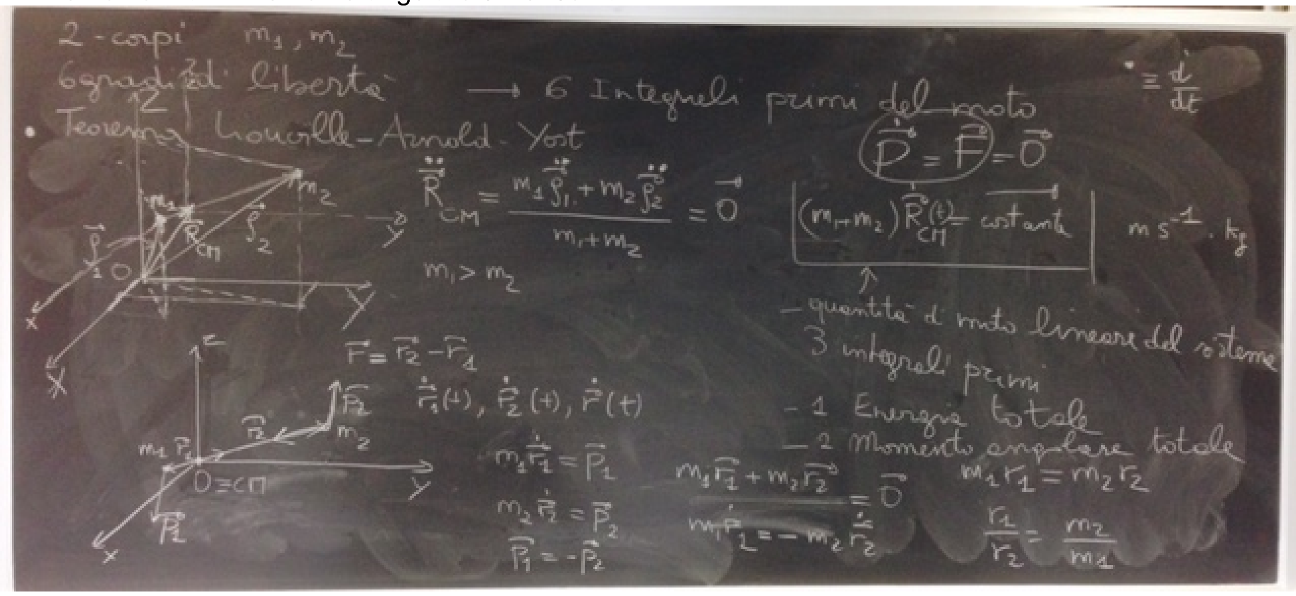
Elementi di Meccanica Celeste 2015-2016

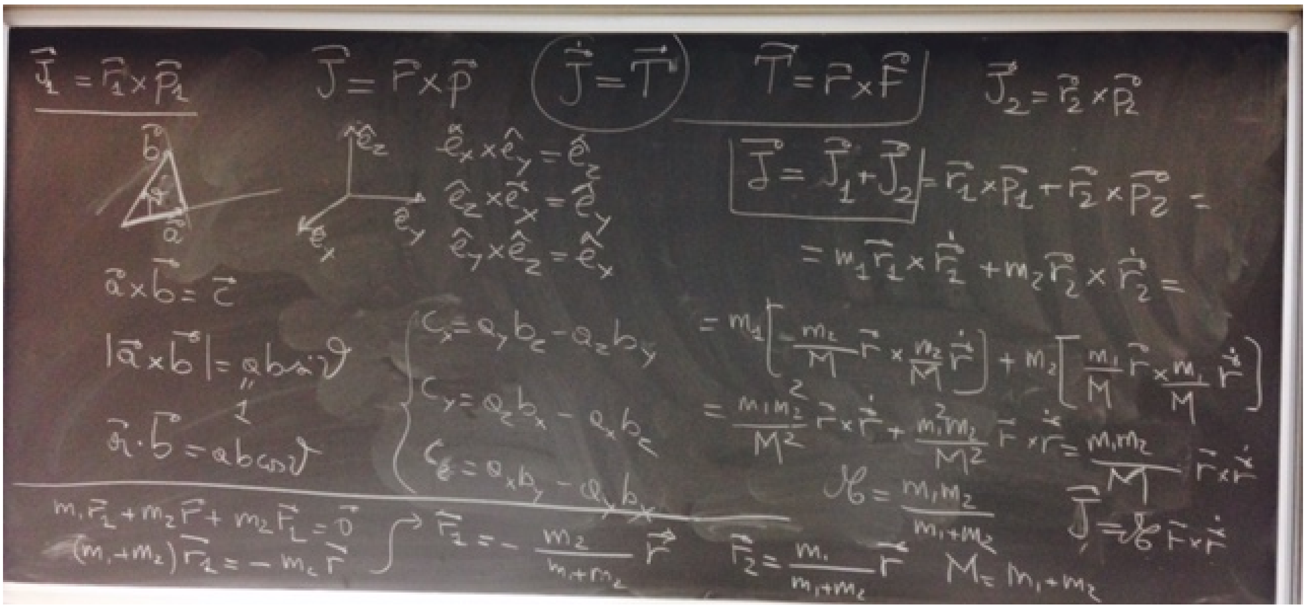
1a lezione 23 Settembre 2015:

- Presentazione dettagliata del programma del corso, del metodo didattico e delle modalità d’esame
- Lista degli studenti interessati e verifica dell’orario delle lezioni

2a Lezione 25 Settembre 2015

- Definizione di problema integrabile
- Il problema dei 2 corpi in 3D è integrabile. Numero di gradi di libertà e verifica degli integrali primi (richiamo sulle unità di misura e sul sistema internazionale SI)
- Problema dei 2 corpi in un sistema di riferimento inerziale (sua definizione; definizione dei versori degli assi coordinati). Integrale primo della quantità di moto lineare e passaggio al riferimento inerziale solidale con il centro di massa
- Richiami su prodotto vettore e prodotto scalare
- Definizione e calcolo del momento angolare totale. Definizione della massa ridotta. In presenza di forze centrali il momento angolare si conserva.



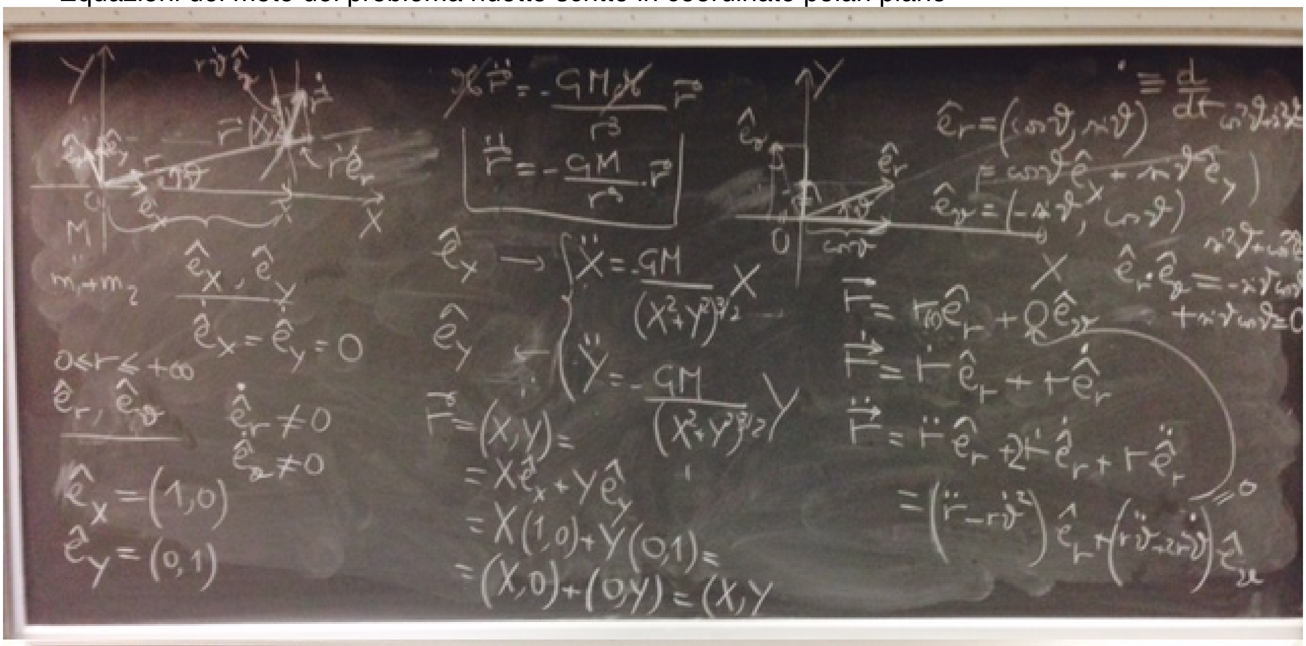


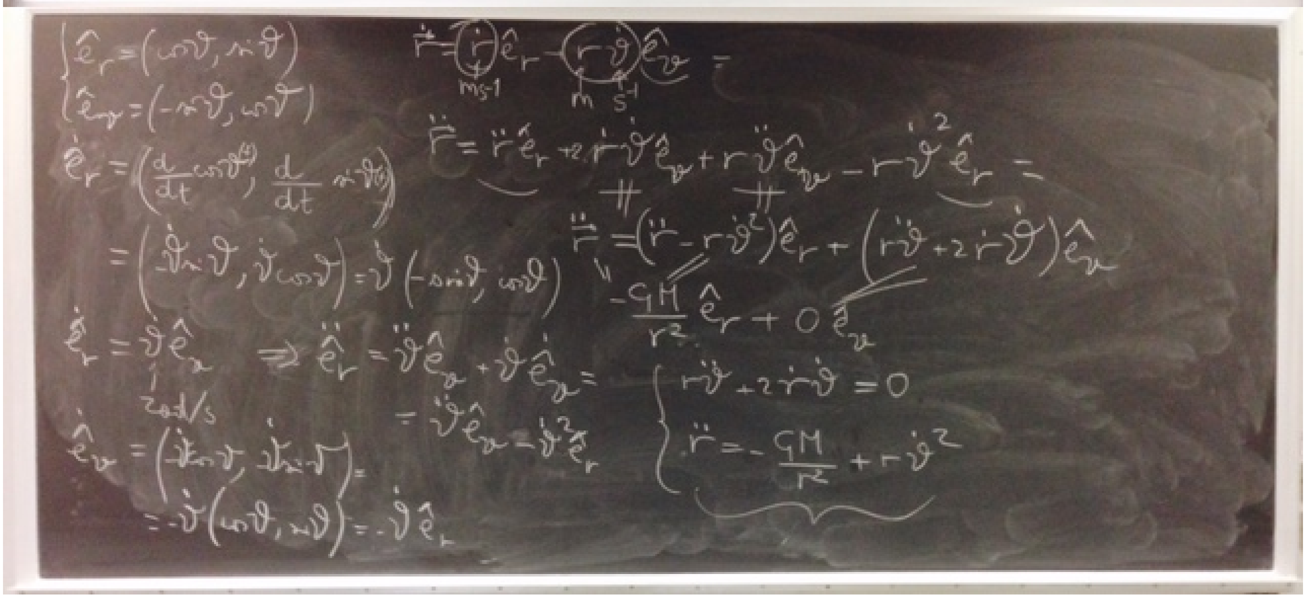
3a Lezione 30 Settembre 2015 (ho dimenticato di fare le foto):

- Equazioni del moto del problema dei 2 corpi, definizione del vettore posizione relativa e riduzione del problema ad 1 solo corpo con relativa equazione del moto in 2D
- Definizione di massa ridotta e considerazioni importanti sul problema ridotto (nella definizione corretta è del tutto equivalente al problema dei 2 corpi da cui si è partiti senza alcuna

approssimazione, e fornisce quindi —una volta risolto— la soluzione esatta del problema di partenza)
- La forza gravitazionale è centrale => il moto si deve svolgere in un piano
- Scelta degli assi coordinati, passaggio alle coordinate polari piane (motivazione)

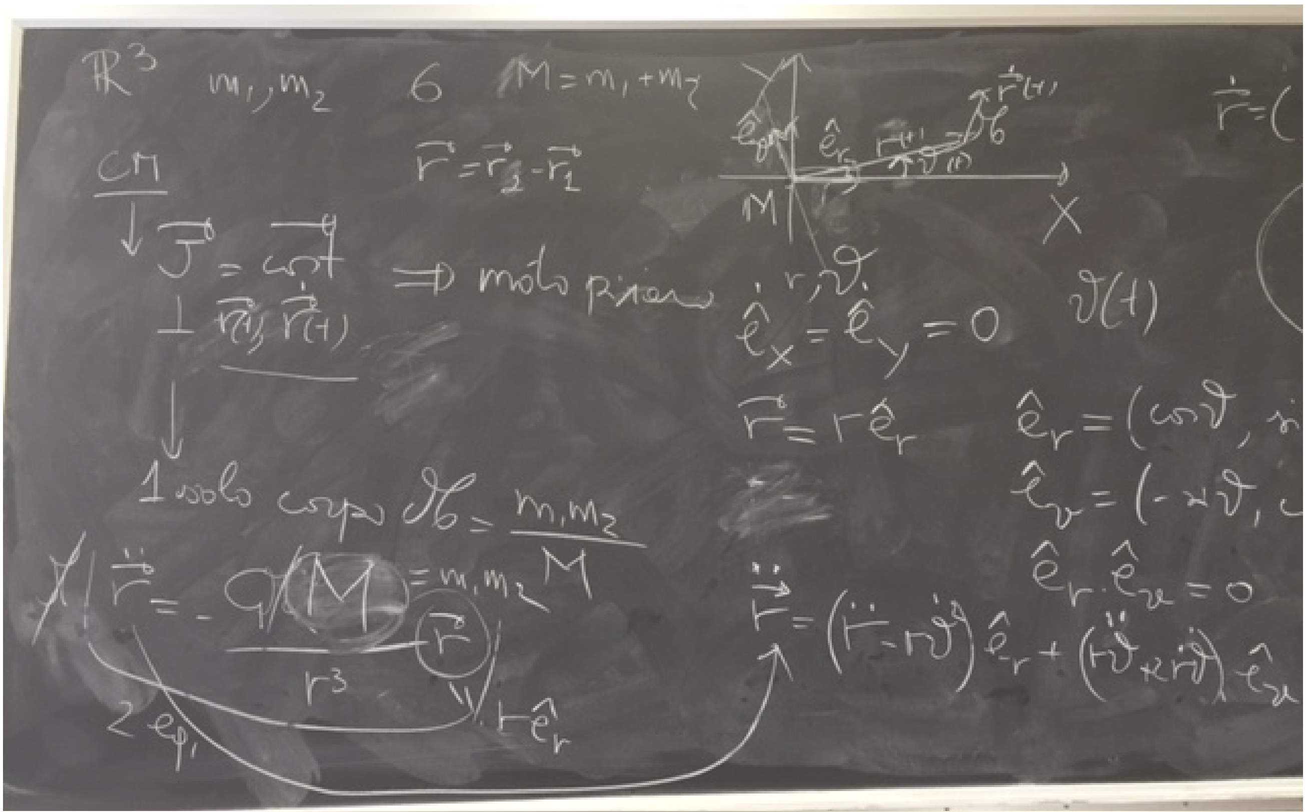
4a Lezione 2 Ottobre 2015:
- Coordinate polari piane e relativi versori coordinati
- Passaggio da sistema inerziale a sistema non inerziale
- Derivate rispetto al tempo dei versori coordinati relativi alle coordinate polari piane
- Derivata seconda del vettore posizione del problema ridotto in coordinate polari piani (esprime il passaggio da riferimento inerziale a riferimento non inerziale)
- Equazioni del moto del problema ridotto scritte in coordinate polari piano



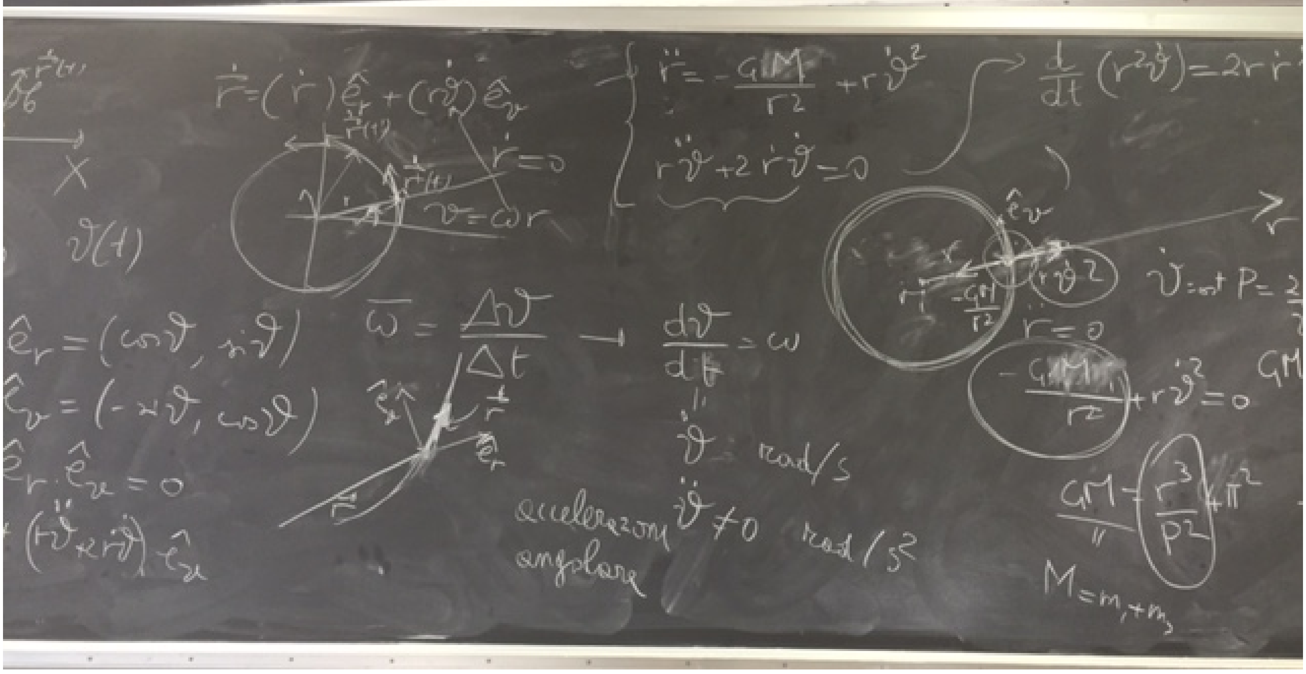


5a Lezione 7 Ottobre 2015:
- Il sistema non inerziale dei versori relativi alle coordinate polari piane e relative forze inerziali
- Esempio: orbita circolare, derivazione della terza legge di Keplero scrivendo le equazioni del moto nel riferimento non inerziale
- Il modulo del vettore momento angolare è costante
- Riduzione delle equazioni del moto del problema ridotto ad 1 sola equazione nella variabile scalare r (modulo del vettore posizione relativa, r>0) (grazie al fatto verificato sopra)
- Definizione del vettore di Lenz e suo significato geometrico. Dimostrazione che è un integrale del

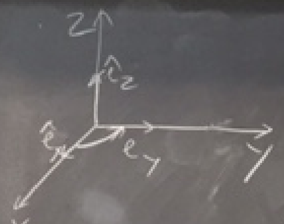
moto

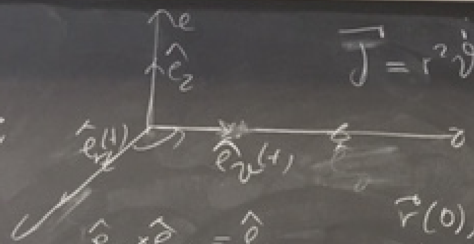


$\mathbb{R}^3$
m_1, m_2
6
$M = m_1 + m_2$
CM
$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$
$\vec{J} = \overrightarrow{cost}$
$\perp \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)$
⇒ moto piano
1 solo corpo
X
$\hat{e}_x = \hat{e}_y = 0$
$\vartheta(t)$
$\vec{r} = r\hat{e}_r$
$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\vartheta = 0$
2 eq.



$\dot{\vec{r}} = (\dot{r})\hat{e}_r + (r\dot{\vartheta})\hat{e}_\vartheta$
$\dot{r} = 0$
$\vartheta(t)$
$\hat{e}_r = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$
$\hat{e}_\vartheta = (-\sin\vartheta, \cos\vartheta)$
$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\vartheta = 0$
$\bar{\omega} = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}$
$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$
rad/s
accelerazione angolare
$\ddot{\vartheta} \neq 0$ rad/s^2
$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} + r\dot{\vartheta}^2$
$r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} = 0$
$\dot{r} = 0$
$-\frac{GM}{r^2} + r\dot{\vartheta}^2 = 0$
$GM = \frac{r^3}{P^2} 4\pi^2$
$M = m_1 + m_2$





$\vec J = r^2 \dot\vartheta \hat e_z$

$\vec e = \frac{1}{GM} \dot{\vec r}_{(t)} \times \vec J -$

$\vec e = (0,0)$

$$\begin{cases} \hat e_x \times \hat e_y = \hat e_z \\ \hat e_z \times \hat e_x = \hat e_y \\ \hat e_y \times \hat e_z = \hat e_x \end{cases}$$

$\hat e_r \times \hat e_\vartheta = \hat e_z$

$\vec r(0), \dot{\vec r}(0)$

$\vec J = \vec r(0) \times \dot{\vec r}(0)$

$\cancel{\frac{m s^{-1} m^2 s^{-1}}{s^2 m^3}}$

$J = r^2 \dot\vartheta$ = costante $\forall t$

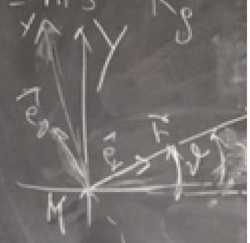
$\Downarrow$

$\dot\vartheta = \frac{J}{r^2_{(t)}}$

$$\boxed{\ddot r_{(t)} = -\frac{GM}{r^2_{(t)}} + \frac{J^2}{r^3_{(t)}}}$$

M, ϑ, $\hat e_r$, o, r, $r_{(0)}$, $\hat e_r$

$[G] = m^3 s^{-2} Kg^{-1}$



$+ r \dot\vartheta^2$

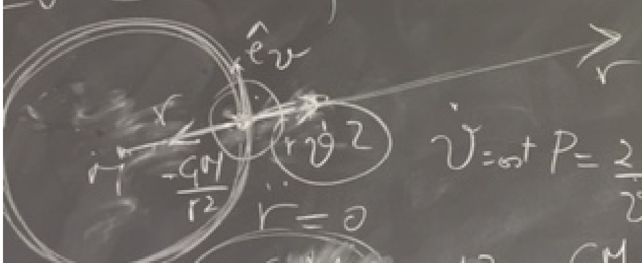
$$\frac{d}{dt}(r^2 \dot\vartheta) = 2 r \dot r \dot\vartheta + r^2 \ddot\vartheta = r(\underbrace{r \ddot\vartheta + 2 \dot r \dot\vartheta}) = 0$$

$r > 0$

$\Downarrow$

$r \ddot\vartheta + 2 \dot r \dot\vartheta = 0$

$= 0$



$\frac{d}{dt}(r^2 \dot\vartheta) = 0$

$\Downarrow$

$r^2 \dot\vartheta$ = costante

$\dot\vartheta$ = cost $P = \frac{2\pi}{\dot\vartheta}$

$\ddot r = 0$

$-\frac{GM}{r^2} + r \dot\vartheta^2 = 0$

$GM = \omega^2 r^3$

$m^2 s^{-1}$

$\vec J = \mathcal{M}\, \vec r \times \dot{\vec r}$

$GM = \frac{r^3}{P^2} 4\pi^2$

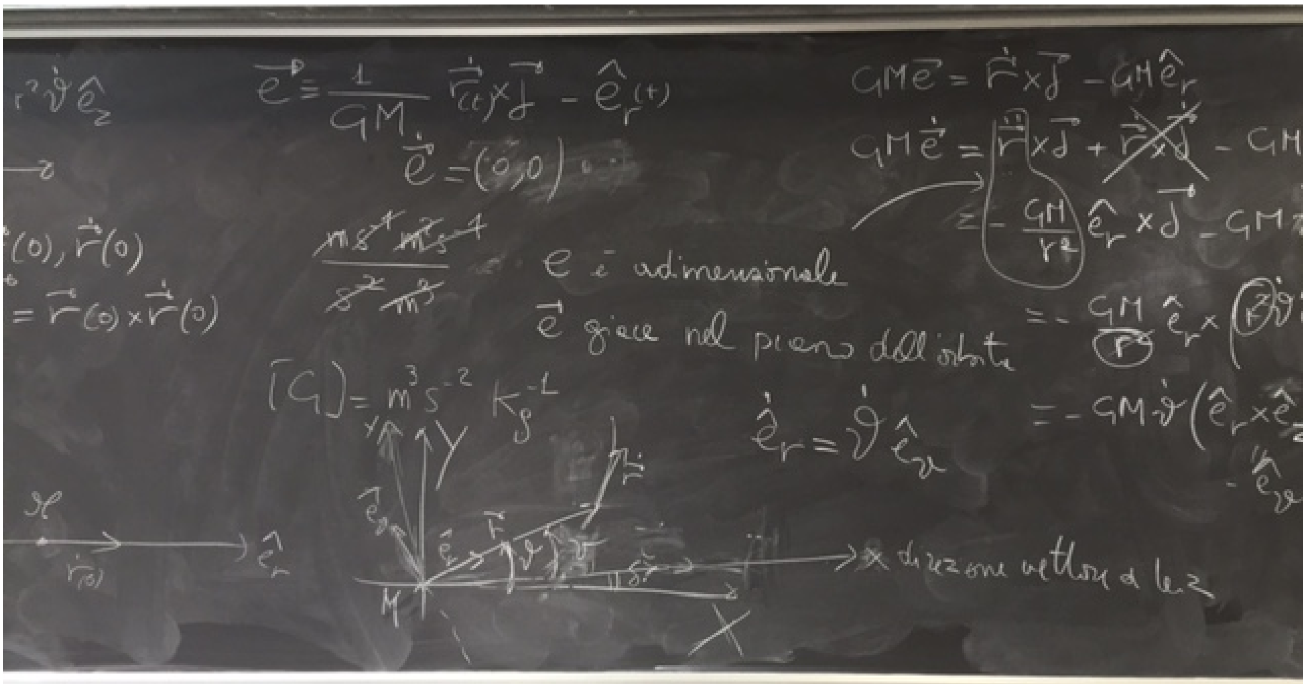
$Kg\, m\, m s^{-1}$

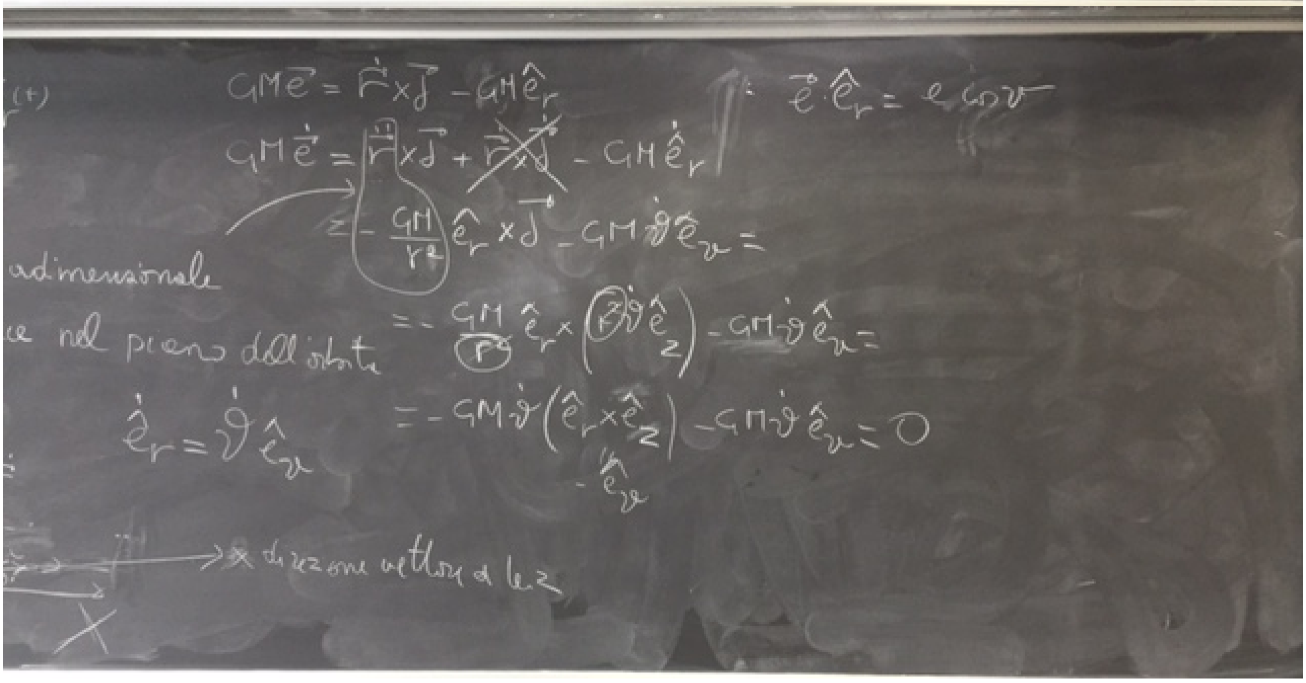
$/s^2$

$J = \frac{\vec J}{\mathcal{M}} = \vec r_{(t)} \times \dot{\vec r}_{(t)}$ $m^2 s^{-1}$

$M = m_1 + m_2$

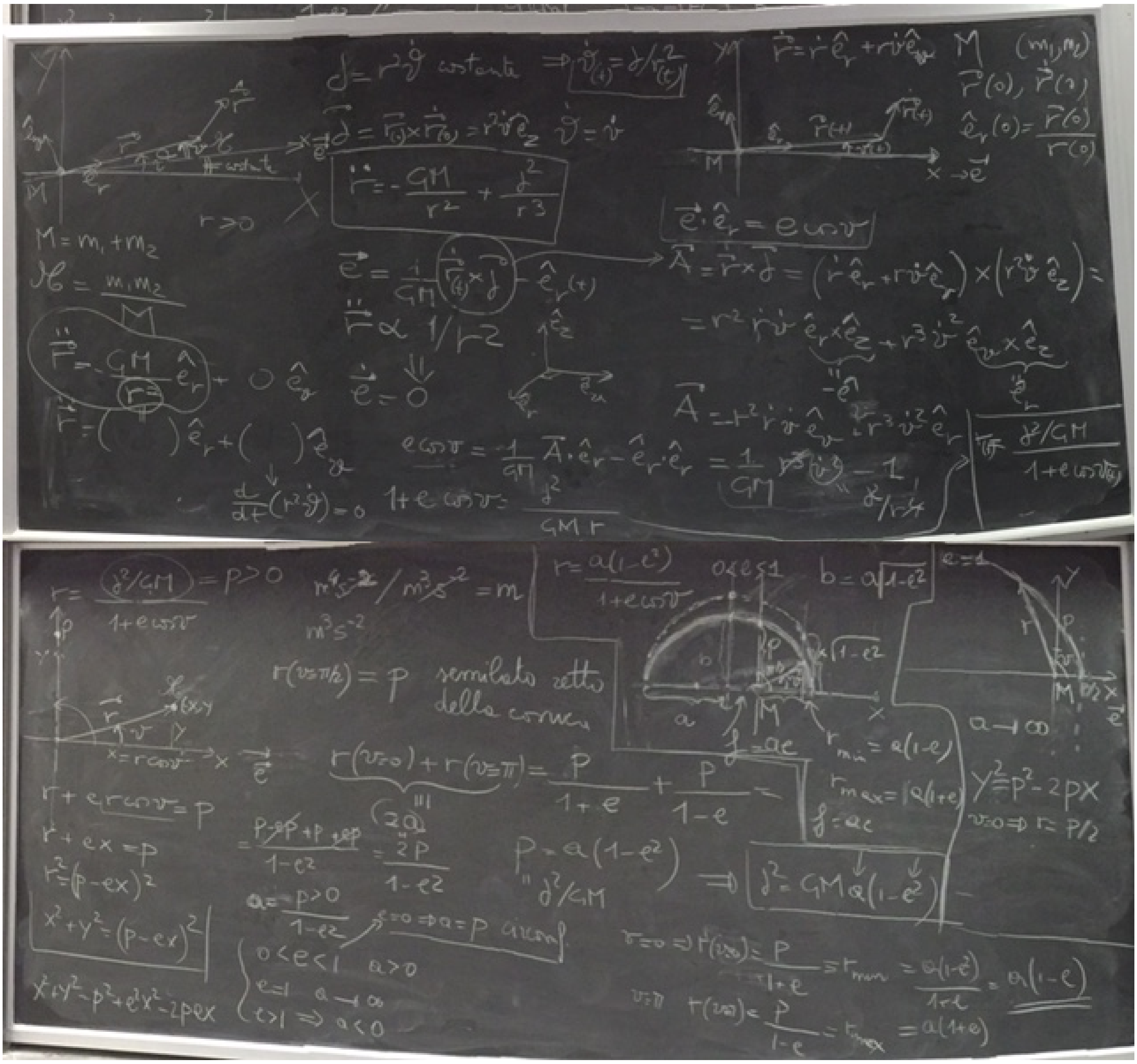
$J = r^2 \dot\vartheta$



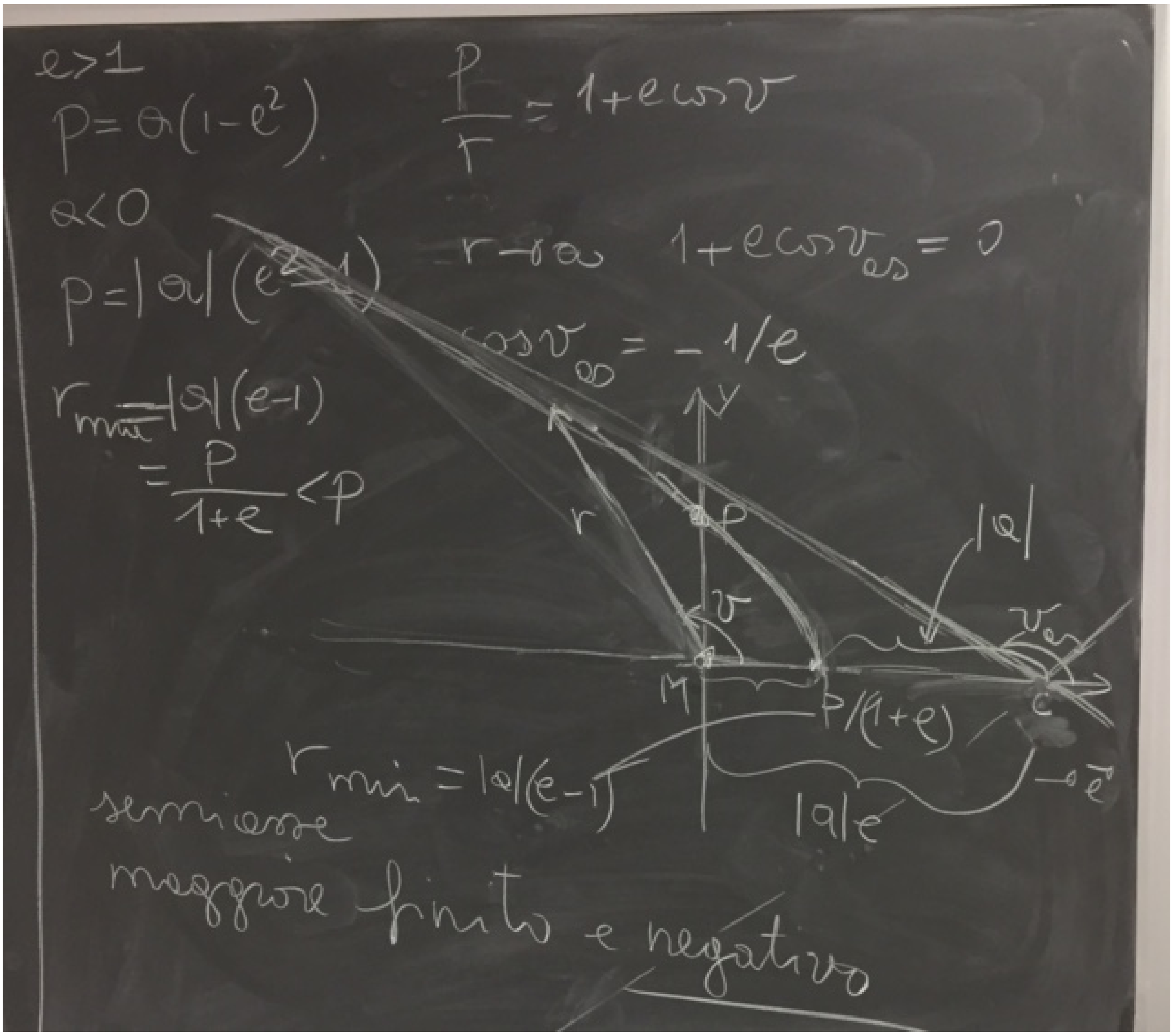


6a Lezione 9 Ottobre 2015:

- Uso del vettore di Lenz per arrivare a scrivere l'equazione dell'orbita soluzione del problema dei 2 corpi
- L'orbita soluzione del problema dei 2 corpi è una conica di cui (nel problema ridotto ad 1 solo corpo) la massa totale occupa uno dei fuochi e coincide con l'origine (fissa) del sistema di riferimento piano giacente nel piano dell'orbita. Nel caso del sistema solare in cui la massa di ogni pianeta si consideri trascurabile rispetto a quella del Sole (e in cui per ogni pianeta si consideri il problema Sole-pianeta come isolato, cioè non influenzato dagli altri pianeti) questo risultato si riduce alla prima legge di Keplero (che si riferiva al Sole e ai pianeti): "Ogni pianeta percorre attorno al Sole un'orbita ellittica di cui il Sole occupa uno dei fuochi"
- Classificazione delle orbite sulla base del modulo del vettore di Lenz (eccentricità)

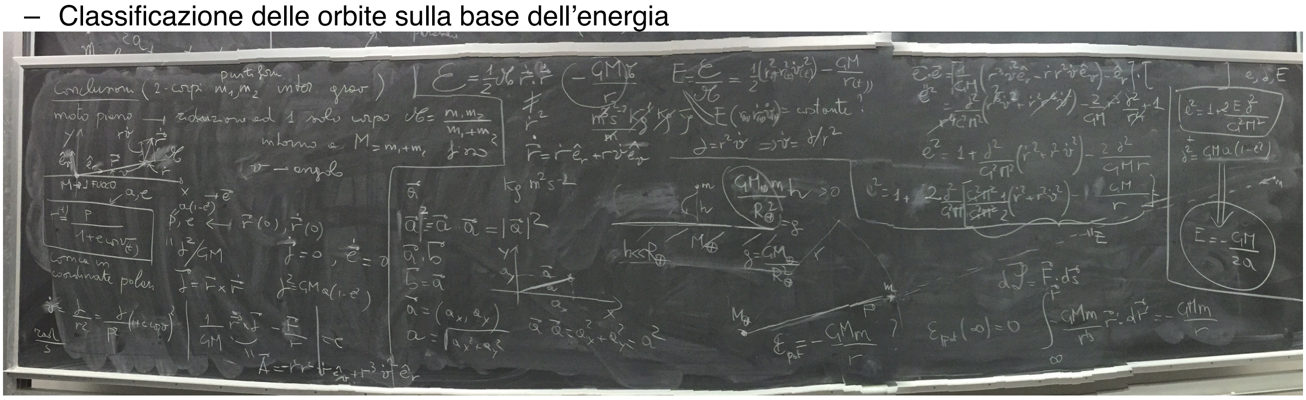


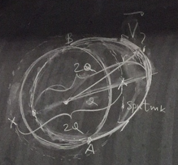
J = r²ϑ̇ costante
M = m₁ + m₂
r > 0
r(v=π/2) = p semilato retto della conica
r(v=0) + r(v=π) = p/(1+e) + p/(1−e)
p = a(1−e²)
J² = GMa(1−e²)
0<e<1 a>0
e=1 a→∞
e>1 ⇒ a<0
e=0 ⇒ a = p circonf
b = a√(1−e²)
f = ae
r_min = a(1−e)
r_max = a(1+e)
a → ∞
y² = p² − 2px
v=0 ⇒ r = p/2



7a Lezione 14 ottobre 2015:

- Prime conclusioni sul problema dei 2 corpi.
- Energia, momento angolare e vettore di Lenz: relazione tra integrali primi ed elementi geometrici dell'orbita
- Considerazioni sulla relazione tra energia e semiasse maggiore
- Classificazione delle orbite sulla base dell'energia





$E_{sputnik} = -\frac{GM}{2a}$

$r \simeq R_\oplus \quad (R_\oplus + 100\,km)$

$r = a$

$E_? = -\frac{GM}{2a}$

Missile intercontinentale

$E = \frac{1}{2} V_{(t)}^2 - \frac{GM}{r(t)}$ ← funzione energia

$V^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2$

$= -\frac{GM}{2a}$

$\Downarrow$

$$\boxed{V_{(t)}^2 = GM\left(\frac{2}{r_{(t)}} - \frac{1}{a}\right)}$$

parabola $V^2 = \frac{2GM}{r}$ $\quad r \to \infty,\ V \to 0$

iperbole $V^2 = GM\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{|a|}\right)$ $\quad r \to \infty \quad V > 0$

$E = -\frac{GM}{2a}$

$a > 0$ orbita ellittica $\Rightarrow E < 0 \quad (0 \leq e < 1)$

$a \to \infty$ parabola $\quad E = 0 \quad (e = 1)$

$a < 0$ iperbole $\quad E > 0 \quad (e > 1)$