Fisica I, *a.a.* 2012–2013 – Compito sesto appello
27 gennaio 2014

Anna M. Nobili

1 Moto di un corpo soggetto a forze conservative e dissipative: potenza delle forze in gioco

É dato un corpo puntiforme di massa m libero di muoversi in 3 dimensioni in un sistema di riferimento inerziale. Indichiamo con $\vec{r}(t)$ il suo vettore posizione all'istante generico t.

Caso A. Consideriamo dapprima il caso studiato a lezione in cui il corpo è soggetto soltanto ad una forza conservativa $\vec{F}_c$. Abbiamo imparato che in questo caso esiste una funzione scalare $U(\vec{r}(t)) = U(t)$ che rappresenta l'energia potenziale del corpo in corrispondenza del suo vettore posizione $\vec{r}(t)$, e che sommata alla energia cinetica del corpo nello stesso istante assume sempre lo stesso valore numerico. Si dice che una tale grandezza è una costante del moto, dato che ha sempre lo stesso valore numerico durante tutto il moto del corpo.

A1: Dite quali sono le dimensioni fisiche di questa grandezza costante del moto e cosa rappresenta.

A2: Scrivete l'equazione del moto del corpo m.

A3: Se una grandezza è costante durante il moto la sua derivata rispetto al tempo è nulla. Imponete questa condizione alla grandezza del punto A1 e dite a cosa equivale la potenza della forza $\vec{F}_c$ (Nota: la potenza della forza $\vec{F}_c$ agente sul corpo m è il lavoro che essa fa nell'unità di tempo).

Caso B. Consideriamo adesso il caso in cui sul corpo m agisca, oltre alla forza conservativa $\vec{F}_c$ anche una forza dissipativa $\vec{F}_d$. Per definizione, questa forza dissipa energia e quindi l'energia totale del corpo m in questo caso non si conserva (non è più una costante del moto). Il riferimento inerziale nel quale si studia il moto del corpo m è lo stesso che nel caso precedente e useremo lo stesso simbolo $\vec{r}(t)$ per esprimere il vettore posizione del corpo al tempo t. Ovviamente il moto sarà diverso da quello in assenza della forze dissipativa $\vec{F}_d$.

B1: Scrivete l'equazione del moto del corpo m.

B2: Scrivete l'energia totale del corpo m e calcolatene la derivata rispetto al tempo.

B3: Dite a cosa equivale la potenza della forza dissipativa $\vec{F}_d$.

B4: Delle forze $\vec{F}_c$ e $\vec{F}_d$ si è detto soltanto che esse sono, rispettivamente, una conservativa e l'altra dissipativa. Avrete notato che non è rilevante ai fini dei quesiti posti che queste forze siano costanti oppure variabili, dipendenti dalla posizione del corpo, dalla sua velocità o anche dipendenti esplicitamente dal tempo. Sapreste citare un esempio di forza conservativa e un esempio di forza dissipativa? Se si, spiegate anche perché. Nel caso di un vostro esempio di forza dissipativa, sapreste dire cosa succede all'energia che viene dissipata?

2 Soluzione

Caso A

- **A1:** Nel caso conservativo, sommando in ogni istante l'energia potenziale del corpo m e la sua energia cinetica si ottiene una grandezza che ha anch'essa le dimensioni di una energia, cioè $kg\,m^2\,s^{-2}$. Questa grandezza è l'energia totale del corpo, che chiamo E_A. Poiché sappiamo che non ci sono forze dissipative il valore di E_A rimane costante (uguale a quello iniziale) durante tutto il moto. Si scrive:

$$E_A = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + U(t) \quad . \tag{1}$$

  (Ricordo che $\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = v^2$ è la velocità al quadrato del corpo, pari alla somma dei quadrati di tutte le componenti del vettore velocità $\dot{\vec{r}}$.)

- **A2:** L'equazione del moto, trattandosi di un riferimento inerziale, è data dalla legge fondamentale di Newton:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_c \tag{2}$$

  essendo $\vec{F}_c$ l'unica forza che agisce sul corpo considerato.

- **A3:** L'energia E_A si conserva, quindi calcolo la sua derivata rispetto al tempo e impongo che sia nulla:

$$\dot{E}_A = m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{U}(t) = 0 \tag{3}$$

  Usando l'equazione del moto (2) ottengo:

$$\vec{F}_c \cdot \dot{\vec{r}} = -\dot{U}(t) \quad . \tag{4}$$

  Il termine sulla sinistra è la potenza della forza $\vec{F}_c$, cioè il lavoro fatto per unità di tempo dalla forza $\vec{F}_c$ sul corpo m. Infatti, il lavoro elementare, cioè relativo ad un piccolo spostamento elementare $d\vec{r}$ è $d\mathcal{L} = \vec{F}_c \cdot d\vec{r}$, da cui $d\mathcal{L}/dt = \vec{F}_c \cdot \dot{\vec{r}}$. L'equazione (4) ci dice che nel caso conservativo la potenza della forza applicata è uguale ed opposta alla variazione dell'energia potenziale del corpo.

  Esempio: quando un sasso (corpo puntiforme di massa m) cade a terra da un'altezza z_o per effetto della forza gravitazionale locale $-m\vec{g}$ (l'asse verticale z è diretto verso l'alto, $g \simeq 9.8\,m\,s^{-2}$ è l'accelerazione locale di gravità; trascuriamo l'aria e assumiamo il riferimento inerziale), la forza gravitazionale fa un lavoro $+mgz_o$ (quando il copro cade forza e spostamento hanno lo stesso verso – sono entrambi negativi – quindi il lavoro fatto è positivo). Per il nostro risultato (4) l'energia potenziale del sasso deve essere diminuita della stessa quantità. Poiché a terra l'energia potenziale del corpo è nulla, ne deduciamo che quando si trovava ad altezza z_o doveva avere una energia potenziale mgz_o. Un risultato che conoscevamo.

Caso B

- **B1:** Rispetto al caso A nell'equazione del moto devo aggiungere la forza dissipativa:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_c + \vec{F}_d \tag{5}$$

- **B2:** L'energia totale del corpo, che chiamo E_B, è la somma di energia cinetica più energia potenziale (corrispondente alla forza conservativa):

$$E_B = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + U(t) \quad . \tag{6}$$

  Poiché sul corpo agisce anche una forza dissipativa questa energia non è più costante durante il moto. Calcolo la sua derivata temporale:

$$\dot{E}_B = m \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{U}(t) = \vec{F}_c \cdot \dot{\vec{r}} + \vec{F}_d \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{U}(t) \neq 0 \tag{7}$$

- **B3:** Usando la (4) ottengo:

$$\dot{E}_B = \vec{F}_d \cdot \dot{\vec{r}} \tag{8}$$

  cioè, l'energia totale del corpo in presenza di una forza dissipativa non è più una costante del moto e la sua derivata temporale è uguale alla potenza di questa forza dissipativa.

- **B4:** Un esempio di forza conservativa è la forza gravitazionale (vedi sopra). Esempi di forza dissipativa sono l'attrito del terreno o la resistenza dell'aria. In questi casi l'energia iniziale del corpo viene dissipata sotto forma di calore: una pallina in moto su un tavolo non perfettamente liscio finisce per fermarsi; un satellite che rientra molto velocemente nell'atmosfera terrestre finisce per bruciare.