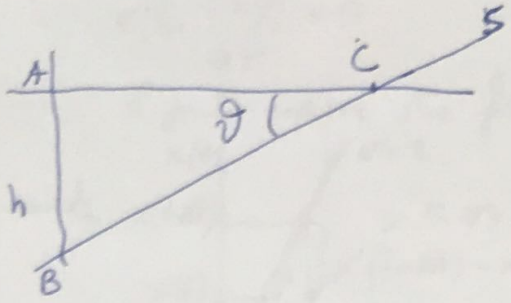
Anna Noti

FISICA 1 - Ingegneria (Braccialini) 2019

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

11-03-2019

Esercizio n. 1



$h = BC \sin\vartheta \Rightarrow BC = \frac{h}{\sin\vartheta}$

$AC = BC \cos\vartheta = h \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$

Auto A parte da A con: $v_A(0) = v_0$ e $v_A(t) = v_A(0) = v_0$
in $t=0$ in direzione AC lungo

Auto B parte da B con: $a_B(t) = kt$ in direzione BC
in $t=0$ da ferma acc.

D1: $[k]$?

D2: Quanto deve valere k affinché, partendo allo stesso istante $t=0$ le auto A & B si incontrino in C?

R1: $[k] = \left[\frac{m s^{-2}}{s}\right] = [m s^{-3}]$

R2: l'auto A arriva in C al tempo t^*: $v_0 t^* = AC$

$\rightarrow t^* = AC/v_0 = \frac{h}{v_0}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$

~~l'auto B si muove lungo la retta BC con la legge oraria~~

~~$s(t) = \int v_B(t) dt$~~ lo spazio $s(t)$ percorso dall'auto B al tempo t è:

$s(t) = \int_0^t v_B(t') dt'$

$v_B(t) = \int_0^t a_B(t') dt' = \frac{1}{2} k t^2$ $\Rightarrow s(t) = \frac{1}{6} k t^3$

Vogliamo che al tempo t^* anche l'auto B arrivi in C: $\Rightarrow$

$s(t^*) = BC$

$\rightarrow k = \frac{6\,BC}{t^{*3}}$ $\quad m s^{-3}$ ok $\quad$ deve essere $\Leftarrow \frac{1}{6} k t^{*3} \overset{!!}{=}$

$k = 6 \frac{h}{\sin\vartheta} \cdot \frac{v_0^3 \sin^2\vartheta}{h^3 \cos^3\vartheta} = 6 \frac{v_0^3}{h^2} \frac{\sin^2\vartheta}{\cos^3\vartheta}$

$\sin 30° = 1/2$
$\cos 30° = \sqrt{3}/2$

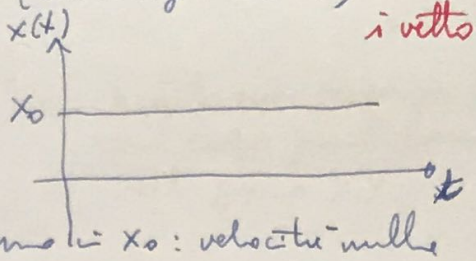
$h = 200\,m$, $v = 20\,m s^{-1}$, $\vartheta = 30° \Rightarrow k = 6 \cdot \frac{2^3 \cdot 10^3}{2^2 \cdot 10^4} \cdot \frac{2^3}{2^2 \cdot (3^{1/2})^3} = 10^{-1} \cdot 2^3 \cdot \frac{3}{3^{3/2}} = \frac{0.8}{3^{1/2}} = 0.46\ m s^{-3}$

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Legge oraria; caso semplice di moto in 1D (es. lungo asse x) ⇒ non servono i vettori

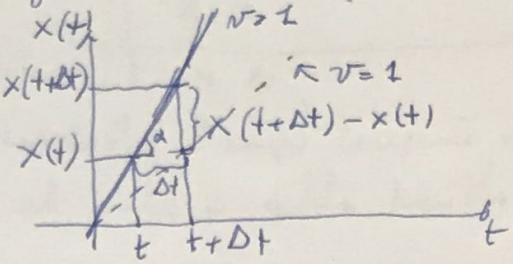
- $x(t) = x_0 \equiv$ costante

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 0$$



il punto massa sta fermo in x_0: velocità nulla

- $x(t) = vt$ $\quad v =$ costante



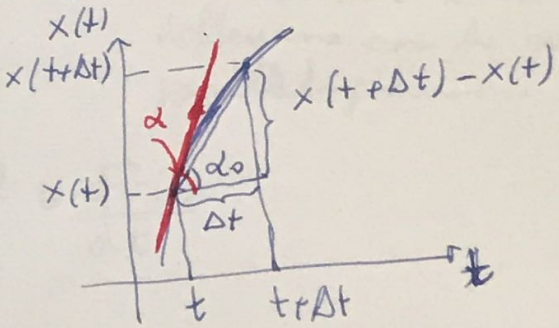
$$\langle v \rangle_{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{t + \Delta t - t} = tg\,\alpha = \frac{v\cdot(t+\Delta t) - v\cdot t}{\Delta t} = \frac{vt + v\Delta t - vt}{\Delta t} = v$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \langle v \rangle_{\Delta t} = v$$

la velocità istantanea coincide con quella media perché è costante

$x(t) = v(t)\,t$

$v(t)$ variabile nel tempo



velocità media tra t e $t+\Delta t$ →

$$\langle v \rangle_{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{t + \Delta t - t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = tg\,\alpha_0$$

velocità istantanea al tempo t →

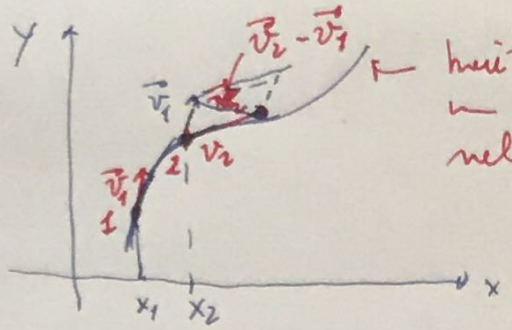
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt} = tg\,\alpha$$

Al limite per $\Delta t \to 0$ $\alpha_0 \to \alpha$ che è l'angolo che la tangente alla curva al tempo t forma con l'asse orizzontale

Geometricamente la velocità istantanea al tempo t è la tangente alla curva legge oraria a quel tempo. le dimensioni fisiche delle velocità sono corrette se si tiene conto che l'asse verticale sono metri e quello orizzontale secondi

Traiettorie (vettori) velocità e accelerazione (caso 2D)

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



← traiettoria percorsa da un corpo puntiforme nel piano x,y

la velocità è sempre tangente alla traiettoria

Il tratto dal punto 1 al punto 2 della traiettoria viene percorso nel tempo Δt:

$$\langle \vec{a} \rangle_{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$$

$\langle \vec{a} \rangle_{\Delta t}$ ← accelerazione media nel tempo Δt

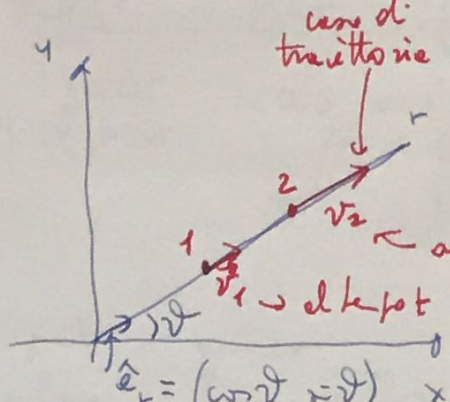
$\langle \vec{a} \rangle_{\Delta t}$ non è parallela a $\vec{v}_2$, o $\vec{v}_1$ è parallela al vettore differenza $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$

ATTENZIONE: trasportare (trasporto parallelo) uno dei vettori nella base dell'altro e POI fare la differenza con la regola del parallelogramma

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

↑ velocità istantanea al tempo t (nel nostro caso è quando il corpo si trova nel punto 1)

Nota Se la traiettoria è rettilinea la velocità (anche se cambia in modulo!) è sempre diretta lungo la stessa retta, e quindi anche l'accelerazione



← al tempo $t+\Delta t$

← al tempo t

↑ versore che indica la direzione della traiettoria (che è coincidente con la retta r)

Nota: dalla sola traiettoria non so con quale velocità essa viene percorsa! Nell'esempio di figura la velocità tra 1 e 2 aumenta

$\vec{v}_2 = v_2 \hat{e}_r \quad \vec{v}_1 = v_1 \hat{e}_r \quad \langle \vec{a} \rangle_{\Delta t} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (v_2 - v_1)\hat{e}_r$

$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$

$\vec{a} \parallel \hat{e}_r$

VETTORI

- Perché li usiamo in fisica: per rappresentare (e manipolare) grandezze fisiche che non è possibile rappresentare con un solo numero

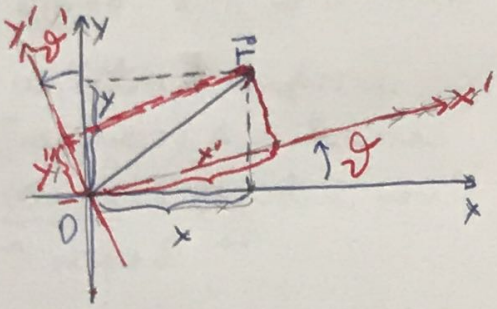
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Es. forze, accelerazioni, velocità ... : non basta conoscerne l'intensità; bisogna sapere la direzione (in cui agisce la forza, lungo cui un corpo accelera o si muove) e il verso (la forza spinge o tira? Il corpo sta accelerando o decelerando? L'auto va in avanti o fa retromarcia?)

- Vantaggi: come singole entità li posso manipolare secondo loro regole interne, senza bisogno di scomporli in componenti (cioè senza bisogno di stabilire un sistema di assi coordinati)

→ NOTA: le componenti di un vettore cambiano se scelgo assi coordinati diversi, mentre il vettore resta lo stesso

Es:



$\vec{F} = (x, y)$ componenti nel sistema di coordinate con assi x, y

$= (x', y')$ ← componenti rispetto agli assi x', y'

↑ le coordinate cartesiane componenti sono diverse nei due sistemi, ma il vettore $\vec{F}$ è lo stesso e posso trattarlo come singola entità senza preoccuparmi delle componenti

Nota: gli assi x', y' sono ruotati di un angolo ϑ rispetto ad x, y.
Allora vale che:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x' &= x\cos\vartheta - y\sin\vartheta \\ y' &= x\sin\vartheta + y\cos\vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x &= x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta \\ y &= -x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta \end{aligned}$$

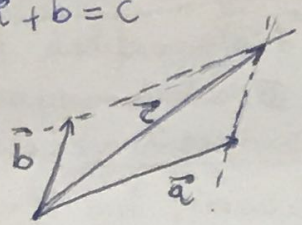
Definizione
Nota: in fisica gli angoli sono positivi se in senso antiorario e negativi se in senso orario

Come mai questa scelta che sembra contraria al senso comune?

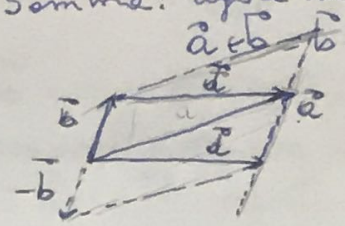
- Se possiamo trattare i vettori come entità individuali (senza riferirci alle loro componenti) dobbiamo capire il significato geometrico delle operazioni che facciamo con essi

Es: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

Somma: regola del parallelogramma



Nota: 2 vettori individuano un piano!



$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$

$\vec{a} + (-\vec{b})$

Somma e differenza sono geometricamente le due diagonali del parallelogramma

• Tra vettori si possono fare 2 tipi di prodotto: prodotto scalare (il risultato è una quantità scalare, cioè un numero, non un vettore)

&

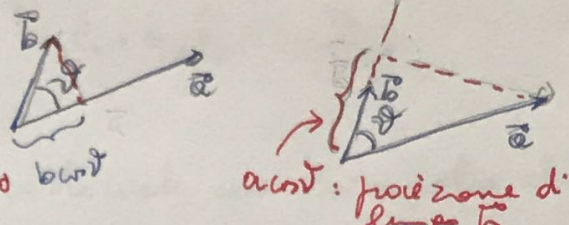
prodotto vettore (il risultato è un altro vettore)

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Invece di usare le componenti usiamo la rappresentazione geometrica

→ Prodotto scalare: $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\vartheta$

$\vec{b}\cdot\vec{a}$ (=)



proiezione di b lungo a

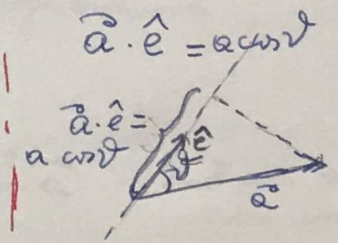
Nota: la proiezione di un vettore lungo una certa direzione è uno scalare

Es. $\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ $\quad \vec{a}\parallel\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=ab$

Nota: un vettore di lunghezza (modulo) 1 si chiama versore e si indica con ^ invece di →

geometricamente fare il prodotto scalare di un vettore 1 per un altro 2 significa prendere la proiezione del vettore 1 lungo il vettore 2 e moltiplicarla per il modulo del vettore 2.

→ Se il vettore 2 (versore) è di lunghezza unitaria, il prodotto scalare dei due è geometricamente la proiezione del vettore 2 lungo la direzione (retta) individuata dal versore 1



$\vec{a}\cdot\hat{e} = a\cos\vartheta$

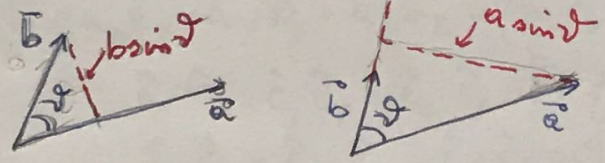
$|\hat{e}| = 1$ $\quad \hat{e}$ è un versore

$\vec{a}\cdot\hat{e}$ è la proiezione di $\vec{a}$ lungo la direzione individuata da $\hat{e}$

Prodotto vettore:

$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$

$|\vec{c}| = c = ab\sin\vartheta$



il modulo del vettore $\vec{c}$, prodotto vettore di $\vec{a}\times\vec{b}$, equivale all'altezza del triangolo rettangolo che si ottiene proiettando (ortogonalmente) un vettore sull'altro

⇓

$\vec{a}\parallel\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=0$; $\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|=ab$

$\vec{c}\perp$ piano di $\vec{a}$ e $\vec{b}$

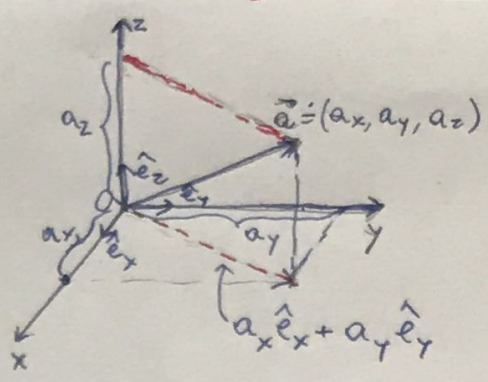
verso (CONVENZIONE!) di $\vec{a},\vec{b}$:

→ uscente dal piano se sovrapponendo $\vec{a}$ a $\vec{b}$ in verso antiorario (positivo) si spazza un angolo $< \pi$

→ entrante nel piano: altrimenti (cioè; se, sovrapponendo $\vec{a}$ a $\vec{b}$ in verso antiorario si spazza un angolo $> \pi$

... E ora facciamo le stesse operazioni usando le componenti (in $\mathbb{R}^3$):

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



$\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$: versori degli assi x, y, z

- $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$

  $\vec{a} = a_x\hat{e}_x + a_y\hat{e}_y + a_z\hat{e}_z$ ← somma vettoriale con la regola del parallelogramma

- $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

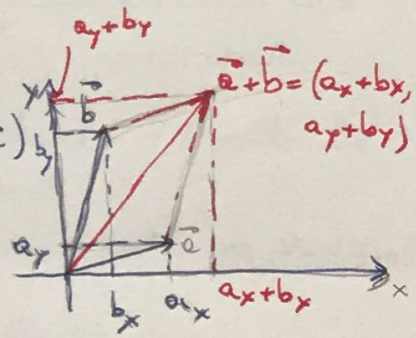
  $\vec{b} = b_x\hat{e}_x + b_y\hat{e}_y + b_z\hat{e}_z$ $\quad \hat{e}_x = (1,0,0)$ $\hat{e}_y = (0,1,0)$ $\hat{e}_z = (0,0,1)$

- **Somma e sottrazione:**

  $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) = \vec{b} + \vec{a}$

  $\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z) = -\vec{b} + \vec{a} = -(\vec{b} - \vec{a})$

  Es. nel piano ($\mathbb{R}^2$) geometricamente ritroviamo la regola del parallelogramma



- **Prodotto scalare:**

  $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_y + a_yb_y + a_zb_z = \vec{b}\cdot\vec{a}$ ← è un numero! (scalare) non un vettore

  $(a_x, a_y, a_z)\cdot(b_x, b_y, b_z)$

  $\vec{a}\cdot\vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2$ $\quad a = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

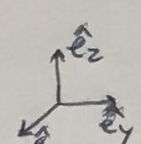
  $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{e}_x + a_y\hat{e}_y + a_z\hat{e}_z)\cdot(b_x\hat{e}_x + b_y\hat{e}_y + b_z\hat{e}_z) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

  $\hat{e}_x\cdot\hat{e}_x = \hat{e}_y\cdot\hat{e}_y = \hat{e}_z\cdot\hat{e}_z = 1$ → sono tre loro $\parallel$

  $\hat{e}_x\cdot\hat{e}_y = \hat{e}_x\cdot\hat{e}_z = \hat{e}_y\cdot\hat{e}_z = 0$ → sono tre loro $\perp$

- **Prodotto vettore:**

  $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$ $\quad \vec{c} = (\underbrace{a_xb_y - a_yb_x}_{c_x}, \underbrace{a_zb_x - a_xb_z}_{c_y}, \underbrace{a_xb_y - a_yb_x}_{c_z}) = -(\vec{b}\times\vec{a})$



$\hat{e}_x\times\hat{e}_y = \hat{e}_z$ $\quad \hat{e}_z\times\hat{e}_x = \hat{e}_y$ $\quad \hat{e}_y\times\hat{e}_z = \hat{e}_x$

Formule utili: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$ prodotto misto (è uno scalare)

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$ prodotto triplo (è un vettore)