Nome	*Cognome*	*Numero di matricola*	*Coordinata posizione*

Quarto compito di Fisica Generale 1 + Esercitazioni, a.a. 2017-2018 – 13 Settembre 2018

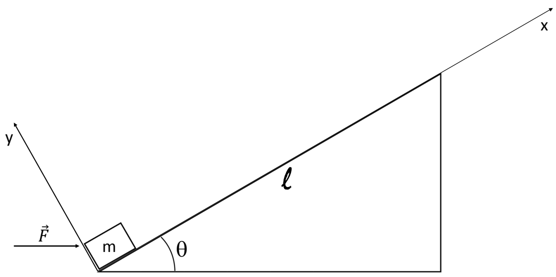
==

Premesse da leggere molto attentamente prima di cominciare:

- In ogni riquadro si deve scrivere per la grandezza richiesta la formula matematica seguita dal suo valore numerico a partire dai dati forniti per tutte, o anche solo per alcune, delle grandezze fisiche coinvolte. Il procedimento per arrivare alla formula finale va scritto nei fogli protocollo distribuiti specificando la numerazione data nel testo. Se il procedimento non è riportato e/o non è coerente con la formula e col valore numerico scritti nel riquadro, il risultato viene considerato nullo.
- Si richiede di usare sempre il sistema di unità di misura internazionale SI. I valori numerici vanno scritti usando le potenze del 10 e si richiede (salvo casi particolari che verranno segnalati) di riportare solo 2 cifre significative, facendo il calcolo complessivo e arrotondandolo solo alla fine.
- Si consegnano il foglio del testo, debitamente compilato, e almeno uno, o più, fogli protocollo a scelta individuale. La coordinate della posizione occupata in aula durante il compito viene fornita dalla docente e serve ad individuare compiti tra loro copiati, che verranno annullati.
- Dove richiesto, per l'accelerazione locale di gravità si usi: $g = 9.81\,\mathrm{ms}^{-2}$

==

Problema 1: Un blocco di massa m si trova su un piano di lunghezza ℓ inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Fra il blocco e il piano è presente attrito con coefficiente dinamico μ_D. Sul blocco, che è inizialmente fermo alla base del piano, agisce una forza orizzontale costante $\vec{F}$ come disegnato in figura. Siano $m = 4.8\text{kg}$, $\mu_D = 0.1$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ e $\ell = 50cm$.



1. Sapendo che dalla base alla sommità del piano la forza $\vec{F}$ compie un lavoro $\mathscr{L}_F = 20\text{J}$ trovare il modulo della forza $\vec{F}$.

2. Trovare l'istante t_f in cui il blocco raggiunge la sommità del piano inclinato.

3. Si calcoli il lavoro totale fatto da tutte le forze diverse da $\vec{F}$ agenti sul blocco fino alla sommità del piano inclinato.

4. Una volta raggiunta la sommità del piano inclinato, il blocco esce dal piano e continua il suo moto sotto l'azione della sola forza di gravità. Trovare la velocità con cui tocca di nuovo il suolo.

Problema 2:

Una molecola biatomica è costituita da due atomi di uguale massa m che si muovono in una sola dimensione con una energia potenziale $U(x) = \frac{\alpha_1}{2x^2} - \frac{\alpha_2}{x}$ dove x è la loro distanza relativa e le costanti α_1, α_2 sono entrambe positive. La molecola ha una configurazione di equilibrio stabile, con gli atomi fermi a distanza x_{eq}, che deve corrispondere ad un minimo dell'energia potenziale.

1. Scrivete le dimensioni fisiche delle costanti α_1 ed α_2 e calcolate x_{eq} in funzione di esse.

2. Scrivete l'energia potenziale $U(x_{eq})$ e l'energia totale $E(x_{eq})$ della molecola all'equilibrio ipotizzando che gli atomi siano fermi ($E(x_{eq})$ è detta anche energia di legame della molecola).

Una molecola biatomica assorbe ed emette energia ad una precisa frequenza, indicando con ciò che gli atomi "vibrano" a quella frequenza, cioè la molecola si comporta come un oscillatore armonico.

3. Considerate l'energia potenziale $U(x)$ per x molto vicino alla posizione di equilibrio x_{eq} (cioè vicino a $x - x_{eq} = 0$) e sviluppatela in serie di Taylor fino al termine in $(x - x_{eq})^2$. Se ponete $U(x_{eq}) = 0$, cioè se prendete come energia potenziale di riferimento quella corrispondente all'equilibrio, troverete l'energia potenziale di un oscillatore armonico. Calcolate la costante elastica k di questo oscillatore in funzione delle costanti α_1 ed α_2.

4. Date k e la massa m di ciascun atomo, scrivete la frequenza $\nu = \omega/2\pi$ di oscillazione della molecola. Sapendo che $m = 2 \times 10^{-26}$ kg, e che la molecola assorbe ed emette radiazione alla frequenza $\nu = 7 \times 10^{13}$ Hz, calcolate il valore numerico della costante elastica k con cui sono accoppiati i due atomi di questa molecola biatomica omonucleare e verificatene le dimensioni fisiche.

Soluzione del problema 1

1. Prendiamo un sistema di assi cartesiani x, y come in figura. Il lavoro della forza $\vec{F}$ è dato da $\mathscr{L}_F = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = F\ell\cos\theta$. Quindi
$$F = \frac{\mathscr{L}_F}{\ell\cos\theta} = 46.19\text{N}$$

2. Oltre alla forza $\vec{F}$ sul blocco agiscono anche la forza di gravità $\vec{F}_g = m\vec{g}$ diretta verticalmente verso il basso, la forza di attrito dinamico $\vec{F}_D$ e la reazione normale del piano $\vec{N}$. Dal primo principio della meccanica scriviamo:
$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_g + \vec{F}_D + \vec{N}$$
Proiettando questa equazione sui due assi otteniamo il seguente sistema:
$$\begin{cases} ma_x &= F\cos\theta - mg\sin\theta - F_D \\ ma_y &= -F\sin\theta - mg\cos\theta + N \end{cases}$$
Lungo l'asse y non c'è moto, quindi $a_y = 0$. Dall'equazione lungo y ricaviamo la reazione normale
$$N = F\sin\theta + mg\cos\theta$$
La forza di attrito dinamico è diretta lungo il piano inclinato, è opposta allo spostamento ed il suo modulo vale $F_D = \mu_D N$. Nel nostro caso
$$F_D = \mu_D(F\sin\theta + mg\cos\theta)$$
In conclusione
$$a_x = \frac{F}{m}\cos\theta - (g\sin\theta + \mu_D\frac{N}{m}) = \frac{F}{m}\cos\theta - g\sin\theta - \mu_D(\frac{F}{m}\sin\theta + g\cos\theta) = \frac{F}{m}(\cos\theta - \mu_D\sin\theta) - g(\sin\theta + \mu_D\cos\theta)$$
Dal momento che l'accelerazione è costante, il blocco compie un moto uniformemente accelerato partendo fermo dall'origine degli assi, quindi la legge oraria è:
$$x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{F}{m}(\cos\theta - \mu_D\sin\theta) - g(\sin\theta + \mu_D\cos\theta)\right]t^2$$
L'istante cercato è quello in cui il blocco ha percorso uno spazio ℓ:
$$t_f = \sqrt{\frac{2\ell}{a_x}} = \sqrt{\frac{2\ell}{\frac{F}{m}(\cos\theta - \mu_D\sin\theta) - g(\sin\theta + \mu_D\cos\theta)}} = 0.69\text{s}$$

3. La forza di gravità compie un lavoro
$$\mathscr{L}_{F_g} = \int_i^f \vec{F}_g \cdot d\vec{s} = -mg\ell\sin\theta$$
Il lavoro della forza di attrito vale
$$\mathscr{L}_{F_D} = -\mu_D\ell(F\sin\theta + mg\cos\theta)$$
Il lavoro della reazione normale del piano è, invece, nullo perchè questa forza è perpendicolare allo spostamento. Si noti che sia il lavoro della gravità che quello della forza di attrito sono negativi, mentre l'unico lavoro positivo è quello della forza $\vec{F}$.
$$\mathscr{L}_{F_g} + \mathscr{L}_{F_D} = -14.97\,\text{J}$$

4. La velocità v_ℓ con cui il blocco raggiunge la sommità del piano inclinato la possiamo ottenere sapendo (vedi punto 2) che il moto lungo il piano è un moto uniformemente accelerato con accelerazione a_x e conoscendo il tempo t_f impiegato per percorrerlo tutto:

$$v_\ell = a_x t_f$$

Oppure possiamo usare il teorema delle forze vive:

$$\frac{1}{2} m v_\ell^2 = \mathscr{L}_F + \mathscr{L}_{F_g} + \mathscr{L}_{F_D}$$

da cui

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\mathscr{L}_F + \mathscr{L}_{F_g} + \mathscr{L}_{F_D}\right)}$$

In entrambi i casi troviamo lo stesso valore numerico:

$$v_\ell = 1.45\,\mathrm{ms}^{-1}$$

Una volta lasciato il piano inclinato il moto del blocco sarà di tipo parabolico sottoposto solamente alla forza di gravità. Per trovare la velocità con cui tocca di nuovo terra si potrebbero integrare le equazioni del moto, ma è più conveniente imporre la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2} m v_\ell^2 + m g \ell sin\theta = \frac{1}{2} m v_f^2$$

Da cui

$$v_f = \sqrt{v_\ell^2 + 2 g \ell sin\theta} = \sqrt{\left[\frac{2}{m}\left(\mathscr{L}_F + \mathscr{L}_{F_g} + \mathscr{L}_{F_D}\right) + 2 g \ell sin\theta\right]} = 2.65\,\mathrm{m/s}$$

Soluzione del problema 2

1. Sappiamo che $U(x)$ è un'energia:
   $[U(x)] = [\mathrm{J}] = [\mathrm{kg}][\mathrm{m}]^2[\mathrm{s}]^{-2}$
   quindi:
   $[\alpha_1] = [\mathrm{J}][\mathrm{m}]^2 = [\mathrm{kg}][\mathrm{m}]^4[\mathrm{s}]^{-2}$
   $[\alpha_2] = [\mathrm{J}][\mathrm{m}] = [\mathrm{kg}][\mathrm{m}]^3[\mathrm{s}]^{-2}$.

   Per calcolare x_{eq} dobbiamo trovare il minimo dell'energia potenziale, quindi dobbiamo annullare la sua derivata prima:
   $$\frac{dU}{dx}\Big|_{x=x_{eq}} = -\frac{\alpha_1}{x_{eq}^3} + \frac{\alpha_2}{x_{eq}^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{eq} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$
   e la x_{eq} trovata è correttamente una lunghezza.

2. All'equilibrio l'energia potenziale vale:
   $$U(x_{eq}) = \frac{\alpha_1\alpha_2^2}{2\alpha_1^2} - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} = -\frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1}$$
   Trattandosi di un punto di equilibrio, gli atomi sono fermi quindi la loro energia cinetica è nulla e perciò
   $$E(eq) = U(x_{eq})$$
   cioè, l'energia di legame della molecola è uguale alla sua energia potenziale all'equilibrio (cioè al minimo dell'energia potenziale, che è negativo)

3. Lo sviluppo in serie di Taylor dell'energia potenziale nelle vicinanze della posizione di equilibrio fino al termine quadratico è:
   $$U(x - x_{eq}) \simeq U(x_{eq}) + \frac{dU}{dx}\Big|_{x=x_{eq}}(x - x_{eq}) + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x=x_{eq}}(x - x_{eq})^2 \simeq$$
   $$\simeq U(x_{eq}) + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x=x_{eq}}(x - x_{eq})^2$$
   dove abbiamo usato il fatto che $\frac{dU}{dx}\Big|_{x=x_{eq}} = 0$, dato che la posizione di equilibrio è un punto di minimo dell'energia potenziale.
   Ora, poiché l'energia potenziale è sempre la differenza rispetto ad un valore di riferimento che poniamo a zero, scegliamo per questo valore $U(x_{eq})$, che pertanto poniamo uguale a zero, ottenendo per l'energia potenziale della molecola nelle immediate vicinanze della posizione di equilibrio l'espressione:
   $$U(x - x_{eq}) \simeq \frac{1}{2}\frac{\alpha_2^4}{\alpha_1^3}(x - x_{eq})^2$$
   che è l'energia potenziale di un oscillatore armonico con costante elastica:
   $$k = \frac{\alpha_2^4}{\alpha_1^3}$$

4. Trattandosi di un oscillatore con due masse m_1 ed m_2 e costante elastica k, sappiamo che la sua frequenza di oscillazione è $\omega = \sqrt{k/\mu}$, dove $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ è la massa ridotta. Nel caso in questione in cui le masse sono uguali si ha $\mu = m/2$ e quindi:
   $$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}$$
   da cui:
   $$k = \frac{m}{2}\omega^2 = \frac{m}{2}4\pi^2\nu^2 = 1.93 \times 10^3\,\mathrm{kg\,s^{-2}} = 1.93 \times 10^3\,\mathrm{N/m}$$