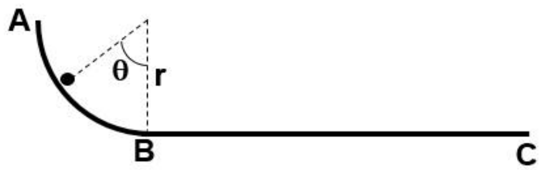
Nome	*Cognome*	*Numero di matricola*	*Coordinata*

Quinto compito di Fisica Generale 1 + Esercitazioni, a.a. 2017-2018 – 10 Gennaio 2019

Premesse da leggere molto attentamente prima di cominciare:

- In ogni riquadro si deve scrivere per la grandezza richiesta la formula matematica seguita dal suo valore numerico a partire dai dati forniti per tutte, o anche solo per alcune, delle grandezze fisiche coinvolte. Il procedimento per arrivare alla formula finale va scritto nei fogli protocollo distribuiti specificando la numerazione data nel testo. Se il procedimento non è riportato e/o non è coerente con la formula e col valore numerico scritti nel riquadro, il risultato viene considerato nullo.
- Si richiede di usare sempre il sistema di unità di misura internazionale SI. I valori numerici vanno scritti usando le potenze del 10 e si richiede (salvo casi particolari che verranno segnalati) di riportare solo 2 cifre significative, facendo il calcolo complessivo e arrotondandolo solo alla fine.
- Si consegnano il foglio del testo, debitamente compilato, e almeno uno, o più, fogli protocollo a scelta individuale. La coordinate della posizione occupata in aula durante il compito viene fornita dalla docente e serve ad individuare compiti tra loro copiati, che verranno annullati.
- Dove richiesto, per l'accelerazione locale di gravità si usi: $g = 9.81\,\mathrm{ms}^{-2}$.

Problema 1: Uno sciatore di massa $m = 80\,\mathrm{kg}$, schematizzabile come un punto materiale ai fini di questo problema, parte con velocità nulla dall'estremità A di una pista da sci AB priva di attrito con profilo circolare di raggio $r = 50\,\mathrm{m}$. In figura si mostra la situazione quando lo sciatore si trova ad un generico angolo θ dal punto B. Si trascuri la resistenza dell'aria.



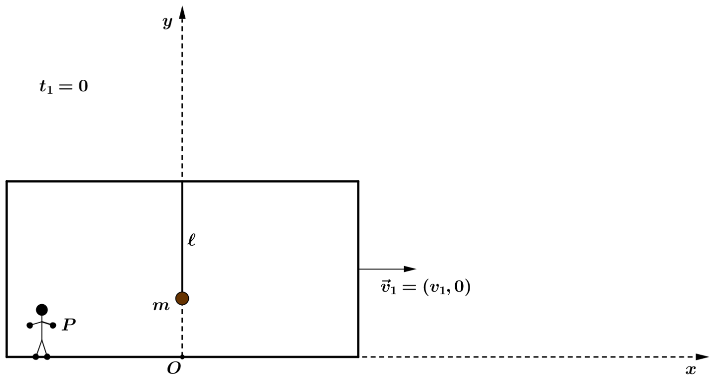
1. Scrivere in funzione dell'angolo θ la velocità dello sciatore nel tratto AB e darne il valore numerico nel punto B.

2. Scrivere in funzione dell'angolo θ il modulo della reazione N della pista sullo sciatore nel tratto AB.

3. Una volta raggiunto il punto B, lo sciatore continua a scivolare su un tratto orizzontale in cui, però, è presente un coefficiente di attrito $\mu_D = 0.05$ e si ferma nel punto C. Trovare la distanza BC e calcolarne il valore numerico.

4. Trovare il lavoro fatto dalla forza di attrito nel tratto BC e calcolarne il valore numerico.

Problema 2: Una massa puntiforme $m = 2\,\mathrm{Kg}$ è collegata ad un filo inestensibile di lunghezza $\ell = 50\,\mathrm{cm}$ formando un pendolo semplice appeso al soffitto di un carrello. Al tempo $t_1 = 0\,\mathrm{s}$ il pendolo si trova in posizione verticale, che coincide con l'asse y di un sistema di assi fisso ed inerziale rispetto al quale il carrello si muove senza attrito con velocità costante $\vec{v}_1$ lungo l'asse x (vedi figura). Anche per il pendolo si può trascurare ogni forma di attrito.



1. Tra il tempo t_1 e il tempo $t_2 > t_1$ il carrello si muove con accelerazione costante $\vec{a} = (a, 0)$. Sapendo che $v_1 = 10\,\mathrm{ms}^{-1}$, che $v(t_2) = v_2 = 25\,\mathrm{ms}^{-1}$ e che nella nuova posizione di equilibrio il pendolo forma un angolo $\alpha_2 = 10°$ con l'asse verticale calcolare t_2 e darne il valore numerico. Indicare da quale lato della verticale passante per il punto si sospensione si trova l'angolo α_2.

2. Calcolare il valore di a e darne il valore numerico.

3. Per $t > t_2$ l'accelerazione del carrello si azzera istantaneamente ed esso si muove con velocità costante $\vec{v}_2 = (v_2, 0) = (25\,\mathrm{ms}^{-1}, 0)$. Descrivere il moto del pendolo come visto dall'osservatore P dentro il carrello e in particolare trovare la nuova posizione di equilibrio del pendolo e la velocità che ha quando passa per tale posizione.

4. Nella situazione iniziale del punto 3, cioè quando il pendolo si trova fermo in $\alpha_2 = 10°$, ma in assenza di accelerazione del carrello, l'osservatore spinge la massa m lungo la sua traiettoria facendole acquistare (istantaneamente) una energia cinetica $T_i = 4.2\,\mathrm{J}$. Calcolare l'angolo massimo α_{max} dalla verticale che la massa raggiungerà in seguito a questa spinta.

Soluzione del problema 1

1. La forza peso è l'unica forza che compie lavoro, quindi possiamo usare il teorema delle forze vive:

$$mg\Delta h = \frac{1}{2}mv(\theta)^2$$

con $\Delta h = r\cos\theta$, da cui:

$$v(\theta) = \sqrt{2gr\cos\theta}$$

Nel punto B si ha $\theta = 0$ e la velocità è

$$v_B = \sqrt{2gr} = 31.3\,\mathrm{ms}^{-1} = 113\,\mathrm{km/h}$$

2. Ad un generico angolo θ sullo sciatore sono applicate due sole forze: la forza peso e la reazione normale della pista. Scriviamo la prima equazione cardinale in direzione radiale:

$$mg\cos\theta - N = -\frac{mv^2}{r}$$

da cui, inserendo il valore della velocità trovato al punto precedente, otteniamo:

$$N = 3mg\cos\theta$$

3. Lo sciatore arriva in B con velocità $v_B = \sqrt{2gr}$, poi continua a muoversi di moto rettilineo uniformemente decelerato sotto l'azione della sola forza di attrito dinamico di modulo $F_D = \mu_D mg$, quindi la sua accelerazione vale $a = \mu_D g$. Possiamo allora scrivere:

$$v(t) = v_B - at$$

quindi lo sciatore si ferma al tempo $t_f = \frac{v_B}{a}$.
Lo spazio percorso fino a quell'istante è allora:

$$\bar{B}C = v_B t_f - \frac{1}{2}at_f^2 = \frac{v_B^2}{a} - \frac{v_B^2}{2a} = \frac{v_B^2}{2a} = \frac{2gr}{2\mu_D g} = \frac{r}{\mu_D} = 1000\,\mathrm{m}$$

4. Il lavoro fatto dalla forza di attrito dinamico è pari alla variazione di energia cinetica, quindi:

$$\mathscr{L}_D = -\frac{1}{2}mv_B^2 = -mgr = -3.92\times 10^4\,\mathrm{J}$$

Dal momento che nel primo tratto l'energia si conserva questa è anche uguale alla variazione di energia potenziale dall'inizio alla fine del moto.

Soluzione del problema 2

1.
$$v_2 = v_1 + at_2$$
$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2}$$
La massa del pendolo si trova in un riferimento non inerziale (accelerato) con accelerazione $\vec{a} = (a, 0)$, quindi è soggetta ad una accelerazione apparente $-\vec{a} = (-a, 0)$ oltre alla accelerazione locale di gravità $\vec{g} = (0, -g)$. La sua accelerazione totale è data dal vettore $\vec{a}_{tot} = (-a, -g)$ e la massa sarà in equilibrio quando questa accelerazione è bilanciata dalla tensione del filo, il che succede quando il filo si trova indietro rispetto alla verticale di un angolo α_2 tale che
$$\tan \alpha_2 = \frac{a}{g} = \frac{v_2 - v_1}{gt_2} \tag{1}$$
da cui:
$$t_2 = \frac{v_2 - v_1}{g \tan \alpha_2} = \frac{(25 - 10) m\, s^{-1}}{9.81 m\, s^{-2} \times \tan(10 \times \pi/180)} = 8.67\,\mathrm{s}$$
.
Rispetto alla verticale passante per il punto si sospensione l'angolo α_2 si trova dallo stesso lato dell'osservatore P.

2. Dalla (1) si ottiene immediatamente:
$$a = g \tan \alpha_2 = 1.73\,\mathrm{ms}^{-2}$$

3. Per $t > t_2$ il carrello riprende a muoversi con velocità costante. Il pendolo si trova quindi di un riferimento inerziale, partendo dalla posizione di equilibrio descritta ai punti precedenti, cioè con velocità nulla (rispetto al carrello) ed elongazione massima (massima deviazione dalla verticale) α_2, soggetto alla sola accelerazione locale di gravità. Per la conservazione dell'energia (avendo trascurato ogni forma di attrito), il pendolo oscillerà attorno alla verticale fino ad una elongazione massima α_2 sia da un lato che dall'altro. Si noti che trattandosi di una ampiezza di oscillazione non piccolissima, il periodo di tali oscillazioni è dato solo approssimativamente dalla formula $P = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ che è valida solo per le piccole oscillazioni. In questi casi si tratta sempre di valutare la precisione con la quale si richiede di conoscere tale periodo. La nuova posizione di equilibrio è quella in cui $\alpha = 0°$. In questo moto si conserva l'energia, quindi
$$mgl(1 - \cos \alpha_2) = \frac{1}{2} mv^2 \ ,$$
da cui:
$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_2)} = 0.39\,\mathrm{ms}^{-1}$$

4. Nella situazione iniziale il pendolo si trova alla massima elongazione α_2 dal lato dell'osservatore, e questi gli ha impresso una energia cinetica T_i. L'energia totale in questo caso è:
$$E_i = mgl(1 - \cos \alpha_2) + T_i$$
Quando il pendolo raggiunge la massima elongazione α_{max} dal lato opposto della verticale la sua energia cinetica sarà per definizione nulla, e tutta l'energia sarà data dalla energia potenziale gravitazionale:
$$E_f = mgl(1 - \cos \alpha_{max})$$
Usando la conservazione dell'energia otteniamo:
$$\cos \alpha_{max} = \cos \alpha_2 - \frac{T_i}{mg\ell}$$
e con i numeri dati risulta $\alpha_{max} = 56.2°$