Fisica I, *a.a.* 2012–2013, Compito primo appello 4 Giugno 2013

Anna M. Nobili

1 Effetto del Sole sulla Terra schiacciata

Schematizziamo la terra oblata con il semplice modellino di Figura 1 in cui la massa di tutto il rigonfiamento equatoriale vale $2\Delta m$ e nel piano $O\,\xi\,\zeta$ esso è costituito da due punti massa posti sull'asse ξ simmetricamente rispetto al centro di massa della Terra (coincidente con l'origine O degli assi), ciascuno di valore Δm. Poiché c'è simmetria attorno all'asse ζ questa configurazione è rappresentativa di tutto l'eccesso di massa equatoriale.

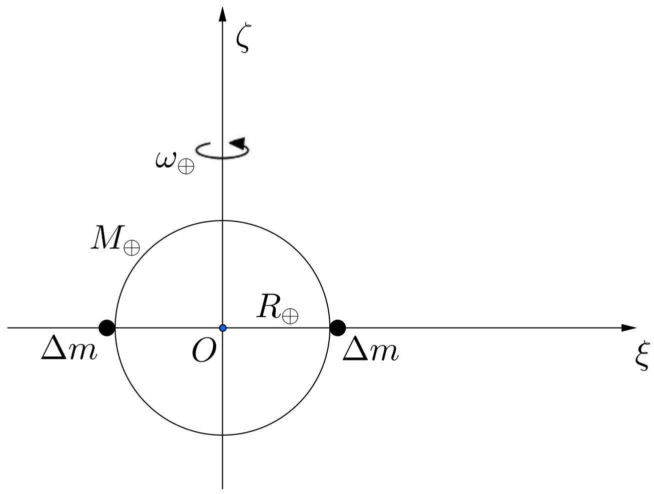

Figure 1: L'eccesso di massa equatoriale della Terra dovuto alla sua rotazione a velocità angolare $\omega_\oplus$ attorno all'asse ζ può essere rappresentato come un anello. Noi lo semplifichiamo ulteriormente considerando un piano meridiano (il piano ξ, ζ) e rappresentando l'eccesso di massa con i due punti massa Δm. Si assume $\Delta m \ll M_\oplus$ perciò $M_\oplus$ è la massa totale della Terra; $R_\oplus$ è il suo raggio medio

La Terra di questo modellino ruota con velocità angolare costante $\omega_\oplus$ attorno all'asse ζ. Scrivete le componenti del vettore $\vec{\omega}_\oplus$ nel sistema di riferimento $O\,\xi\,\eta\,\zeta$ (dite voi come è diretto l'asse η che completa la terna degli assi).

Calcolate il vettore del momento angolare di rotazione della Terra $\vec{L}_\oplus$ e scrivetene le tre componenti. Calcolate anche il momento di inerzia della Terra di Figura 1 da cui dipende il suo momento angolare di rotazione.

Consideriamo adesso la Terra oblata così schematizzata mentre orbita attorno al Sole a distanza $d_{\oplus\odot}$ (orbita per ipotesi circolare) sapendo che l'asse di rotazione della Terra ζ non è parallelo all'asse z perpendicolare al piano orbitale ma forma con esso un angolo ε come mostrato in Figura 2. (Nota: nel riferimento $Oxyz$ il piano orbitale è il piano x, y di cui solo l'asse x è riportato in Figura; dite voi come è diretto l'asse y).

Disegnate in questa figura i vettori $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$ delle forze che il Sole esercita sulle masse Δm_1 e Δm_2 che rappresentano il rigonfiamento equatoriale. (Nota: i valori delle due masse sono uguali e l'indice 1,2 è usato solo per distinguere la loro posizione).

Considerate il momento rispetto al centro di massa O esercitato da ciascuna di queste forze e dite quali sono la direzione e il verso del momento totale $\vec{N}$ di queste forze (Nota: non si chiede di calcolare il valore del modulo N).

Conoscendo direzione e verso del vettore $\vec{N}$, dite dapprima qualitativamente e poi quantitativamente quale effetto esso avrà sulla rotazione della Terra attorno al proprio asse (ricordando che il rigonfiamento equatoriale della Terra è simmetrico attorno al suo asse di rotazione ζ).

Dite che cosa accadrebbe nei seguenti casi: i) la Terra è oblata come in Figura 1 ma l'angolo ε di Figura 2 è nullo; ii) l'angolo ε è diverso da zero ma la Terra è perfettamente sferica (cioè $\Delta m = 0$).

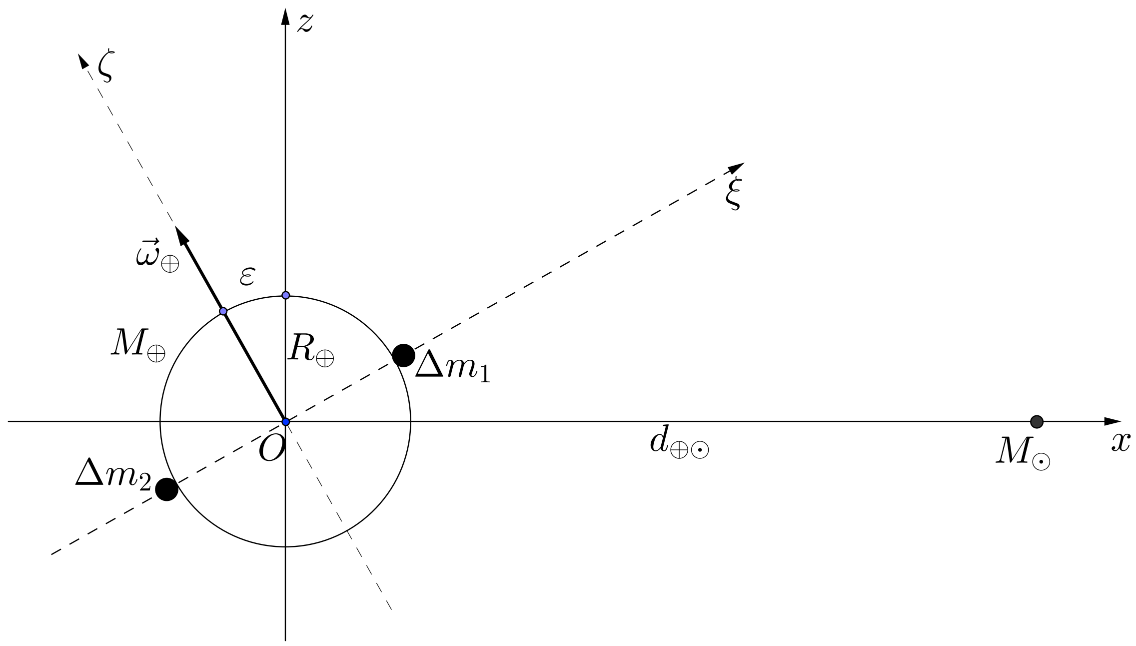

Figure 2: La Terra oblata schematizzata col modellino della figura precedente si trova in orbita attorno al Sole a distanza $d_{\oplus\odot}$. Facciamo una schematizzazione piana considerando che il Sole si trovi nello spesso piano degli eccessi di massa Δm (l'indice 1,2 serve solo per distinguere la loro posizione). Poiché il rigonfiamento equatoriale della Terra è simmetrico attorno al suo asse di rotazione ζ questa configurazione è del tutto generale e non rappresenta un caso particolare di posizione relativa tra la Terra e il Sole.

2 Soluzione

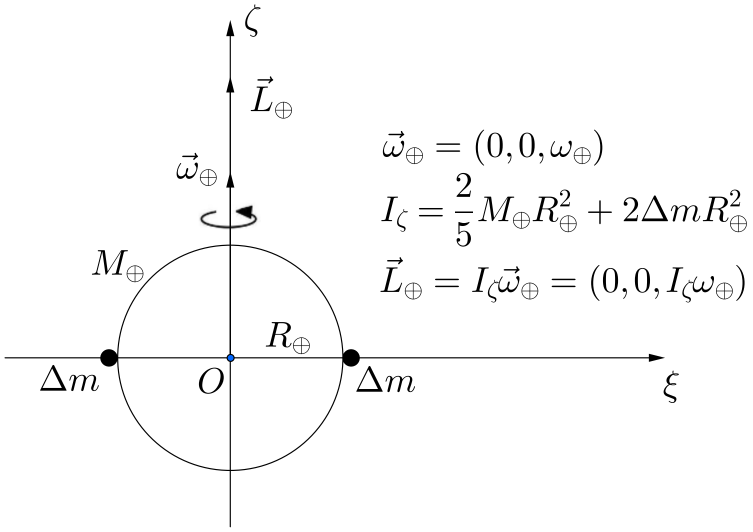

Figure 3: Per la Terra oblata secondo il modellino proposto nel testo scriviamo il vettore della sua velocità angolare di rotazione, il momento di inerzia I_ζ rispetto all'asse ζ (che rappresenta sia l'asse di simmetria che l'asse di rotazione) e il vettore del momento angolare di rotazione $\vec{L}_\oplus$ della Terra così schematizzata. La Terra ruota (rispetto al sistema inerziale delle stelle fisse) in senso antiorario (ed è per questo che essendo solidali con la Terra noi vediamo tutto girare in senso orario).

Per la Terra oblata del modellino rotante attorno a suo asse di simmetria lungo le ζ positive (Figura 3 il vettore velocità angolare nel riferimento $O\,\xi\,\eta\,\zeta$ (l'asse η che completa la terna è perpendicolare al piano del foglio, entrante; il piano $\xi\,,\eta$ è ovviamente il piano equatoriale della Terra) si scrive

$$\vec{\omega}_\oplus = (0, 0, \omega_\oplus) \quad . \tag{1}$$

Siccome in questo modello la Terra è simmetrica attorno all'asse ζ e ruota attorno a questo asse di simmetria, il vettore del momento angolare di rotazione $\vec{L}_\oplus$ è parallelo al vettore della velocità angolare di rotazione e il coefficiente di proporzionalità tra i due è il momento di inerzia della Terra rispetto all'asse ζ, che chiamiamo I_ζ . Nel riferimento $O\,\xi\,\eta\,\zeta$ il vettore $\vec{L}_\oplus$ si scrive

$$\vec{L}_\oplus = (0, 0, I_\zeta \omega_\oplus) \quad . \tag{2}$$

Se le due masse Δm del modellino raffigurano tutto il rigonfiamento equatoriale il momento di inerzia I_ζ è:

$$I_\zeta = \frac{2}{5} M_\oplus R_\oplus^2 + 2\Delta m R_\oplus^2 \quad . \tag{3}$$

Si noti che, fin tanto che la Terra si assume a simmetria di rotazione, questo semplicissimo modellino rappresenta una buona approssimazione della realtà se si aggiunge che il valore di $2\Delta m$ è pari alla massa di tutto il rigonfiamento equatoriale. Infatti, passare al modello con un intero anello equatoriale di massa totale $2\Delta m$ (invece delle due singole masse del nostro modello) non aggiungerebbe nulla.

Adesso consideriamo questa Terra in orbita attorno al Sole di massa $M_\oplus$ a distanza $d_{\oplus\odot}$ con il suo asse di rotazione inclinato di un angolo ε rispetto alla perpendicolare al piano dell'orbita come mostrato in Figura 2.

Nella Figura 4 riportiamo questa stessa figura disegnando in più i vettori delle forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ esercitate dal Sole sulle masse Δm_1 e Δm_2. Le frecce che rappresentano queste forze sono dirette, in ciascun caso, lungo la congiungente tra la massettina e il Sole (che assumiamo concentrato nel suo centro di massa) e puntano verso il Sole dato che la forza gravitazionale è attrattiva (trascuriamo le forze di reazione esercitate da queste massettine sul Sole). Inoltre, siccome la forza gravitazionale di Newton è inversamente proporzionale al quadrato delle distanza tra i corpi che si attraggono, disegnamo le forze in modo da evidenziare che $F_1 > F_2$ perché Δm_1 è più vicina al sole di Δm_2.

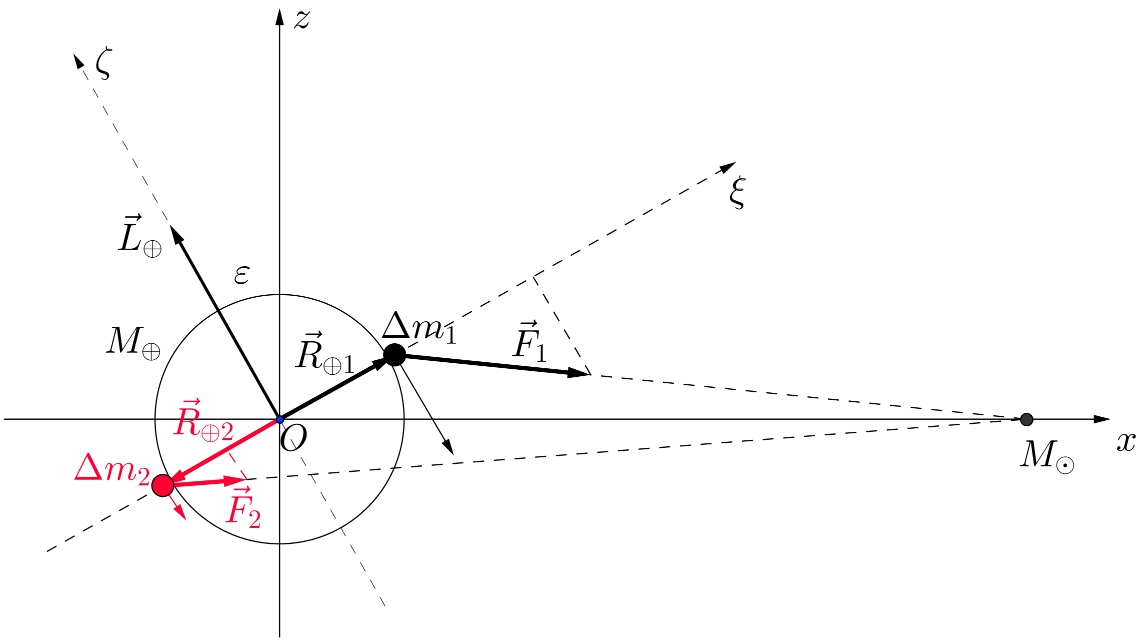

Figure 4: Le forze esercitate dal Sole sugli eccessi di massa equatoriali i cui momenti generano la precessione del momento angolare di rotazione della Terra attorno all'asse z

Ciascuna forza esercita un momento non nullo rispetto al centro di massa della Terra. Essi sono:

$$\vec{N}_1 = \vec{R}_{\oplus 1} \times \vec{F}_1 \qquad \vec{N}_2 = \vec{R}_{\oplus 2} \times \vec{F}_2 \tag{4}$$

e si capisce dalla Figura 4 che sono entrambi perpendicolari al piano $\xi\,,\zeta$ ma di verso opposto: $\vec{N}_1$ è entrante (η positive) mentre $\vec{N}_2$ è uscente (η negative). Come si vede bene in figura, la componente di ogni forza che contribuisce al momento è quella perpendicolare alla congiungente tra le masse, e siccome il braccio è lo stesso (e vale in modulo $R_\oplus$) è evidente che sul momento totale $\vec{N}$

$$\vec{N} = \vec{R}_{\oplus 1} \times \vec{F}_1 + \vec{R}_{\oplus 2} \times \vec{F}_2 \tag{5}$$

prevale il momento della forza $\vec{F}_1$, e quindi il momento totale delle forze esercitate dal Sole sulle masse del rigonfiamento equatoriale della Terra sarà diretto lungo la direzione delle η positive (che è anche la direzione delle y positive).

Essendo perpendicolare al vettore momento angolare di rotazione della Terra $\vec{L}_\oplus$ è evidente che non potrà aumentarne né diminuirle il modulo, cioè non farà girare la Terra né più piano né più forte attorno al proprio asse. Agendo nella direzione delle η positive il momento $\vec{N}$ farà variare la direzione del vettore $\vec{L}_\oplus$ in quella direzione. E siccome la Terra è simmetrica attorno all'asse ζ, e quindi il piano disegnato non ha nulla di speciale e si può immaginare un intero anello equatoriale invece delle due sole massettine nel piano $\xi\,,\zeta$ vediamo che il vettore $\vec{L}_\oplus$ descrive un cono (detto di precessione) attorno all'asse z. Notiamo anche che questo cono è percorso in senso orario, che è opposto a quello (antiorario) della rotazione della Terra.

Durante la precessione la componente $L_\oplus \cos\varepsilon$ (lungo l'asse z) resta costante mentre quella $L_\oplus \sin\varepsilon$ (nel piano $x\,,y$ ruota in senso orario con velocità angolare $\Omega = d\vartheta/dt$ (velocità angolare di precessione) che, come nel caso della trottola che abbiamo studiato a lezione si ottiene dall'equazione (nel tempo dt la componente $L_\oplus \sin\varepsilon$ ruota di $d\vartheta$ a causa del momento N:

$$L_\oplus \sin\varepsilon\, d\vartheta = N dt \quad \Omega = \frac{N}{L_\oplus \sin\varepsilon} \tag{6}$$

Dalla Figura 4 è evidente che se $\varepsilon = 0$ il Sole sta nello stesso piano delle massettine, il momento della forza è nullo e non si ha precessione. Si noti che in questo caso l'eq. (6) non si può scrivere, perché non si ha precessione ed essa avrebbe sia numeratore che denominatore nulli. Quando si ha precessione il denominatore è di sicuro diverso da zero, e quindi si può scrivere. Infine, se la Terra fosse perfettamente sferica le massettine sarebbero nulle e anche in questo caso non si avrebbe precessione. Quindi, il fenomeno della precessione (detta lunisolare perché oltre al Sole contribuisce anche la Luna) si ha perché la terra è oblata e (allo stesso tempo) il suo asse di rotazione non è esattamente allineato con l'asse perpendicolare alla sua orbita attorno al Sole.