduta} = (0, Vt_{2caduta} + d = \frac{2Vv_\circ}{g} + d, 0)$, cioè nello stesso punto di caduta della massa m_2.

Con i valori numerici: $\vec{P}_{O2-2caduta} = (0, 9.15\mathrm{m}, 0)$

3. Le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} y = Vt + d \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_\circ t \end{cases}$$

Eliminando il tempo otteniamo:

$$z = -\frac{g}{2V^2}(y-d)^2 + \frac{v_\circ}{V}(y-d) \tag{1}$$

che è l'equazione di una parabola nel piano y, z con concavità rivolta verso il basso.

4. La forza di attrito viscoso è l'unica forza non coservativa in gioco, quindi il suo lavoro è pari alla variazione di energia meccanica durante il moto di salita:

$$L_{attrito} = E_f - E_i = m_1 g z'_{1max} - \frac{1}{2}m_1 v_\circ^2 = \frac{2}{3}m_1 g z_{1max} - \frac{1}{2}m_1 v_\circ^2 = \frac{2}{3}m_1 g \frac{v_\circ^2}{2g} - \frac{1}{2}m_1 v_\circ^2 = \frac{m_1 v_\circ^2}{3} - \frac{1}{2}m_1 v_\circ^2 = -\frac{1}{6}m_1 v_\circ^2$$

Si tratta di un lavoro negativo in quanto la forza di attrito è sempre opposta allo spostamento.

Con i valori numerici: $L_{attrito} = -16\,\mathrm{kg\,m^2 s^{-2}} = 16\,\mathrm{J}$

Soluzione del problema 2

1. Sappiamo che la frequenza di oscillazione naturale di un oscillatore armonico con costante elastica k e massa m è $\omega_\circ = \sqrt{k/m}$

   Quando ruota la posizione di equilibrio si ha quando la forza elastica di richiamo verso il punto S e quella centrifuga dovuta alla rotazione attorno ad O, che agiscono entrambe lungo r ma in direzioni opposte, si uguagliano (si noti che all'equilibrio la massa ha velocità nulla rispetto alla guida, cioè nel sistema rotante, e quindi la forza di Coriolis è nulla):

$$0 = -k(r_{1eq} - d) + m\omega_1^2 r_{1eq} \quad \Rightarrow r_{1eq} = d\frac{\omega_\circ^2}{\omega_\circ^2 - \omega_1^2}$$

   Essendo $\omega_1 < \omega_\circ$, allora $0 < \omega_\circ^2 - \omega_1^2 < \omega_\circ^2$ e quindi

$$r_{1eq} = d\frac{\omega_\circ^2}{\omega_\circ^2 - \omega_1^2} > d$$

   Più grande è ω_1 più la posizione di equilibrio si allontana da S, come è intuitivo.

   Con i numeri dati: $\frac{r_{1eq}}{d} = \frac{\omega_\circ^2}{\omega_\circ^2 - \omega_1^2} = 1.01$

   NOTA: La frequenza di oscillazione naturale si ricava scrivendo l'equazione del moto dell'oscillatore in assenza di rotazione:

$$m\ddot{r} = -k(r-d)$$

   da cui si evince quindi si tratta di un oscillatore armonico con frequenza naturale $\omega_\circ = \sqrt{k/m}$, e anche che l'equilibrio (in assenza di rotazione) si ha quando $r = d$, dove vale $m\ddot{r} = 0$.

2. Le due posizioni di equilibrio r_{1eq} ed r_{2eq} alle due velocità angolari ω_1 ed ω_2 sono (vedi punto precedente):

$$r_{1eq} = d\frac{\omega_\circ^2}{\omega_\circ^2 - \omega_1^2} \qquad r_{2eq} = d\frac{\omega_\circ^2}{\omega_\circ^2 - \omega_2^2}$$

   e sappiamo che $r_{2q} > r_{1q}$ perché $\omega_1 < \omega_2 < \omega_\circ$.

   Rispetto la riferimento inerziale Ox, y la massa ha, in ciascun caso, un momento angolare di rotazione non nullo. Dalla definizione di momento angolare, nelle due posizioni di equilibrio r_{1eq} ed r_{2eq}, vale $\vec{L}_1 = \vec{r}_{1eq} \times m\vec{v}_1 = m\omega_1 r_{1eq}^2 \hat{z}$ e analogamente $\vec{L}_2 = \vec{r}_{2eq} \times m\vec{v}_2 = m\omega_2 r_{2eq}^2 \hat{z}$. Quindi:

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = m(\omega_2 r_{2q}^2 - \omega_1 r_{1eq}^2)\hat{z} = m\left[\omega_2\left(d\frac{\omega_\circ^2}{\omega_\circ^2 - \omega_2^2}\right)^2 - \omega_1\left(d\frac{\omega_\circ^2}{\omega_\circ^2 - \omega_1^2}\right)^2\right]\hat{z} =$$

$$= md^2\omega_\circ^4\left[\frac{\omega_2}{\left(\omega_\circ^2 - \omega_2^2\right)^2} - \frac{\omega_1}{\left(\omega_\circ^2 - \omega_1^2\right)^2}\right]\hat{z}$$

   Con i numeri dati risulta: $\Delta L = 1.09 \times 10^{-6}\,\mathrm{kg\,m^2s^{-1}}$

3. Calcolando la posizione di equilibrio come al punto 1. ma sapendo che in questo caso è $\omega_3 > \omega_\circ$ si ha:

$$r_{3eq} = -d\frac{\omega_\circ^2}{\omega_3^2 - \omega_\circ^2} = -d\frac{\omega_\circ^2}{\omega_3^2(1 - \omega_\circ^2/\omega_3^2)} \simeq -d\frac{\omega_\circ^2}{\omega_3^2}\left(1 + \frac{\omega_\circ^2}{\omega_3^2}\right) \simeq -d\frac{\omega_\circ^2}{\omega_3^2} < 0$$

   Con i numeri dati: $r_{3eq} \simeq -4.08 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$ (la differenza tra il valore esatto e quello approssimato si vedrebbe se scrivessimo anche la cifra significativa successiva). Notare che $|r_{3eq}| \simeq \frac{d}{1.2 \cdot 10^4} \ll d$.

   Essendo negativa questa posizione di equilibrio non può essere raggiunta perché man mano che la velocità di rotazione aumenta la massa si trova sempre più lontana da S sul lato delle r positive a causa della forza centrifuga. Si noti che in modulo $|r_{3eq}| \ll d$, cioè questa posizione di equilibrio sarebbe molto più vicina al centro di rotazione e quindi, se potesse essere raggiunta potrebbe garantire una rotazione molto regolare (sistema rotante ben centrato).

4. La forza di Coriolis è data da $\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$, quindi il suo modulo è: $F_{Cor} = 2m\omega\dot{r}$ perpendicolare alla guida e per $\dot{r} > 0$ è diretta nel verso contrario alla rotazione. In notazione vettoriale: $\vec{F}_{Cor} = -2m\omega\dot{r}\hat{e}_\vartheta$ dove $\hat{e}_\vartheta$ è il versore perpendicolare all'asse r nel verso della rotazione. Affinché la massa non esca dalla guida le pareti di essa devono essere in grado di controbilanciarla. Se la massa m potesse muoversi nel piano, invece di essere vincolata in una sola direzione lungo la guida (2 gradi di libertà invece di 1), per $\omega_3 > \omega_\circ$ la forza di Coriolis permetterebbe ad m di raggiungere la posizione di equilibrio r_{3eq} sul lato delle r negative, garantendo un sistema rotante ben centrato.