Nome	*Cognome*	*Numero di matricola*	*Coordinata*

Sesto compito di Fisica Generale 1 + Esercitazioni, a.a. 2017-2018 – 29 Gennaio 2019

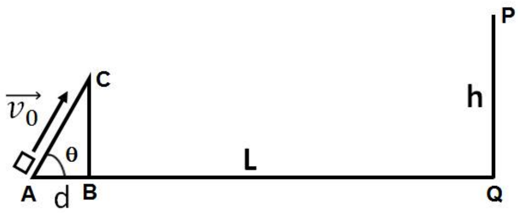
==

Premesse da leggere molto attentamente prima di cominciare:

- In ogni riquadro si deve scrivere per la grandezza richiesta la formula matematica seguita dal suo valore numerico a partire dai dati forniti per tutte, o anche solo per alcune, delle grandezze fisiche coinvolte. Il procedimento per arrivare alla formula finale va scritto nei fogli protocollo distribuiti specificando la numerazione data nel testo. Se il procedimento non è riportato e/o non è coerente con la formula e col valore numerico scritti nel riquadro, il risultato viene considerato nullo.
- Si richiede di usare sempre il sistema di unità di misura internazionale SI. I valori numerici vanno scritti usando le potenze del 10 e si richiede (salvo casi particolari che verranno segnalati) di riportare solo 2 cifre significative, facendo il calcolo complessivo e arrotondandolo solo alla fine.
- Si consegnano il foglio del testo, debitamente compilato, e almeno uno, o più, fogli protocollo a scelta individuale. La coordinate della posizione occupata in aula durante il compito viene fornita dalla docente e serve ad individuare compiti tra loro copiati, che verranno annullati.
- Dove richiesto, per l'accelerazione locale di gravità si usi: $g = 9.81\,\mathrm{ms}^{-2}$.

==

Problema 1: Un corpo di massa m si trova alla base di un cuneo di lunghezza $d = \overline{AB} = 1\,\mathrm{m}$ e inclinato di un angolo $\theta = 60°$ e viene lanciato con velocità di modulo v_0 ignoto (vedi figura). Ogni forma di attrito può essere trascurata.



1. Calcolare in funzione di v_0 il modulo della velocità v_c con cui il corpo raggiunge la sommità del piano inclinato.

2. Dire che tipo di moto compie il corpo dopo aver lasciato il cuneo e trovare la massima altezza h_{max} raggiunta dal proiettile. La resistenza dell'aria si considera trascurabile.

3. Dopo aver lasciato il cuneo, il proiettile prosegue la sua traiettoria e colpisce un bersaglio posto nel punto P a distanza $L = \overline{AQ} = 100\,\mathrm{m}$ dalla base del piano inclinato e ad altezza $h = \overline{PQ} = 20\,\mathrm{m}$. Calcolare il modulo v_0 della velocità iniziale che il proiettile deve avere per colpire il bersaglio, e scriverne il valore numerico.

4. Sapendo che il proiettile ha massa $m = 1\,\mathrm{kg}$ trovare l'impulso $\vec{I}$ che è stato necessario fornirgli all'istante iniziale affinché potesse colpire il bersaglio in P e calcolate i valori numerici delle sue componenti.

Problema 2: Un'automobile, schematizzabile come un punto materiale di massa totale $M = 1000\,\mathrm{kg}$, è vincolata a muoversi a velocità di modulo costante $v = 80\,\mathrm{km/h}$ lungo una strada rappresentabile come un arco di circonferenza di raggio $r = 95\,\mathrm{m}$ e centro O che giace in un piano orizzontale.

1. Scrivete l'accelerazione $\vec{a}$ dell'auto in un riferimento fisso la cui origine si trovi nel centro O della curva. Specificate modulo, direzione e verso di questa accelerazione, e calcolatene il valore numerico.

2. In assenza di attrito tra l'auto e la strada la curva può essere percorsa solo se in ogni suo punto il manto stradale è inclinato di un angolo α rispetto al piano orizzontale. Spiegate perché, dite se il piano deve essere inclinato verso l'alto o verso il basso, calcolate il valore di α e datene il valore numerico per i valori dati. [Nota: questo accorgimento viene utilizzato in alcuni circuiti automobilistici per permettere alte velocità dei veicoli]

3. Nella vita reale le strade sono generalmente in piano, e comunque non sono progettate per avere specifiche inclinazioni nelle curve. Se il pilota usa il volante in modo che l'auto percorra la traiettoria curva data, è l'attrito statico tra le ruote e l'asfalto (di coefficiente μ_s compreso tra 0 e 1) che permette all'auto di percorrere la curva senza andare fuori strada, purché il pilota non superi la velocità massima consentita da tale coefficiente (le ruote compiono un moto di puro rotolamento). Calcolate la forza di attrito statico massima dandone modulo, direzione e verso, quindi scrivete in funzione di μ_s la velocità massima consentita sulla curva data. Nel caso di gomme e asfalto ottimali si può avere $\mu_{s1} = 0.9$, mentre con gomme lisce e nevischio sulla strada si può scendere a $\mu_{s2} = 0.1$. Calcolate il valore numerico della velocità massima che il pilota non deve superare in ciascuno dei due casi.

4. Tornate al caso senza attrito in cui la strada è stata inclinata del valore α ottimale calcolato al punto 2. Immaginate ora che l'auto percorra la stessa curva a velocità doppia, cioè $v_2 = 160\,\mathrm{km/h}$. Calcolate in questo caso l'accelerazione di cui risente il passeggero dell'auto dandone direzione, verso e valore numerico del modulo. Fate la stessa cosa nel caso in cui l'auto si muovesse con velocità $v_3 = \frac{1}{2}v = 40\,\mathrm{km/h}$.

Soluzione del problema 1

1. Imponiamo la conservazione dell'energia tra l'istante iniziale e quello in cui il corpo raggiunge la sommità del cuneo:
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgd\tan\theta + \frac{1}{2}mv_c^2$$
da cui
$$v_c = \sqrt{v_0^2 - 2gd\tan\theta}$$

2. Il corpo continua il suo moto sotto l'azione della sola accelerazione di gravità, quindi compie un moto parabolico. L'altezza massima si trova imponendo la conservazione dell'energia durante il moto, ma siccome l'energia meccanica si conservava anche nel moto precedente, possiamo imporla dall'istante iniziale fino a quando il corpo raggiunge l'altezza massima ricordandosi però che nel punto di altezza massima il corpo mantiene comunque la velocità lungo x che aveva nel punto C:
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_{max} + \frac{1}{2}m(v_c\ \cos\theta)^2 \Rightarrow h_{max} = \frac{\left(v_0^2 - (v_c\ \cos\theta)^2\right)}{2g}$$
da cui, sostituendo v_c trovata al punto precedente, otteniamo:
$$h_{max} = \frac{\left(v_0^2 - (v_0^2 - 2gd\tan\theta)\cos\theta^2\right)}{2g} = \frac{v_0^2\sin\theta^2}{2g} + d\sin\theta\cos\theta$$
In alternativa si poteva imporre la conservazione dell'energia tra l'istante in cui la massa si trova in C con velocità $\vec{v}_c = (v_{cx}, v_{cy}) = (v_c\cos\theta, v_c\sin\theta)$ e l'istante f in cui la massa raggiunge la massima altezza h_{max} da terra. Abbiamo:
$$E_i = \frac{1}{2}m(v_{cx}^2 + v_{cy}^2) + mgd\tan\theta \qquad E_f = \frac{1}{2}mv_{cx}^2 + mgh_{max}$$
e imponendo che siano uguali otteniamo:
$$h_{max} = d\tan\theta + \frac{v_c^2\sin^2\theta}{2g}$$
che usando per v_c il risultato ottenuto al punto 1 possiamo scrivere in funzione di v_0:
$$h_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g} + d\sin\theta\cos\theta$$
.

Si noti che se non ci fosse il cuneo la massa seguirebbe una traiettoria parabolica fin dall'inizio (anziché soltanto a partire dalla sommità C del cuneo). Trattandosi di due traiettorie geometricamente diverse (anche se il cuneo è liscio e non c'è nessun attrito), ci aspettiamo una diversa altezza massima $\bar{h}_{max}$ in questo caso. Per trovarla imponiamo di nuovo la conservazione dell'energia. In questo diverso caso abbiamo:
$$\frac{1}{2}m(v_{0x}^2 + v_{0y}^2) + 0 = \frac{1}{2}mv_{0x}^2 + mg\bar{h}_{max} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{h}_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$$
e infatti l'altezza massima differisce dal caso precedente che ci veniva chiesto nel testo. In particolare notiamo che in presenza del cuneo dato l'altezza massima raggiunta dal corpo dopo che ha lasciato la sua sommità è maggiore di quella che esso raggiungerebbe con la stessa $\vec{v}_0$ in assenza del cuneo.

Gli stessi risultati si sarebbero potuti ottenere in modo un po' più complicato scrivendo ed integrando le equazioni del moto.

3. Prendiamo un sistema di assi cartesiani con origine alla sommità del cuneo e scriviamo le equazioni del moto sapendo che il corpo parte con velocità $\vec{v}_0$. Nel sistema scelto il punto P ha coordinate $P = (L - d, h - d\tan\theta)$, e affinché il proiettile lo colpisca dobbiamo imporre la condizione che la traiettoria del corpo passi per esso:

$$\begin{cases} x(t) & = v_c \cos\theta\, t \\ y(t) & = v_c \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

La traiettoria si trova sostituendo la variabile t dalla prima equazione nella seconda:

$$y = x\tan\theta \; - \frac{g x^2}{2 v_c^2 \cos^2\theta}$$

.

Imponendo che questa traiettoria passi per il punto $P = (L - d, h - d\tan\theta)$ abbiamo l'equazione:

$$h - d\tan\theta = (L - d)\tan\theta \; - \frac{g(L-d)^2}{2 v_c^2 \cos^2\theta}$$

dalla quale otteniamo v_c^2:

$$v_c^2 = \frac{g(L-d)^2}{2(L\tan\theta \; - h)\cos^2\theta}$$

e quindi (per la risposta data al punto 1) anche v_0:

$$v_0 = \sqrt{2dg\tan\theta + \frac{g(L-d)^2}{2(L\tan\theta \; - h)\cos^2\theta}} = 35.9\,\mathrm{ms}^{-1}$$

4. L'impulso è dato dalla variazione di quantità di moto, per cui:

$$\vec{I} = m\vec{v}_0 = m v_0(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}) = m\sqrt{2dg\tan\theta + \frac{g(L-d)^2}{2(L\tan\theta \; - h)\cos^2\theta}}(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}) =$$

$$= (18.0\hat{x} + 31.1\hat{y})\,\mathrm{kgms}^2$$

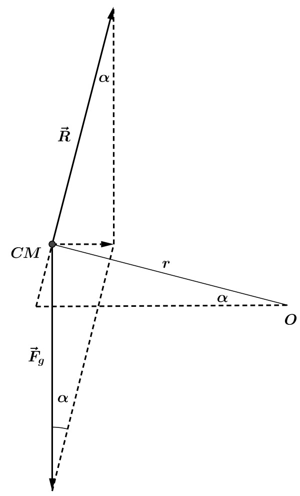
Soluzione del problema 2

1. Si tratta di un moto circolare uniforme, per cui l'auto è sottoposta ad una accelerazione centripeta di modulo pari a $a = v^2/r$. In notazione vettoriale:

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{r}$$

   $a_c = 5.20\,\mathrm{ms}^{-2}$

2. In assenza di attrito, se ogni punto della curva viene inclinato insieme al manto stradale (verso l'alto rispetto al piano orizzontale) di un angolo α la forza di reazione della strada, che è perpendicolare al piano della strada stessa, ha una componente diretta verso O che fornisce la forza centripeta richiesta affinché l'auto resti sulla curva (vedi figura). Il bilancio delle forze nelle due componenti radiale e verticale determina il valore di α necessario affinché questo accada. Abbiamo:



$$\begin{cases} 0 & = R\cos(\alpha) - Mg \\ M\frac{v^2}{r} & = R\sin(\alpha) \end{cases}$$

   e quindi:

$$\tan\alpha = \frac{v^2}{gr}$$

   Con i valori numerici dati, $\alpha = 28°$

3. Mentre la macchina curva per stare sulla traiettoria data, la forza di attrito statico è diretta verso il centro della curva, ha modulo massimo pari a $F_{as} = \mu_s Mg$, e fornisce la forza centripeta richiesta sulla curva. La velocità massima compatibile con μ_s si trova dall'equazione:

$$\mu_s Mg = M\frac{v_{max}^2}{r}$$

   da cui:

$$v_{max} = \sqrt{\mu_s gr}$$

   Si noti che essa non dipende dalla massa dell'auto, ma solo dal valore di μ_s e dal raggio di curvatura della curva. A parità di μ_s su una curva "stretta" (r piccolo) bisogna andare più piano (e la dipendenza è con la radice quadrata di r).

   Se $\mu_s = 0.9$ la curva data ($r = 95\,\mathrm{m}$) può essere percorsa al massimo a $104\,\mathrm{km/h}$, ma se le gomme sono lisce e c'è nevischio sull'asfalto si può farla al massimo a $35\,\mathrm{km/h}$.

4. Il passeggero è fermo nel sistema di riferimento non inerziale che si muove sulla curva. Egli risente quindi della accelerazione centrifuga, che è proporzionale al modulo quadro della velocità lungo la curva. Se la velocità è doppia, l'accelerazione centrifuga è 4 volte più grande, e di tutta questa accelerazione l'inclinazione ne compensa solo 1/4, quindi restano 3/4 di accelerazione centrifuga non compensata, pari a 3 volte il valore numerico calcolato al punto 1, cioè $15.6\,\mathrm{ms}^{-2}$. Se la velocità dell'auto è metà, l'accelerazione centrifuga è 4 volte minore, quindi restano 3/4 di accelerazione centripeta, cioè in modulo $15.6\,\mathrm{ms}^{-2}$ come nel caso precedente, ma di segno opposto (verso l'interno invece che verso l'esterno della curva).