Fisica I, *a.a.* 2012–2013, Compitino del 21 Marzo 2013

Anna M. Nobili

1 Moto di un pendolo semplice libero o forzato

Un pendolo semplice di massa m puntiforme e lunghezza ℓ si trova in un laboratorio sulla superficie della Terra per ipotesi piatta e non rotante.

In Figura 1 il punto di sospensione del pendolo, come tutto il laboratorio, non è soggetto ad alcuna forza esterna. Scrivete l'equazione del moto del pendolo nell'ipotesi di piccole oscillazioni usando la variabile x indicata in figura e specificando la posizione di equilibrio e la frequenza angolare delle piccole oscillazioni.

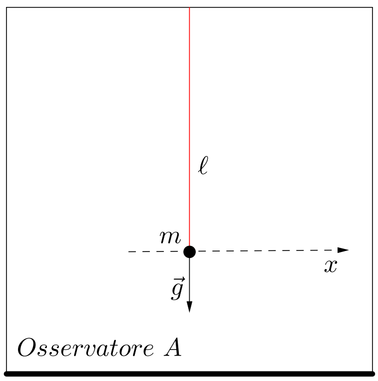


Figure 1: Pendolo semplice libero (Osservatore A)

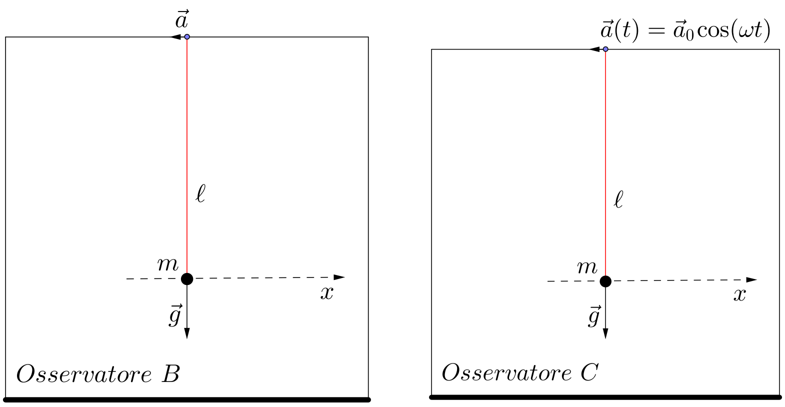


Figure 2: Pendolo semplice forzato: forzante costante (Sinistra, Osservatore B); forzante a frequenza angolare ω (Destra, Osservatore C)

Nel caso dell'Osservatore B di Figua 2 (sinistra) il punto di sospensione (come tutto il laboratorio) è soggetto ad un accelerazione $\vec{a}$ costante come indicato in figura, e di modulo molto minore della accelerazioen locale di gravità g. Dite quale sarà la posizione di equilibrio della mass m del pendolo in questo caso, scrivete l'equazione del moto (sempre per piccole oscillazioni), calcolate la frequenza angolare e dite cosa è cambiato rispetto al caso precedente.

Infine, nel caso dell'Osservatore C di Figura 2 (destra) il punto di sospensione è soggetto ad una accelerazione $\vec{a}(t) = \vec{a}_o \cos(\omega t)$, con a_o molto minore di g. Calcolate la posizione di equilibrio, scrivete l'equazione del moto (piccole oscillazioni) usando preferibilmente la notazione complessa e trovate la soluzione. Analizzatela nel caso in cui ω sia molto maggiore delle frequenza angolare delle piccole oscillazioni del pendolo libero e valutate in questo caso gli effetti della accelerazione $\vec{a}(t) = \vec{a}_o \cos(\omega t)$ sul moto della massa m del pendolo.

2 Soluzione

Il pendolo libero di Figura 1 si trova in un sistema di riferimento inerziale ed è soggetto alla accelerazione di gravità locale la cui direzione definisce la verticale locale dell'Osservatore A. La posizione di equilibrio della massa m del pendolo è lungo tale verticale, quindi nell'origine dell'asse x indicato in figura.

Se la massa viene spostata dalla posizione di equilibrio di un angolo ϑ molto piccolo, tale che

$$\sin\vartheta \simeq \vartheta \tag{1}$$

il piccolo arco percorso dalla massa si confonde con il segmento

$$x \simeq \ell\vartheta \tag{2}$$

e la forza cui la massa è soggetta lungo l'asse orizzontale è la forza di richiamo

$$F \simeq -mg\vartheta \simeq -mg\frac{x}{\ell} \quad . \tag{3}$$

L'Osservatore A scrive quindi l'equazione del moto:

$$\ddot{x} + \frac{g}{\ell}x \simeq 0 \tag{4}$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico con frequenza angolare

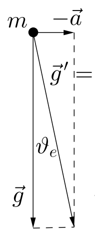
$$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \tag{5}$$

da cui otteniamo il noto periodo delle piccole oscillazioni del pendolo libero $T_o = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, indipendente dall'ampiezza delle oscillazioni.

$$\tan\vartheta_e = \frac{\sin\vartheta_e}{\cos\vartheta_e} \simeq \vartheta_e$$

$$\tan\vartheta_e = \frac{a}{g}$$

$$\vartheta_e \simeq \frac{a}{g}$$



$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a} \qquad a \ll g$$

$$g' = (g^2 + a^2)^{1/2} = g(1 + \frac{a^2}{g^2})^{1/2} \simeq g(1 + \frac{a^2}{2g^2})$$

$$g' \simeq g$$

Figure 3: Accelerazione totale $\vec{g}\,'$ agente sulla massa m del pendolo nel caso dell'Osservatore B di Figura 2. La direzione del vettore $\vec{g}\,'$ è quella lungo la quale la tensione del filo può controbilanciare la forza $m\vec{g}\,'$; rappresenta quindi la nuova direzione del pendolo all'equilibrio, cioè la direzione della locale accelerazione di gravità secondo l'Osservatore B

In Figura 2 (sinistra) la massa m è soggetta oltre che alla forza di gravità $m\vec{g}$ alla forza inerziale $-m\vec{a}$, dato che si trova in un riferimento non inerziale (accelerato con accelerazione $\vec{a}$, piccola in modulo rispetto a g). La Figura 3 mostra l'accelerazione risultante lungo la quale il pendolo assume la sua nuova posizione di equilibrio, ad un angolo $\vartheta_e \simeq a/g$ nella direzione indicata in Figura 3. Lo spostamento è nel verso delle x positive e, dato che la massa del pendolo è sospesa con un filo di lunghezza ℓ la posizione di equilibrio si troverà nel punto:

$$x_e \simeq \ell\vartheta_e \simeq \ell\frac{a}{g} \qquad x_e \simeq \frac{a}{\omega_o^2} \tag{6}$$

Ridefinendo come $x = 0$ questo nuovo punto di equilibrio, l'Osservatore B di Figura 2 (sinistra) scrive la stessa equazione del moto e trova lo stesso periodo delle piccole oscillazioni come l' Osservatore A di Figura 1.

Questo risultato è stato ottenuto seguendo le indicazioni del testo che chiedeva di trovare per prima cosa la nuova posizione di equilibrio, visto che poi la soluzione era ovvia.

Si poteva anche procedere scrivendo l'equazione del moto secondo l'Osservatore B lungo l'asse x tenendo semplicemente conto della accelerazione forzante di modulo a lungo la direzione delle x positive (con $a \ll g$ e $g' \simeq g$):

$$\ddot{x} + \frac{g}{\ell}x = a \tag{7}$$

In questo caso si tratta di un oscillatore armonico (con la stessa frequenza angolare del caso A, che deriva dalla soluzione della parte omogenea dell'equazione del moto) forzato con una accelerazione forzante. Se cerchiamo quindi una soluzione particolare costante della (7) del tipo $x(t) = x_e$ troviamo (imponendo che soddisfi la (7)), $x_e = a\ell/g$, che è appunto la posizione di equilibrio (6).

Passiamo ora al caso dell'Osservatore C.

Per questo Osservatorre (Figura 2 (destra)) la massa m, è soggetta oltre che alla forza di gravità $m\vec{g}$ alla forza inerziale $-m\vec{a}_o\cos(\omega t)$ dato che si trova in un riferimento non inerziale (accelerato con accelerazione $\vec{a}_o\cos(\omega t)$).

Con considerazioni analoghe a quelle di Figura 3 concludiamo che il filo si deve allineare con la direzione della accelerazione totale $\vec{g} - \vec{a}_o\cos(\omega t)$ e quindi si deve spostare nel verso delle x positive di $x_e(t) \simeq (\ell/g)a_o\cos(\omega t)$. Il punto è che questo spostamento ora dipende dal tempo e quindi per scoprire come si muoverà al massa m occorre scrivere l'equazione del moto tenendo conto che (per piccole oscillazioni) l'accelerazione di richiamo è proporzionale allo spostamento dall'equilibrio. L'Osservatore C scrive (senza cambio di coordinata):

$$\ddot{x} = -\frac{g}{\ell}(x - x_e(t)) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_o^2 x = \omega_o^2 x_e(t) \tag{8}$$

Di nuovo la soluzione dell'equazione omogenea da l'oscillazione con la frequenza angolare del pendolo libero. Per capire l'effetto della forzante (questa volta oscillante a frequenza ω troviamo una soluzione particolare del tipo forzante, e usiamo per comodità gli esponenziali complessi. Scriviamo lo spostamento imposto $x_e(t) \simeq (\ell/g)a_o\cos(\omega t)$ come (x_e è la parte reale di $\mathtt{x}_e$ che è complesso):

$$\mathtt{x}_e = \hat{x}_o e^{i\omega t} \qquad \hat{x}_o = x_o e^{i\delta} \tag{9}$$

e quindi cerchiamo per la massa del pendolo una soluzione del tipo

$$\mathtt{x} = \hat{x}e^{i\omega t} \qquad \hat{x} = xe^{i\varphi} \quad . \tag{10}$$

dove x è la parte reale di $\mathtt{x}$. Usando le funzioni complesse (9) e (10) e imponendo che soddisfino l'equazione del moto abbiamo:

$$-\omega^2\hat{x}e^{i\omega t} + \omega_o^2\hat{x}e^{i\omega t} = \omega_o^2\hat{x}_o e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = \frac{\omega_o^2}{\omega_o^2 - \omega^2}\hat{x}_o \tag{11}$$

Siccome il coefficiente che lega $\hat{x}$ e $\hat{x}_o$ è reale, $\delta = \varphi$ e lo stesso coefficiente lega le parti reali di queste grandezze. La massa m oscilla con la frequenza forzante e la sua ampiezza di oscillazione (che chiamiamo x_m) è una frazione dell'ampiezza della oscillazione forzante:

$$\frac{x_m}{x_o} = \frac{\omega_o^2}{\omega_o^2 - \omega^2} \quad . \tag{12}$$

In particolare, se $\omega \gg \omega_o$ abbiamo:

$$\frac{x_m}{x_o} = \frac{\omega_o^2}{\omega^2(\frac{\omega_o^2 - 1}{\omega^2})} \simeq \frac{\omega_o^2}{\omega^2}(1 + \frac{\omega_o^2}{\omega^2}) \simeq \frac{\omega_o^2}{\omega^2} \tag{13}$$

che in modulo è molto minore di 1. Quindi, per il fatto di esser sospesa al filo (e quindi in moto oscillatorio lungo la direzione x) la massa m "smorza" i disturbi applicati lungo la direzione del suo moto oscillatorio se la loro frequenza angolare è maggiore della propria frequenza naturale di oscillazione, meglio se molto maggiore. Questo è il principio degli attenuatori passivi di vibrazioni, e quindi anche degli ammortizzatori.

Avremmo potuto risolvere il problema scrivendo l'equazione del moto della massa m come soggetta alla accelerazione forzante $a_o \cos(\omega t)$ (attenzione al segno, che deve essere opposto a quello della accelerazione applicata al punto di sospensione; ricordiamo che il passeggero dentro un autobus che frena accelera in avanti e viceversa..):

$$\ddot{x} + \frac{g}{\ell}x = a_o \cos(\omega t) \tag{14}$$

Usando gli esponenziali complessi scriviamo $a = \hat{a}_o e^{i\omega t}$ e quindi cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\mathtt{x} = \hat{x}e^{i\omega t}$. Imponendo che soddisfi la (14) abbiamo:

$$\hat{x} = \frac{1}{\omega_o^2 - \omega^2}\hat{a}_o \tag{15}$$

e siccome si tratta di grandezze complesse legate da un rapporto reale, lo stesso rapporto vale tra le loro parti reali:

$$x_m = \frac{1}{\omega_o^2 - \omega^2}a_o \tag{16}$$

dove abbiamo di nuovo chiamato x_m l'ampiezza di oscillazione della massa m (ricordo che la dipendenza dal tempo si elimina nell'imporre che la soluzione particolare soddisfi l'equazione del moto). Per ritrovare da questa equazione (che è dimensionalmente corretta) l'equazione (12) che esprime la proprietà del pendolo di attenuare vibrazioni la cui frequenza sia superiore alla sua frequenza naturale, dobbiamo trovare la relazione tra l'accelerazione a_o (costante, dato che è l'ampiezza della accelerazione applicata) e lo spostamento. Abbiamo già visto con la (6) che per un oscillatore (per piccole oscillazioni il pendolo lungo l'asse x è un oscillatore armonico) lo spostamento prodotto da una accelerazione costante è pari all'accelerazione divisa per la frequenza naturale al quadrato. Quindi, usando la relazione $a_o = \omega_o^2 x_o$ nella (16) ritroviamo la (12).