Nome | *Cognome* | *Numero di matricola* | *Coordinata posizione*

Terzo compito di Fisica Generale 1 + Esercitazioni, a.a. 2017-2018 – 4 Settembre 2018

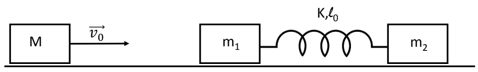
==

Premesse da leggere molto attentamente prima di cominciare:

- In ogni riquadro si deve scrivere per la grandezza richiesta la formula matematica seguita dal suo valore numerico a partire dai dati forniti per tutte, o anche solo per alcune, delle grandezze fisiche coinvolte. Il procedimento per arrivare alla formula finale va scritto nei fogli protocollo distribuiti specificando la numerazione data nel testo. Se il procedimento non è riportato e/o non è coerente con la formula e col valore numerico scritti nel riquadro, il risultato viene considerato nullo.
- Si richiede di usare sempre il sistema di unità di misura internazionale SI. I valori numerici vanno scritti usando le potenze del 10 e si richiede (salvo casi particolari che verranno segnalati) di riportare solo 2 cifre significative, facendo il calcolo complessivo e arrotondandolo solo alla fine.
- Si consegnano il foglio del testo, debitamente compilato, e almeno uno, o più, fogli protocollo a scelta individuale. La coordinate della posizione occupata in aula durante il compito viene fornita dalla docente e serve ad individuare compiti tra loro copiati, che verranno annullati.
- Dove richiesto, per l'accelerazione locale di gravità si usi: $g = 9.81\,\mathrm{ms^{-2}}$

==

Problema 1: Due blocchi di massa m_1 ed m_2 sono fermi appoggiati su un piano orizzontale liscio. I blocchi sono collegati tra loro tramite una molla a riposo di costante elastica k e lunghezza a riposo ℓ_0 come in figura. Un terzo blocco di massa M si muove con velocità orizzontale $\vec{v}_0$ ed urta il blocco di massa m_1 restandoci attaccato. Dati del problema: $m_1 = m_2 = m = 0.5\,\mathrm{Kg}$, $M = 1\,\mathrm{Kg}$, $k = 100\,\mathrm{N/m}$, $\ell_0 = 10\,\mathrm{cm}$ e $|\vec{v}_0| = 0.5\,\mathrm{m/s}$



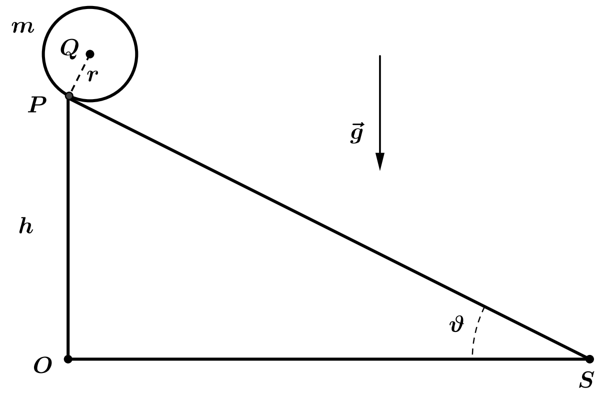
1. Dire quali delle seguenti grandezze (o loro singole componenti) si conservano tra l'istante immediatamente precedente all'urto e l'istante immediatamente successivo giustificando il risultato: energia meccanica del sistema formato dalle tre masse (E_{tot}), quantità di moto del centro di massa del sistema ($\vec{Q}_{CM}$), quantità di moto di ogni blocco singolarmente ($\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$, $\vec{Q}_M$).

2. Trovare la velocità dei tre blocchi dopo l'urto.

3. Trovare l'impulso esercitato dalle forze applicate al blocco di massa M durante l'urto.

4. Dopo l'urto il sistema dei tre blocchi continua a muoversi. Dire quali delle seguenti grandezze (o loro singole componenti) si conservano nel moto successivo all'urto giustificando il risultato: energia del sistema (E_{tot}), quantità di moto del centro di massa del sistema ($\vec{Q}_{CM}$), quantità di moto di ogni blocco singolarmente ($\vec{Q}_{1,M}$, $\vec{Q}_2$) e trovare la massima compressione della molla durante il moto successivo all'urto [Nota: la massima compressione si verifica nell'istante in cui le masse ai due estremi della molla hanno la stessa velocità].

Problema 2: Al tempo $t = 0$ un cilindro omogeneo di massa m, raggio r e superficie liscia si trova in cima ad un piano inclinato di altezza h e inclinazione ϑ (in figura si mostra una sezione di tutto il sistema in un piano verticale passane per il centro di massa Q del cilindro). Nota: si fa in modo che quando il centro di massa Q ha percorso tutta la lunghezza $d = \overline{PS}$ del piano inclinato, il cilindro non incontri alcun ostacolo. I valori numerici sono: $r = 0.1\,\text{m}$, $m = 2.6\,\text{kg}$, $h = 0.6\,\text{m}$, $\vartheta = \pi/6$.



1. Assumiamo dapprima che il piano inclinato sia liscio. Il cilindro viene rilasciato da fermo e con velocità angolare nulla attorno al suo asse simmetria a (a passa per il centro di massa ed è perpendicolare al foglio). Calcolare la velocità v_1 del centro di massa del cilindro quando esso arriva alla base del piano inclinato e darne il valore numerico.

2. Assumiamo ora che il piano inclinato abbia un coefficiente di attrito statico sufficiente per causare un moto di puro rotolamento del cilindro. Calcolare l'accelerazione angolare del cilindro e l'accelerazione lineare del suo contro di massa in queste condizioni e darne il valore numerico.

3. Il cilindro viene rilasciato da fermo con velocità angolare nulla e, trovandosi nelle condizioni del caso precedente, compie un moto di puro rotolamento. Calcolare la velocità lineare v_2 del centro di massa del cilindro quando esso arriva alla base del piano inclinato e la sua velocità angolare di rotazione ω_2 nella stessa posizione. Darne i valori numerici. [NOTA: si consiglia di usare una legge di conservazione]

4. Supponiamo infine di avere un moto di puro rotolamento come nel caso 3, ma soltanto fino a metà della lunghezza del piano inclinato, pari a $d/2$. Nella restante metà il piano inclinato è liscio, e il cilindro continua il suo moto indisturbato. Calcolare la velocità lineare del centro di massa del cilindro v_f, e la sua velocità angolare di rotazione ω_f attorno all'asse a quando il centro di massa Q ha percorso tutta la lunghezza d del piano inclinato. Darne i valori numerici.

Soluzione del problema 1

1. E_{tot} non si conserva perchè l'urto è anelastico

   $\vec{Q}_{CM}$ si conserva perchè la somma delle forze esterne agenti sul sistema (la gravità e la reazione normale del piano) è nulla.

   $\vec{Q}_1$ non si conserva perchè considerando il sistema composto solamente dalla massa m_1 le forze che agiscono su di essa durante l'urto sono forze esterne non nulle.

   $\vec{Q}_2$ si conserva (era ferma e resta ferma) perchè non interessata direttamente all'urto. La forza elastica della molla non è impulsiva, ma comincia ad agire seguendo la legge di Hook mano a mano che la molla comincia a comprimersi nel moto successivo all'urto.

   $\vec{Q}_M$ non si conserva perchè, analogamente al caso della massa m_1, se consideriamo il sistema composto solamente dalla massa M le forze esterne che agiscono su di essa durante l'urto sono forze esterne non nulle.

2. Utilizzo la conservazione di $\vec{Q}_{CM}$ per trovare la velocità delle due masse (m_1 ed M) attaccate insieme dopo l'urto. Dal momento che il moto si svolge in una sola dimensione considero l'asse x orizzontale diretto verso destra e scrivo le equazioni delle sole componenti x:

   $$Mv_0 = (m_1 + M)v_{1,M}$$

   Quindi

   $$v_{1,M} = \frac{M}{(m_1 + M)} v_0 = 0.33\,\mathrm{m/s}$$

3. L'impulso subito dalla massa M è pari alla variazione della sua quantità di moto, per cui:

   $$\vec{\mathcal{J}} = \vec{Q}_{M,fin} - \vec{Q}_{M,in} = M(v_{1,M} - v_0)\ \hat{x} = (-0.17\,\mathrm{kg\,m/s})\,\hat{\mathrm{x}}$$

   Il segno negativo è significativo e indica che questo impulso è opposto alla velocità.

4. E_{tot} si conserva perchè nel moto successivo agiscono solo forze conservative (la forza elastica) o a lavoro nullo (la forza di gravità e la reazione normale del piano).

   $\vec{Q}_{CM}$ si conserva perchè la somma delle forze esterne agenti sul sistema (la gravità e la reazione normale del piano) è nulla.

   $\vec{Q}_{1,M}$ non si conserva perchè sul sistema composto solo dalla massa $m_1 + M$ agisce una forza esterna non nulla che è la forza elastica.

   $\vec{Q}_2$ non si conserva perchè anche sul sistema composto solamente dalla massa m_2 agisce la forza elastica.

   Chiamiamo v_f la velocià finale delle due masse. Per trovare questa velocità e la massima compressione della molla utilizziamo le due leggi di conservazione appena identificate:

   $$\begin{cases} \frac{1}{2}(m+M)v_{1,M}^2 & = \frac{1}{2}(m+m+M)v_f^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2 \\ (m+M)v_{1,M} & = (m+m+M)v_f \end{cases} \tag{1}$$

   Dalla seconda di queste equazioni ricaviamo:

   $$v_f = \frac{(M+m)}{(M+2m)} v_{1,M}$$

   Sostituisco questa relazione nell'equazione di conservazione dell'energia:

   $$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}(M+m)v_{1,M}^2 - \frac{1}{2}(M+2m)\frac{(M+m)^2}{(M+2m)^2}v_{1,M}^2$$

   $$k\Delta x^2 = (M+m)v_{1,M}^2 \left[1 - \frac{(M+m)}{(M+2m)}\right]$$

   $$\Delta x = \sqrt{\frac{m(M+m)v_{1,M}^2}{k(M+2m)}} = \sqrt{\frac{mM^2}{k(M+2m)(M+m)}}\ v_0 = 0.02\,\mathrm{m}$$

Soluzione del problema 2

1. Dal momento che il piano inclinato è liscio, il cilindro è sottoposto alla sola forza di gravità e alla reazione normale del piano, per questo non ruota intorno al suo centro di massa, ma compie invece un moto di pura traslazione. Utilizziamo la conservazione dell'energia tra il suo valore E_i all'istante iniziale e quello all'istante finale E_f (prendiamo come livello zero dell'energia potenziale gravitazionale la base del piano inclinato):

$$E_i = mg(h + r\cos\vartheta)$$

$$E_f = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgr\cos\vartheta$$

$$E_i = E_f \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gh}$$

$v_1 = 3.43\,\mathrm{m/s} = 12.35\,\mathrm{km/h}$

In alternativa si poteva prendere lo zero dell'energia potenziale alla quota del centro del cilindro quando questo si trova alla base del piano inclinato. In questo modo le equazioni si semplificano perché nelle espressioni dell'energia iniziale e finale non compare il termine $mgr\cos\vartheta$. Il risultato finale è identico.

2. La forza di attrito statico ha un valore ignoto, ma sufficiente a far compiere al cilindro un moto di puro rotolamento. Dal momento che non conosciamo il modulo di questa forza conviene applicare la seconda equazione cardinale al punto di contatto C tra il cilindro ed il piano, così questa (e anche la reazione normale del piano) ha momento nullo. Considerando le proiezioni lungo l'asse perpendicolare al foglio si ha:

$$mgr\sin\vartheta = I_c\dot{\omega}$$

dove I_c è il momento di inerzia del cilindro rispetto ad un asse parallelo all'asse del cilindro, ma passante per il punto C di contatto. Dal teorema degli assi paralleli si ha:

$$I_c = \frac{1}{2}Mr^2 + Mr^2 = \frac{3}{2}Mr^2$$

quindi l'accelerazione angolare è:

$$\dot{\omega} = \frac{2}{3r}g\sin\vartheta = 32.7\,\mathrm{rad/s^2}$$

diretta perpendicolarmente al foglio con verso entrante, mentre l'accelerazione lineare del centro di massa è diretta lungo il piano inclinato verso il basso ed il suo modulo vale:

$$a = \dot{\omega}r = \frac{2}{3}g\sin\vartheta = 3.27\,\mathrm{m/s^2}$$

3. Usiamo la conservazione dell'energia totale tra l'istante iniziale e quello finale. Per la condizione di puro rotolamento, in ogni istante del moto del cilindro sul piano inclinato la velocità lineare del centro di massa $v(t)$ e quella angolare di rotazione attorno all'asse a $\omega(t)$ sono legate dalla relazione:

$$v(t) = \omega(t)r$$

che in particolare deve valere all'istante finale:

$$v_2 = \omega_2 r$$

$$E_i = mg(h + r\cos\vartheta)$$

$$E_f = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgr\cos\vartheta + \frac{1}{2}I_a\omega_2^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgr\cos\vartheta + \frac{1}{4}mv_2^2 = mgr\cos\vartheta + \frac{3}{4}mv_2^2$$

$$E_i = E_f \quad \Rightarrow \quad gh = \frac{3}{4}v_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2gh} = v_1\sqrt{\frac{2}{3}} < v_1$$

$$\omega_2 = \frac{v_2}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2gh}$$

$v_2 = 2.80\,\mathrm{m/s} = 10.09\,\mathrm{km/h}$

$\omega_2 = 28.01\,\mathrm{rad/s} \quad \nu_2 = 4.46\,\mathrm{Hz}$

Notiamo che la velocità finale del centro di massa del cilindro è minore che nel caso 1, perché in quel caso tutta l'energia potenziale iniziale del cilindro si trasformava in energia cinetica del suo centro di massa, mentre in questo caso una parte di essa si trasforma in energia di rotazione attorno all'asse a.

4. Con lo stesso calcolo fatto nel caso precedente applicato alla prima metà del percorso otteniamo la velocità lineare $v_{d/2}$ di Q e quella angolare di rotazione del cilindro attorno all'asse a, $\omega_{d/2}$, a metà del percorso, che useremo come condizioni iniziali per lo studio del moto nella restante metà liscia del piano. Abbiamo:

$$v_{d/2} = \sqrt{\frac{4}{3}g\frac{h}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}gh}$$

$$\omega_{d/2} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2}{3}gh}$$

Quando il cilindro arriva nella parte liscia del piano inclinato la velocità angolare di rotazione attorno all'asse a non cambia più. Abbiamo:

$$E_{d/2} = mg(\frac{h}{2} + r\cos\vartheta) + \frac{1}{2}mv_{d/2}^2 + \frac{1}{2}I_a\omega_{d/2}^2$$

$$E_f = mgr\cos\vartheta + \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I_a\omega_{d/2}^2$$

$$E_i = E_f \quad\Rightarrow\quad gh\frac{1}{2} + gh\frac{1}{3} = \frac{1}{2}v_f^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{5}{6}gh = \frac{1}{2}v_f^2 \quad\Rightarrow\quad v_f = \sqrt{\frac{5}{3}gh}$$

$\omega_{d/2} = \omega_{finale} = 19.81\,\mathrm{rad/s} \quad \nu_{d/2} = \nu_{finale} = 3.15\,\mathrm{Hz}$

$v_f = 3.13\,\mathrm{m/s} = 11.28\,\mathrm{km/h}$.