Nome | *Cognome* | *Numero di matricola* | *Coordinata posizione*

Secondo compito di Fisica Generale 1 + Esercitazioni, a.a. 2017-2018 – 3 Luglio 2018

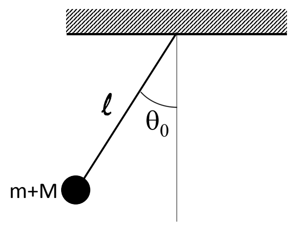
==

Premesse da leggere molto attentamente prima di cominciare:

- In ogni riquadro si deve scrivere per la grandezza richiesta la formula matematica seguita dal suo valore numerico a partire dai dati forniti per tutte, o anche solo per alcune, delle grandezze fisiche coinvolte. Il procedimento per arrivare alla formula finale va scritto nei fogli protocollo distribuiti specificando la numerazione data nel testo. Se il procedimento non è riportato e/o non è coerente con la formula e col valore numerico scritti nel riquadro, il risultato viene considerato nullo.
- Si richiede di usare sempre il sistema di unità di misura internazionale SI. I valori numerici vanno scritti usando le potenze del 10 e si richiede (salvo casi particolari che verranno segnalati) di riportare solo 2 cifre significative, facendo il calcolo complessivo e arrotondandolo solo alla fine.
- Si consegnano il foglio del testo, debitamente compilato, e almeno uno, o più, fogli protocollo a scelta individuale. La coordinate della posizione occupata in aula durante il compito viene fornita dalla docente e serve ad individuare compiti tra loro copiati, che verranno annullati.
- Dove richiesto, per l'accelerazione locale di gravità si usi: $g = 9.81\,\mathrm{ms}^{-2}$

==

Problema 1: Un bambino gioca su un'altalena con una palla in mano. Il bambino ha massa M, la palla ha massa m e le corde dell'altalena sono lunghe ℓ. Ad un istante t_0 l'altalena si trova ad un estremo delle sue oscillazioni e le corde formano un angolo θ_0 con la verticale. L'altalena è schematizzata come un punto materiale e le sue corde come un singolo filo, come mostrato in figura. I dati numerici sono: $\ell = 4\,\mathrm{m}$, $M = 20\,\mathrm{kg}$, $m = 0.5\,\mathrm{kg}$ e $\theta_0 = \pi/4$.



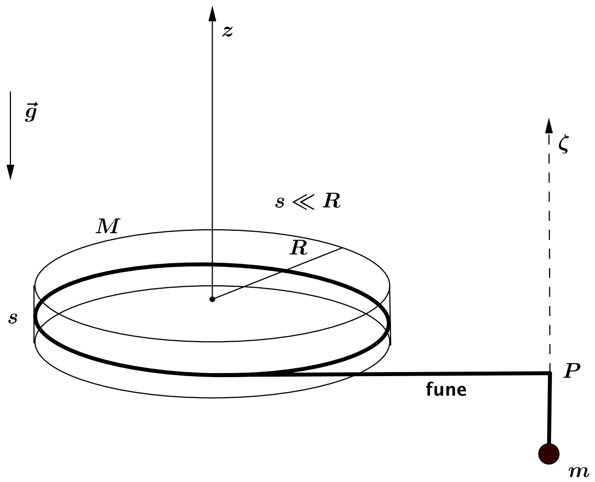
1. Dire quali delle seguenti grandezze si conservano durante il moto successivo all'istante t_0 giustificando il risultato: energia meccanica del sistema (E_{tot}), quantità di moto del centro di massa del sistema ($\vec{Q}_{CM}$), momento angolare totale del sistema ($\vec{L}$).

2. Trovare la velocità dell'altalena in funzione dell'angolo θ. Calcolare in particolare la velocità quando l'altalena transita dalla verticale del punto di sospensione e darne il valore numerico [Nota: si consiglia di usare una legge di conservazione trovata al punto precedente].

3. Trovare la tensione della corda in funzione dell'angolo θ. Calcolare la tensione quando l'altalena transita dalla verticale e darne il valore numerico.

4. Nel momento in cui l'altalena passa per la verticale il bambino lancia la palla orizzontalmente in avanti e la palla risulta avere una velocità rispetto a terra, di modulo $v_m = 8\,\mathrm{ms}^{-1}$. Trovare la nuova velocità del bambino sull'altalena subito dopo che ha lanciato la palla.

Problema 2: Un disco omogeneo di massa M, raggio R e spessore $s \ll R$ è libero di ruotare senza attrito attorno all'asse verticale z passante per il suo centro di massa. Sulla superficie laterale del disco, in un scanalatura (la cui influenza sulla massa totale del disco è trascurabile), è avvolta una fune che passa per il perno P e alla cui estremità libera è fissata un massa m (vedi figura). Il peso di m srotola la fune e mette in rotazione il disco. La fune è inestensibile, non slitta ed è soggetta ad un attrito trascurabile. I valori numerici sono: $M = 5\,\mathrm{kg}$, $R = 0.6\,\mathrm{m}$, $m = 0.7\,\mathrm{kg}$.



1. Quando la fune, inizialmente immobile, si è srotolata di una quantità $h = 0.1\,\mathrm{m}$ la massa m ha acquistato una velocità lineare v e il disco una velocità angolare di rotazione ω. Calcolare le grandezze v e ω, e darne i valori numerici. Dire come è diretto il vettore di rotazione $\vec{\omega}$. [Nota: sfruttare una legge di conservazione ed il fatto che la fune è inestensibile]

2. Al tempo $t = 0$ il sistema è fermo, e la massa m viene lasciata libera di muoversi. Scrivere l'equazione del moto della massa m lungo l'asse ζ e l'equazione del moto di rotazione del disco, indicando con $\ddot{\vartheta}$ la sua accelerazione angolare.

3. Ad un generico tempo $t > 0$ calcolare l'accelerazione angolare $\ddot{\vartheta}$ del disco e la tensione T della fune. Calcolarne i valori numerici. [Nota: sfruttare il fatto che la fune è inestensibile]

4. Al tempo $t = 0.5\,\mathrm{s}$ calcolare la lunghezza ℓ di cui si è srotolata la fune e darne il valore numerico.

Soluzione del problema 1

1. E_{tot} si conserva perchè tutte le forze in gioco sono conservative (la gravità) o a lavoro nullo (la tensione del filo)

   $\vec{Q}_{CM}$ non si conserva perchè la somma delle forze esterne agenti sul sistema (la gravità e la tensione del filo) non è nulla.

   $\vec{L}_0$ non si conserva perchè la somma dei momenti delle forze esterne (la gravità e la tensione del filo) non è nulla.

2. Utilizzo la conservazione di E_{tot} per trovare la velocità richiesta mettendo lo zero dell'energia potenziale della gravitá quando l'altalena si trova sulla verticale:

   $$(m+M)g\ell(1-cos\theta_0) = \frac{1}{2}(m+M)v^2 + (m+M)g\ell(1-cos\theta)$$

   In coordinate polari ho quindi:

   $$\vec{v} = \sqrt{2g\ell(cos\theta - cos\theta_0)}\hat{\theta}$$

   perchè la velocità è sempre tangenziale. La velocità quando l'altalena passa per la verticale è quindi:

   $$\vec{v}(\theta=0) = \sqrt{2g\ell(1-cos\theta_0)}\hat{\theta} = \sqrt{2g\ell(1-cos\theta_0)}\hat{x}$$

   $$v(\theta=0) = 4.79\,\mathrm{ms}^{-1}$$

3. Per trovare il valore della tensione in funzione dell'angolo θ scriviamo la prima equazione cardinale in direzione $\hat{r}$ ad un generico angolo:

   $$(m+M)gcos\theta - T = -(m+M)\frac{v^2}{\ell}$$

   Quindi:

   $$T = (m+M)gcos\theta + (m+M)\frac{v^2}{\ell} = (m+M)g[cos\theta + 2(cos\theta - cos\theta_0)] = (m+M)g(3cos\theta - 2cos\theta_0)$$

   diretta come $-\hat{r}$. Sulla verticale:

   $$\vec{T}(\theta=0) = -(m+M)g(3-2cos\theta_0)\hat{r} = (m+M)g(3-2cos\theta_0)\hat{y}$$

   $$T(\theta=0) = 319\,\mathrm{N}$$

4. Nel momento in cui il bambino lancia la palla orizzontalmente non ci sono forze esterne che agiscono in tale direzione, quindi si conserva la quantià di moto orizzontale:

   $$(m+M)v(\theta=0) = mv_m + Mv_M$$

   da cui otteniamo la velocità del bambino subito dopo il lancio:

   $$v_M = \frac{m+M}{M}v(\theta=0) - \frac{m}{M}v_m = \frac{m+M}{M}\sqrt{2g\ell(1-cos\theta_0)} - \frac{m}{M}v_m$$

   $$v_M = 4.71\,\mathrm{ms}^{-1} \quad .$$

   Ovviamente dopo il lancio la velocità è diminuita, ma non di molto perché la massa della palla è piccola rispetto a quella del bambino, e anche la sua velocità al lancio –rispetto all'altalena– è di soli $3.2\,\mathrm{ms}^{-1}$, quindi più piccola della velocità complessiva di bambino più palla nello stesso istante.

Soluzione del problema 2

1. Uso la conservazione dell'energia totale tra l'istante iniziale t_i, in cui il disco è fermo (non ruota) e la massa m è anch'essa ferma ad una altezza alla quale assegno lo zero dell'energia potenziale gravitazionale, e l'istante finale t_f in cui la massa m è scesa di una altezza h ed ha acquistato una velocità lineare verso il basso di modulo v e il disco ruota con velocità angolare ω. Indicando con $I_z = \frac{1}{2}MR^2$ il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse z vale:

$$E_{t_i} = 0$$
$$E_{t_f} = \frac{1}{2}I_z\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 - mgh = E_{t_i} = 0$$

Siccome la fune è inestensibile, ω e v sono legate dalla relazione:

$$\omega R = v$$

quindi:

$$\frac{1}{2}\omega^2(I_z + mR^2) = mgh \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2mgh}{(I_z + mR^2)}} = \sqrt{\frac{4mgh}{(M + 2m)R^2}}$$

e:

$$v = \omega R = \sqrt{\frac{4mgh}{(M + 2m)}}$$

Con i valori numerici dati:

$\omega = 1.09\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

$v = 0.66\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 2.36\,\mathrm{km/h}$

2. La massa m si muove lungo l'asse verticale ζ, parallelo a z, sotto l'azione della tensione T diretta verso l'alto e della forza peso diretta verso il basso. La sua equazione del moto è:

$$m\ddot{\zeta} = T - mg$$

Il disco ruota sotto l'azione della tensione T del filo che produce un momento TR lungo z diretto verso l'alto. L'equazione del moto è:

$$I_z\ddot{\vartheta} = TR \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vartheta} = \frac{2T}{MR}$$

3. Siccome la fune è inestensibile vale (in modulo):

$$\ddot{\zeta} = \ddot{\vartheta}R \quad \Rightarrow \quad T = m(g - \ddot{\vartheta}R)$$

e quindi per l'accelerazione angolare del disco abbiamo:

$$I_z\ddot{\vartheta} = m(g - \ddot{\vartheta}R)R \quad \Rightarrow \quad (I_z + mR^2)\ddot{\vartheta} = mgR \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vartheta} = \frac{mgR}{(I_z + mR^2)} = \frac{2m}{M + 2m}\frac{g}{R} \quad , \quad \ddot{\zeta} = \frac{2m}{M + 2m}g$$

e per la tensione T della fune:

$$T = mg - \frac{m^2gR^2}{(I_z + mR^2)} = \frac{Mm}{M + 2m}g$$

Con i valori numerici dati:

$\ddot{\vartheta} = 3.57\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$

$T = 5.36\,\mathrm{N}$

si noti che sia l'accelerazione angolare che la tensione della fune sono indipendenti dal tempo.

4. Siccome l'accelerazione angolare del disco è costante, l'angolo spazzato al tempo $t > 0$ è:

$$\vartheta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\vartheta}t^2 = \frac{mgR}{2(I_z + mR^2)}t^2 = \frac{m}{M + 2m}\frac{g}{R}t^2$$

e quindi la fune si è allungata di una lunghezza:

$$\ell(t) = \vartheta(t)R = \frac{mgR^2}{2(I_z + mR^2)}t^2 = \frac{mg}{M + 2m}t^2$$

Al tempo $t = 0.5\,\mathrm{s}$:
$\vartheta(t) = 0.45\,\mathrm{rad} = 25.6°$
$\ell(t) = 0.27\,\mathrm{m}$