Fisica I, *a.a.* 2013–2014 – Terzo Appello
29 Luglio 2014

Anna M. Nobili

1 Forza di gravità, forza di Archimede, equilibrio e stabilità

Secondo la legge detta di Archimede un corpo immerso in un liquido è soggetto ad una forza dal basso verso l'alto pari al peso del liquido da esso spostato.

- 1) Scrivete la condizione che deve essere soddisfatta affinché un corpo solido di densità uniforme non affondi in acqua.
- 2) Sapreste dire quanto vale la densità media di un corpo umano? E quali accorgimenti conviene usare per restare a galla?

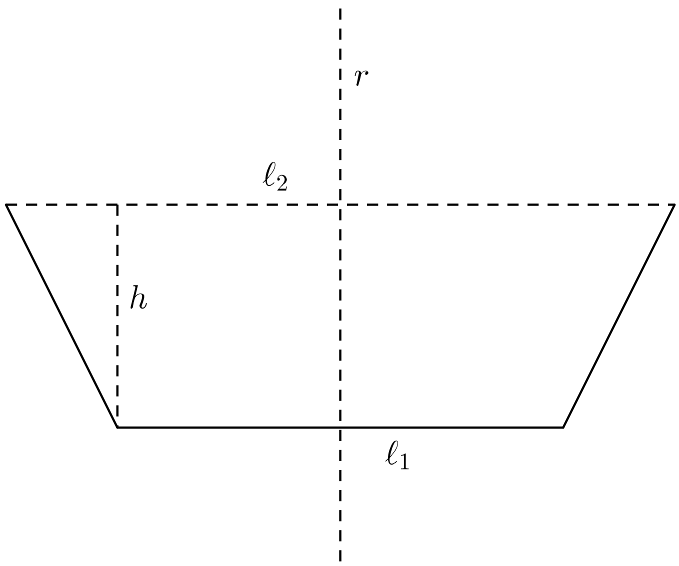

Figure 1: La barca ha una sezione trasversale (cioè perpendicolare alla direzione dello scafo) a forma di trapezio isoscele rovesciato con base minore $\ell_1 = 2\,\mathrm{m}$, base maggiore $\ell_2 = 3\,\mathrm{m}$, $h = 1\,\mathrm{m}$ e lunghezza dello scafo (non mostrato) $L = 6\,\mathrm{m}$. In questa sezione la retta r indica la direzione dell'asse di simmetria della barca.

Considerate una barca che abbia, per semplicità di calcoli, una sezione trasversale a forma di trapezio isoscele come in Fig.1. Lo spessore del fondo e di tutti gli altri lati che formano la barca è $s = 2\,\mathrm{cm}$ e può essere trascurato ai fini della sua forma; lo si usa soltanto per calcolare la massa della barca sapendo che è fatta di un materiale di densità uniforme ϱ. La barca porta un carico $m_c = 400\,\mathrm{kg}$.

- 3) Se la barca è fatta in lega di alluminio di densità uniforme $\varrho_{Al} = 2.7\,\mathrm{g/cm^3}$, dite se può galleggiare e se si quanto vale l'altezza h_p che sarà immersa nell'acqua (cioè, di quanto pesca la barca carica). Fate il conto assumendo che la superficie dell'acqua sia piatta e che il carico sia distribuito simmetricamente in modo che la barca si trovi in posizione orizzontale. Se il carico consiste di 5 persone, mostrate una possibile distribuzione simmetrica che mantenga la barca orizzontale.

- 4) Disegnate le forze in gioco indicando i rispettivi punti di applicazione nel caso in cui la barca sia in equilibrio.

- 5) Considerate una nave su un mare piatto. Il fondale della nave è parallelo alla superficie dell'acqua e il suo centro di massa giace lungo l'asse di simmetria (definito come per la barca di Fig. 1). L'asse di simmetria si inclina di un angolo α (ad esempio verso destra) a causa di una cattiva distribuzione del carico. In questa configurazione inclinata disegnate la forza di gravità e la forza di Archimede con i rispettivi punti di applicazione. In quale caso la nave tornerà in posizione verticale e in quale invece si rovescerà di lato?

- 6) Considerate un sottomarino schematizzato, per semplicità, come un cilindro orizzontale il cui asse è parallelo alla superficie orizzontale dell'acqua. Come può sia galleggiare che immergersi completamente? E come può rimanere ad una certa profondità senza affondare?

- 7) La struttura interna del sottomarino è organizzata in modo tale che quando il carico è distribuito simmetricamente un marinaio in piedi risulta parallelo alla direzione della gravità locale (che è perpendicolare alla superficie dell'acqua) e quindi dal punto di vista della gravità è come se si trovasse sulla terraferma. Considerate l'asse di simmetria del sottomarino (immerso) (definito come per la barca di Fig. 1) passante per il suo centro di massa. Se questo asse si inclina come nel caso della nave disegnate la forza gravitazionale e quella di Archimede con i rispettivi punti di applicazione e dite cosa può succedere (il sottomarino tornerà nella posizione corretta oppure no?) Noterete una differenza molto importante tra questo caso e il caso 4 (quello della nave inclinata). Dite qual'è questa differenza e a cosa è dovuta.

2 Soluzione

- 1) Sia m_{corpo} la massa del corpo considerato, V_{corpo} il suo volume e $\varrho_{corpo} = m_{corpo}/V_{corpo}$ la sua densità, per ipotesi uniforme. Supponiamo che galleggi quando una frazione $f < 1$ del suo volume è immersa nell'acqua. Ciò accade se la forza gravitazionale (diretta verso il basso) $F_g = m_{corpo}g$ e quella di Archimede (diretta verso l'alto) $F_A = m_{acquaspostata}g$ sono dirette lungo la stessa direzione e hanno lo stesso modulo. In questo caso:

$$m_{corpo} = m_{acqua\,spostata} \ , \ fV_{corpo}\varrho_{acqua} = V_{corpo}\varrho_{corpo} \ \Rightarrow \varrho_{corpo} = f\varrho_{acqua} \ \Rightarrow \ \varrho_{corpo} < \varrho_{acqua} \tag{1}$$

  Si conclude che un corpo in acqua galleggia se la sua densità è minore di quella dell'acqua. Quanto più la densità del corpo è piccola rispetto a quella dell'acqua, tanto più piccola è la frazione di volume del corpo immersa in acqua in condizione di galleggiamento.

- 2) E' noto che il corpo umano può galleggiare in acqua. Segue dalla (1) che la sua densità (media) è minore di quella dell'acqua. Siccome non è facilissimo galleggiare, vuol dire che la densità media del corpo umano non è molto minore di quella dell'acqua. Quindi è bene spostare il maggior volume di acqua possibile, ad esempio immergendo la testa il più possibile invece di tenerla sollevata. Conviene stare distesi orizzontalmente per aumentare la superficie di contatto e per ottenere che i punti di applicazione delle due forze siano entrambi lungo la verticale locale. Inoltre, inspirando aria si diminuisce la densità media del nostro corpo e si galleggia più facilmente; ad esempio, quando si nuota a dorso conviene inspirare quando si sollevano le braccia, dato che quando le braccia sono solelvate si sposta una minore massa di acqua. Infine è noto che per galleggiare conviene stare fermi e non agitarsi. Questo perché restando immobili (e distesi) il centro di massa del corpo (al quale è applicata la forza gravitazionale) e il centro di massa del liquido spostato (al quale è applicata la forza di Archimede, restano fermi lungo la verticale e questo favorisce il bilanciamento di queste due forze. Senza contare che agitandosi scompostamente si rischia di diminuire la frazione di volume del nostro corpo immersa in acqua, il che diminuisce il volume di acqua spostata e quindi la forza di Archimede.

- 3) Calcoliamo la massa della barca con la forma e la densità proposte. Usiamo unità SI, quindi $\varrho_{Al} = 2.7\,\mathrm{g/cm^3} = 2.7 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$; $s = 2\,\mathrm{cm} = 0.02\,\mathrm{m}$. La massa del fondale è:

$$m_{fondale} = \ell_1 L s \varrho_{Al} \tag{2}$$

  Sia:

$$\delta = \frac{\ell_2 - \ell_1}{2} = 0.5\,\mathrm{m} \tag{3}$$

  Il lato obliquo del trapezio, che indichiamo con ℓ_3, è:

$$\ell_3 = \sqrt{\delta^2 + h^2} = 1.118\,\mathrm{m} \tag{4}$$

  La massa delle 2 fiancate laterali della barca è:

$$m_{fiancate} = 2\ell_3 L s \varrho_{Al} \tag{5}$$

  La massa delle due fiancate di prua e di poppa è:

$$m_{pruapoppa} = 2(\ell_1 + \delta) h s \varrho_{Al} \tag{6}$$

La massa della barca è:

$$m_{barca} = [((\ell_1 + 2\ell_3)L + 2(\ell_1 + \delta)h)s]\varrho_{Al} \tag{7}$$

e vale:

$$m_{barca} = [((2+2\cdot 1.118)\cdot 6+2\cdot 2.5)0.02]\cdot 2.7\cdot 10^3\,\mathrm{kg} = (0.608\,\mathrm{m}^3)\cdot 2.7\cdot 10^3\,\mathrm{kg/m}^3 = 1642\,\mathrm{kg} \tag{8}$$

La massa totale, compreso il carico, è:

$$m_{tot} = m_{barca} + m_c = 2042\,\mathrm{kg} \tag{9}$$

Se la barca fosse tutta immersa (rimanendo perfettamente orizzontale) sposterebbe un volume di acqua pari al proprio volume totale, cioè:

$$V_{barca} = (\ell_1 + \delta)hL = 15\,\mathrm{m}^3 \tag{10}$$

e la massa di questo volume di acqua spostata (valore massimo possibile) sarebbe:

$$m_{acqua\ max} = (\ell_1 + \delta)hL\varrho_{acqua} = 15\cdot 10^3\,\mathrm{kg} = 1.5\cdot 10^4\,\mathrm{kg} \tag{11}$$

Se invece la barca pesca di una altezza $h_p < h$ la massa del volume di acqua spostato dalla barca è:

$$m(h_p) = (\ell_1 + \delta_p)h_pL\varrho_{acqua} = \frac{h_p}{h}\cdot 1.5\cdot 10^4\,\mathrm{kg} \tag{12}$$

dove δ_p è definito in Fig. 2. Da questa figura si vede che:

$$\frac{\delta_p}{h_p} = \frac{\delta}{h} \tag{13}$$

e quindi la massa di acqua spostata quando la barca pesca di una altezza h_p dipende solo dala valore di h_p:

$$m(h_p) = (\ell_1 + \frac{\delta}{h}h_p)h_pL\varrho_{acqua} = \frac{h_p}{h}\cdot 1.5\cdot 10^4\,\mathrm{kg} \tag{14}$$

La barca con il suo carico (ben distribuito in modo che resti orizzontale) sarà in equilibrio se $m(h_p) = m_{tot}$ e quindi l'altezza di pescaggio h_p deve soddisfare l'equazione di secondo grado:

$$h_p^2(\frac{\delta}{h}L\varrho_{acqua}) + h_p(L\ell_1\varrho_{acqua}) - m_{tot} = 0 \tag{15}$$

Questa equazione ha due soluzioni:

$$(h_p)_{1,2} = -\frac{\ell_1 h}{2\delta} \pm \frac{\ell_1 h}{2\delta}\sqrt{1 + \frac{4\delta m_{tot}}{hL\ell_1^2\varrho_{acqua}}} \tag{16}$$

Evidentemente la soluzione con il segno meno non è accettabile perché darebbe una altezza di pescaggio negativa. Quindi, l'unica soluzione è:

$$(h_p)_1 = \frac{\ell_1 h}{2\delta}\left(\sqrt{1 + \frac{4\delta m_{tot}}{hL\ell_1^2\varrho_{acqua}}} - 1\right) \tag{17}$$

e con i numeri del problema vale:

$$(h_p)_1 = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 0.5}\left(\sqrt{1 + \frac{4 \cdot 0.5 \cdot 2042}{1 \cdot 6 \cdot 2^2 \cdot 1000}} - 1\right) = 0.16\,\mathrm{m} = 16\,\mathrm{cm} \tag{18}$$

Se nella (14) avessimo usato $\delta_p = \delta$ (che non è esatto ma semplifica i conti) avremmo avuto, all'equilibrio, una equazione di primo grado in h_p e il suo valore numerico sarebbe stato di 13.6 cm, che è un po' minore di quello ottenuto facendo il conto preciso.

Se il carico è costituito da 5 persone, un modo furbo per distribuirlo è: uno a poppa in posizione centrale (llungo l'asse longitudinale della barca), 2 a prua ai due lati opposti, due un pochino più vicini a prua che a poppa sempre ai due lati opposti.

- 4) La forza gravitazionale è applicata al centro di massa del sistema barca più carico; la forza di Archimede è applicata al centro di massa del volume di acqua spostata dalla barca, che all'equilibrio pesca del valore h_p dato dalle (17) e (18). Se il carico è ben distribuito e la barca è orizzontale la situazione all'equilibrio è come in Fig. 2.

- 5) Per la nave le forze in gioco sono mostrate in Fig. 3. Il caso (a) è come quello della barca e la nave è in equilibrio (c.g. indica in centro di gravità cui è applicata la forza gravitazionale e c.p. il centro di pressione cui è applicata la forza di Archimede. Se si inclina verso destra la nave è stabile nel caso (b) ma instabile nel caso (c), nel quale si rovescia sul fianco destro. Infatti il centro di pressione, che è il centro di massa del volume di acqua spostata, cambia quando la nave si inclina, e se finisce alla sinistra della verticale locale si vede dalla coppia di forze che anziché contribuire a raddrizzare la nave contribuisce ad inclinarla sempre di più.

- 6) Il sottomarino può immettere ed espellere acqua (in serbatoi diretti in senso longitudinale). In questo modo può aumentare e diminuire la propria massa, e quindi immergersi o salire in superficie. Basta causare una piccola differenza tra le due forze, e quindi non ci vuole molta acqua (da immettere o espellere, salvo che si voglia immergersi o risalire molto in fretta). Per restare ad una certa quota senza dover azionare continuamente i serbatoi il sottomarino sfrutta l'aumento di salinità dell'acqua marina (e quindi della sua densità) che avviene ad un certa profondità. Quando arriva a questo strato, se scende un po' l'acqua più densa esercita una maggiore forza di Archimede e lo fa risalire; salendo trova acqua meno densa e quindi scende, e così resta sempre al livello in cui la salinità cambia.

- 7) Per un sottomarino in posizione verticale l'equilibrio delle forze è come in Fig. 4 (a). Il centro di gravità giace sull'asse di simmetria (la distribuzione di massa è fatta in modo che lo sia per ovvie ragioni), Poiché, a differenza della nave, il sottomarino è tutto immerso, il baricentro della massa di acqua spostata sta necessariamente sull'asse di simmetria. Tuttavia i due non sono in generale coincidenti. Se il sottomarino si inclina verso destra, l'equilibrio è stabile (torna nella posizione verticale) se il centro di gravità è sotto al centro di pressione; instabile (si inclina ancora di più) se il centro di gravità è sopra al centro di pressione. Nel caso particolare in cui il centro di gravità coincide con il centro di pressione l'equilibrio è indifferente (qualsiasi posizione è una posizione di equilibrio). Il problema è del tutto analogo a quello di un corpo sospeso: il centro di pressione ha lo stesso ruolo del punto di sospensione del corpo. La differenza fondamentale dal caso della nave è che la nave non è tutta immersa, perciò quando si inclina il volume di acqua spostato cambia e quindi il baricentro della massa di acqua corrispondete (che è il centro di pressione al quale si applica la forza di Archimede) si allontana dall'asse di simmetria.

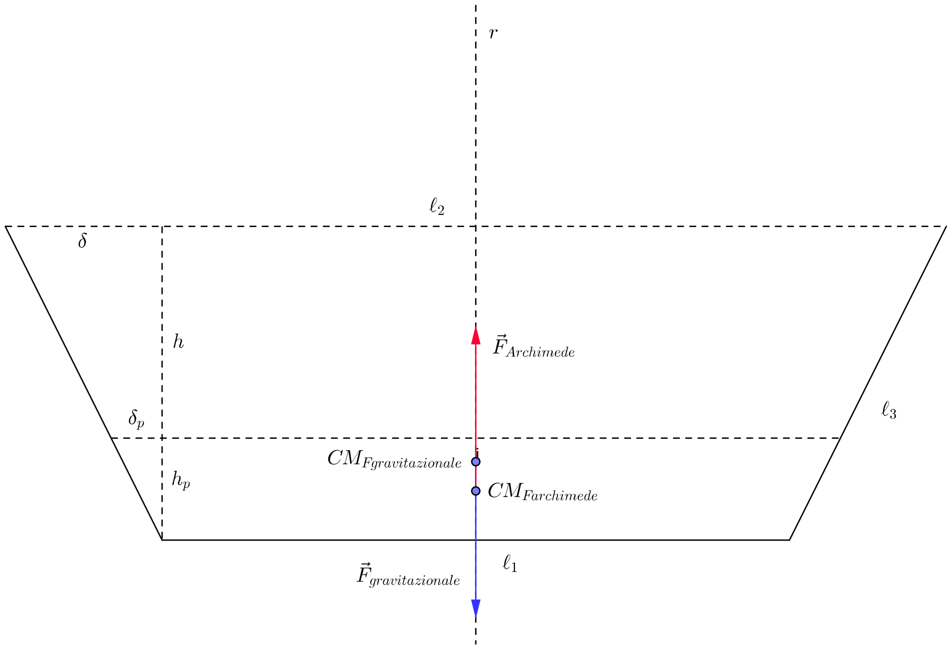

Figure 2: La barca è perfettamente orizzontale, si assume che il carico sia distribuito in modo che il CM sia lungo l'asse di simmetria della barca. Ad esso è applicata la forza gravitazionale che agisce su barca più carico (si chiama anche "centro di gravità").h_p è l'altezza di pescaggio. $CM_{Farchimede}$ è il centro di massa del volume di acqua spostata dalla barca e ad esso è applicata la forza di Archimede (si chiama anche "centro di pressione"). All'equilibrio le due forze hanno lo stesso modulo. Si noti che i due punti di applicazione non coincidono e quindi è cruciale che siano lungo lo stesso asse, altrimenti si crea una coppia di forze che potrebbe inclinare la barca fino a far entrare acqua (che aumenta il carico e quindi può portare all'affondamento)

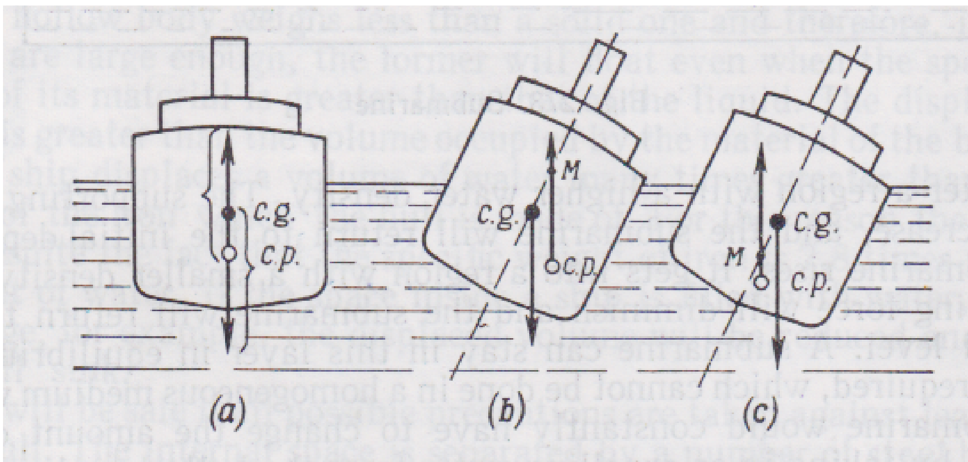

Figure 3: Caso della nave. Il pallino nero indica il punto di applicazione delle forza gravitazionale (è il baricentro di tutta la nave); quello bianco indica il punto di applicazione della forza di Archimede (è il baricentro della massa di acqua spostata dalla parte di nave immersa). Si vede bene che nel caso (b) la nave è stabile, cioè si raddrizza, mentre quello (c) è instabile (la nave si inclina sempre di più).

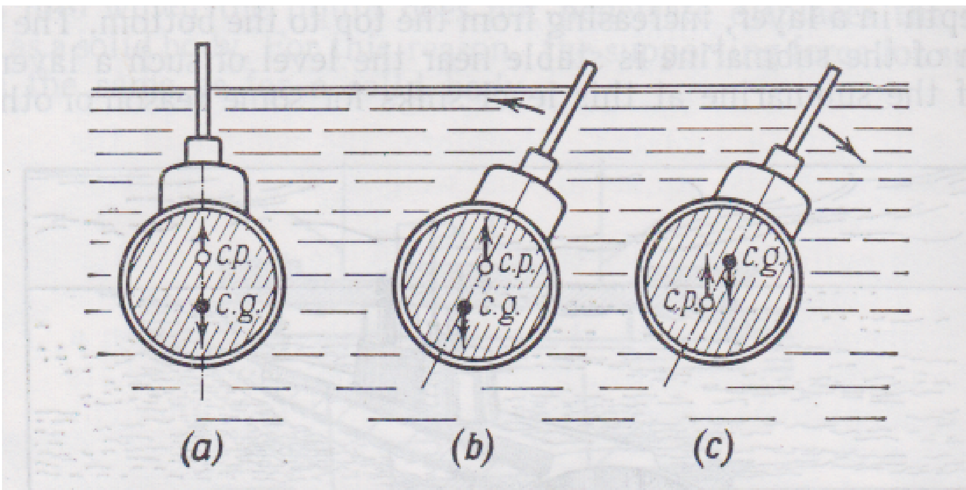

Figure 4: Caso del sottomarino. Essendo tutto immerso il volume di acqua spostato è sempre lo stesso indipendentemente dall'inclinazione e quindi il centro di pressione (al quale è applicata la forza di Archimede) giace sempre sull'asse si simmetria del sottomarino. L'equilibrio è stabile se il centro di gravità è sotto al centro di pressione, instabile nel caso contrario, indifferente nel caso particolare in cui i due coincidano.