

Fisica I, *a.a.* 2012–2013 – Compito quinto appello
7 gennaio 2014

Anna M. Nobili

1 Moto del pendolo in presenza di aria

Si chiede di studiare il moto del pendolo in presenza di aria. Procedete per gradi.

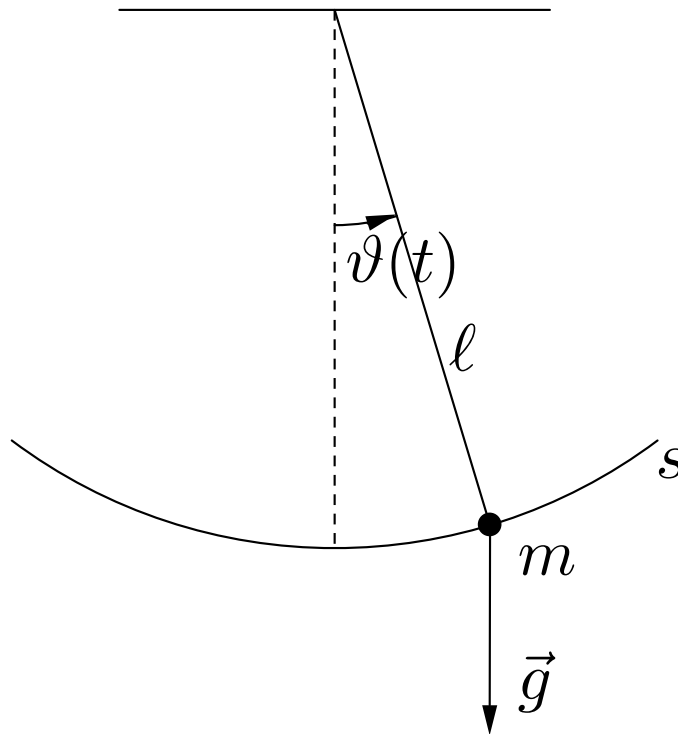


Figure 1: Pendolo semplice di massa m , lunghezza del filo di sospensione ℓ , vincolato a muoversi lungo l'arco di circonferenza s e sottoposto alla accelerazione locale di gravità \vec{g} . $\vartheta(t)$ è la distanza angolare dalla verticale al generico istante t .

1. Partite dal pendolo semplice studiato a lezione in assenza di aria e nella approssimazione di piccole oscillazioni. Scrivete l'equazione del moto della massa m , come a lezione, usando i simboli definiti in Fig. 1. Scrivete la frequenza angolare delle piccole oscillazioni e indicatela con il simbolo ω_o . Scrivete anche il periodo delle piccole oscillazioni e chiamatelo T_o

2. Considerate adesso la presenza dell'aria che esercita sulla massa del pendolo una forza resistiva proporzionale alla sua velocità con un fattore di proporzionalità γ :

$$\vec{F}_r = -\gamma\vec{v} \quad (1)$$

Disegnate questa forza in Fig. 1. Dite quali sono le dimensioni della grandezza fisica γ . Scrivete l'equazione del moto del pendolo come nel caso precedente ma tenendo conto anche della forza (1). Semplificate l'equazione del moto dividendo ogni suo membro per il coefficiente di $\ddot{\vartheta}$. Fatto questo, dite che dimensioni ha il coefficiente del termine $\dot{\vartheta}$ e indicatelo con un nuovo simbolo, possibilmente appropriato alle sue dimensioni fisiche.

3. L'equazione del moto che avete appena scritto è una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Cercate una soluzione particolare del tipo:

$$\vartheta_p(t) = e^{zt} \quad \text{con} \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{incognita.} \quad (2)$$

Imponete che essa soddisfi l'equazione del moto che avete scritto al punto 2; arriverete ad una equazione algebrica di secondo grado nella variabile z . Scrivetene le soluzioni, che dipenderanno dal discriminante Δ .

4. Scrivete le due soluzioni per z nel caso $\Delta > 0$, e le due corrispondenti soluzioni particolari per $\vartheta_p(t)$ come dalla relazione (2). Dite che tipo di moto fa in questo caso la massa del pendolo.
5. Scrivete le due soluzioni per z nel caso $\Delta < 0$. Troverete che sono complesse. Dite che dimensioni fisiche ha il coefficiente che moltiplica l'unità immaginaria, e dategli un nome opportuno.
6. Scrivete le due corrispondenti soluzioni particolari chiamandole $\vartheta_{p1}(t)$ e $\vartheta_{p2}(t)$, che saranno anch'esse complesse. La soluzione generale (complessa) si può scrivere come:

$$\vartheta_{\text{complessa}}(t) = c_1\vartheta_{p1}(t) + ic_2\vartheta_{p2}(t) \quad \text{con} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad . \quad (3)$$

Prendetene la parte reale, che rappresenta il moto del pendolo. Dite di che tipo di moto si tratta e che significato hanno le grandezze cui avete dato un nome a vostro piacere ai punti 2 e 5. Infine, assumendo che l'effetto della resistenza dell'aria sul moto del pendolo sia molto piccolo, approssimate la soluzione reale che avete trovato.

2 Soluzione

1. In assenza di aria, dalla legge fondamentale di Newton “massa per accelerazione=forza” scritta lungo la traiettoria s del pendolo abbiamo:

$$m_i \ell \ddot{\vartheta} = -m_g g \sin \vartheta \quad (4)$$

essendo $g \sin \vartheta$ la componente della accelerazione locale di gravità lungo la traiettoria del pendolo, che prendiamo con il segno meno perché è diretta in verso orario, per definizione negativo. Ho usato i simboli m_i e m_g ad indicare, rispettivamente, massa inerziale e massa gravitazionale del pendolo, che poi semplificheremo perché è sperimentalmente provato che sono uguali con grande precisione (Principio di equivalenza)..

L’archetto che lungo s corrisponde ad uno spostamento angolare elementare $d\vartheta$ (antiorario=positivo) è $ds = \ell d\vartheta$ e quindi l’accelerazione lungo s è $\ddot{s} = \ell \ddot{\vartheta}$. Se le oscillazioni sono di piccola ampiezza, $\sin \vartheta \simeq \vartheta$ e la (4) diventa:

$$m \ell \ddot{\vartheta} = -m g \vartheta \quad (5)$$

Se infine semplifichiamo le masse abbiamo una equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti nella variabile ϑ :

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{\ell} \vartheta \quad (6)$$

che sappiamo dalle lezioni essere l’equazione del moto di un oscillatore armonico con frequenza angolare ω_o e corrispondente periodo di oscillazione $T_o = 2\pi/\omega_o$:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad T_o = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (7)$$

Come sappiamo, in assenza di aria e se le oscillazioni sono piccole piccole la loro frequenza angolare (e quindi il periodo) non dipendono dall’ampiezza delle oscillazioni stesse.

2. La forza di resistenza dell’aria che influenza il moto del pendolo lungo la curva s è:

$$F_r = -\gamma \ell \dot{\vartheta} \quad (8)$$

È ovviamente negativa e proporzionale alla velocità del pendolo $\ell \dot{\vartheta}$ lungo la sua traiettoria s (Nota: abbiamo visto sopra che $ds = \ell d\vartheta$, quindi $ds/dt = \ell d\vartheta/dt$).

Le dimensioni di γ sono per definizione forza/velocità, quindi $[\gamma] = kg s^{-1}$. γ è noto come coefficiente di smorzamento.

L’equazione del moto in presenza di aria è (sempre per piccole oscillazioni; teniamo la massa del pendolo perché F_r è una forza):

$$m_i \ell \ddot{\vartheta} = -m_g g \sin \vartheta - \gamma \ell \dot{\vartheta} \quad (9)$$

che riscriviamo come richiesto nella forma:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{\gamma}{m} \dot{\vartheta} + \omega_o^2 \vartheta = 0 \quad (10)$$

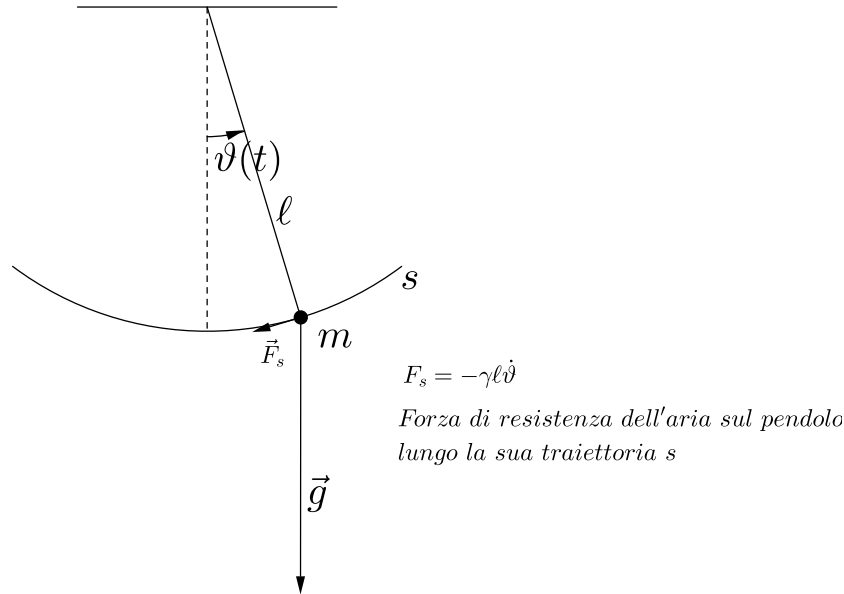


Figure 2: Il pendolo semplice in presenza della forza di resistenza dell'aria \vec{F}_r nel caso in cui il pendolo si stia muovendo nel verso di ϑ crescente (positivo). In caso contrario tutti i membri della (9) cambiano segno (ricordo che $\sin(-\vartheta) = -\sin \vartheta$). Abbiamo rappresentato l'accelerazione locale di gravità con una freccia più lunga di quella usata per \vec{F}_r ad indicare, soltanto qualitativamente, le rispettive intensità.

Dimensionalmente γ/m è l'inverso di un tempo (perché moltiplicato per una velocità angolare deve dare una accelerazione angolare come $\ddot{\vartheta}$). Quindi m/γ deve essere un tempo, che decido di chiamare τ :

$$\tau = \frac{m}{\gamma} \quad (11)$$

per cui la (10) diventa:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{1}{\tau} \dot{\vartheta} + \omega_o^2 \vartheta = 0 \quad . \quad (12)$$

3. Usando la soluzione particolare $\vartheta_p(t) = e^{zt}$, con $z \in \mathbb{C}$, proposta dal testo e imponendo che soddisfi la (12) otteniamo:

$$z^2 e^{zt} + \frac{z}{\tau} e^{zt} + \omega_o^2 e^{zt} = 0 \quad (13)$$

che si può semplificare dividendo tutto per e^{zt} (dato che non si annulla mai se non tendenzialmente quando l'esponente zt è reale e tende a $-\infty$):

$$z^2 + \frac{z}{\tau} + \omega_o^2 = 0 \quad (14)$$

ottenendo una equazione di secondo grado nella variabile complessa z . Le soluzioni di questa equazione ci servono per avere le soluzioni particolari $\vartheta_p(t) = e^{zt}$ della equazione del moto del pendolo in aria (12) e quindi infine una sua soluzione generale che ci dica quale è il moto del pendolo in presenza di aria. Che è lo scopo di questo problema.

Le soluzioni della (14) sono:

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_o^2} \quad (15)$$

e dipendono dal valore del discriminante:

$$\Delta = \frac{1}{4\tau^2} - \omega_o^2 \quad (16)$$

4. Se

$$\frac{1}{4\tau^2} > \omega_o^2 \Rightarrow \Delta > 0 \quad (17)$$

le due soluzioni per z sono

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\Delta} \quad (18)$$

dove $z_2 = -1/2\tau - \sqrt{\Delta}$ è ovviamente negativa, ma anche $z_1 = -1/2\tau + \sqrt{\Delta} < 0$ perché $\sqrt{\Delta}$, che ha le dimensioni di una frequenza angolare, è $\sqrt{\Delta} < 1/2\tau$ (vedi la disuguaglianza (17)).

E se le due soluzioni per z sono negative, le soluzioni $\vartheta_p = e^{zt}$ sono esponenziali negativi, quindi, qualunque siano le condizioni iniziali, il moto del pendolo si smorza, non oscilla. Si chiama oscillatore “sovrasmorzato”.

5. Se $\Delta < 0$ le due soluzioni della (14) sono:

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm i\sqrt{-\Delta} \quad (19)$$

cioè sono complesse. $\sqrt{-\Delta}$ ha le dimensioni di una frequenza angolare, che chiamo:

$$\omega_1 = \sqrt{-\Delta} = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{1}{4\tau^2}} \quad (20)$$

6. Le corrispondenti soluzioni particolari sono:

$$\vartheta_{p1} = e^{-\frac{1}{2\tau}t} e^{i\omega_1 t} \quad \vartheta_{p2} = e^{-\frac{1}{2\tau}t} e^{-i\omega_1 t} \quad (21)$$

e la soluzione è del tipo:

$$\vartheta_{complessa} = (c_1 e^{i\omega_1 t} + i c_2 e^{-i\omega_1 t}) e^{-\frac{1}{2\tau}t} \quad (22)$$

quindi:

$$\vartheta_{complessa} = e^{-\frac{1}{2\tau}t} [(c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t) + i(c_1 \sin \omega_1 t + c_2 \cos \omega_1 t)] \quad (23)$$

e la soluzione reale che esprime il moto del pendolo è:

$$\vartheta(t) = e^{-\frac{1}{2\tau}t} (c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t) \quad (24)$$

Si tratta di un moto oscillatorio con frequenza ω_1 smorzato. La costante di tempo

$$2\tau = \frac{m}{\gamma} \quad (25)$$

è il tempo dopo il quale l'ampiezza angolare di oscillazione del pendolo si riduce di un fattore e (decadimento esponenziale). La frequenza angolare ω_1

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 \left(1 - \frac{1}{4\tau^2\omega_o^2}\right)} = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{4\tau^2\omega_o^2}} \quad (26)$$

è la frequenza di oscillazione del pendolo in presenza dell'effetto frenante dell'aria. Se

$$4\tau^2\omega_o^2 \gg 1 \quad i.e. \quad \tau \gg \frac{T_o}{4\pi} \quad (27)$$

cioè la costante di tempo di smorzamento è molto lunga (perché l'effetto frenante dell'aria è molto piccolo), allora la frequenza di oscillazione del pendolo in presenza di aria è:

$$\omega_1 \simeq \omega_o \left(1 - \frac{T_o^2}{32\pi^2\tau^2}\right) \quad (28)$$

e il corrispondente periodo di oscillazione $T_1 = 2\pi/\omega_1$ di questo pendolo poco smorzato è:

$$T_1 \simeq T_o \left(1 + \frac{T_o^2}{32\pi^2\tau^2}\right) \quad (29)$$

Cioè, se l'effetto frenante dell'aria è piccolo il pendolo oscilla con un periodo di poco più lungo di quello in assenza di aria (frequenza angolare di poco più piccola) e le sue oscillazioni si smorzano con una costante di tempo molto lunga.

Non abbiamo considerato il caso $\Delta = 0$ perché si tratta di un caso che richiederebbe, per verificarsi, una relazione molto particolare tra il coefficiente di smorzamento γ , il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo in assenza di aria e la massa del pendolo.