Fisica I, *a.a.* 2014–2015 – Primo compitino

16 Dicembre 2014 Ore 15 Aula PN5 Polo Porta Nuova

Anna M. Nobili

1 Moto in un riferimento accelerato nel vuoto e sulla Terra (caso Terra piatta)

Considerate nello spazio vuoto due sistemi di riferimento coincidenti: $OXYZ$ e O_axyz. In entrambi i casi gli assi coordinati sono tra loro ortogonali. Un laboratorio di dimensioni L_x, L_y, L_z e massa M è solidale con il riferimento O_axyz. Nel suo centro di massa (calcolato assumendo che le pareti del laboratorio siano fatte dello stesso materiale, abbiano spessore trascurabile e distribuzione di massa uniforme) si trova un corpo puntiforme di massa $m \ll M$ con velocità nulla e non soggetto ad alcuna forza.

Al tempo $t = 0$ il riferimento O_axyz con il quale è solidale il laboratorio inizia a muoversi con accelerazione costante $\vec{a} = (a_X, a_Y, a_Z)$ e velocità iniziale nulla.

1. Disegnate i due riferimenti, il laboratorio e la posizione del punto massa m come risultano ad un tempo $t < 0$ (tenente conto che le dimensioni L_x, L_y, L_z sono in generale diverse l'una dall'altra). Scrivete le coordinate di m e verificate che nel disegno la sua posizione sia riportata con le corrette proporzioni.

2. Considerate il caso semplice $\vec{a} = (0, a_Y, 0)$. Scrivete l'equazione del moto del punto massa m nel sistema O_axyz ad un tempo generico $t \geq 0$. Risolvetela con le condizioni iniziali date al tempo $t = 0$ arrivando a scrivere la posizione di m nel laboratorio al tempo $t > 0$. Nel caso $L_x = L_y = L_z = 10\,\mathrm{m}$ e $a_Y = 10^{-3}\,\mathrm{ms}^{-2}$, dite dove si troverà m al tempo $t_1 = +100\,\mathrm{s}$ e quale traiettoria ha percorso per arrivarci.

3. Come fareste, agendo sulla massa m, ad ottenere che per $t \geq 0$ essa resti ferma nel centro di massa del laboratorio? Potreste ottenere lo stesso risultato agendo sul laboratorio anziché sulla massa m? Se si, dite qual'è la differenza tra i due casi ed esprimetela in modo quantitativo nel caso $M = 10^4\,\mathrm{kg}$, $m = 1\,\mathrm{g}$. Descrivete anche cosa vedrebbe in ciascuno nei due casi l'osservatore fermo O.

Immaginate che il laboratorio solidale col riferimento O_axyz, e coincidente con il riferimento fisso $OXYZ$ per $t < 0$, sia ora un treno sulla superficie della terra piatta che a $t = 0$ inizia a muoversi senza attrito con accelerazione costante $\vec{a} = (0, a_Y, 0)$. Le condizioni iniziali della massa m sono le stesse del caso "spazio vuoto".

4. Scrivete l'equazione del moto della massa m in O_axyz (dentro il treno) e risolvetela.

5. Quale differenza qualitativa vi aspettate nel suo moto per il fatto di essere sulla superficie della Terra piatta anziché nel vuoto?

6. Quale traiettoria percorre la massa m nel riferimento O_axyz (cioè dentro il treno)?

2 Soluzione

1. Disegno. La massa m per $t \leq 0$ si trova in $\vec{R}_m = \left(\frac{L_x}{2}, \frac{L_y}{2}, \frac{L_z}{2}\right)$

2. L'equazione del moto della massa m nel riferimento solidale con il laboratorio è: $\ddot{y}(t) = -a_Y$. Integrandola: $\dot{y}(t) = -at$ (la velocità iniziale è nulla), $y(t) = -\frac{1}{2}at^2 + \frac{L_y}{2}$. Quindi, dentro il laboratorio la massa m si muove di moto uniformemente accelerato in verso opposto a quello del laboratorio stesso. Calcolo il tempo finale t_f quando arriverà a toccare la parete posteriore: $0 = -\frac{1}{2}at_f^2 + \frac{L_y}{2} \;\Rightarrow\; t_f = \sqrt{\frac{L_y}{a_Y}}$. Con i valori dati al tempo t_1 la massa m è arrivata alla parete posteriore del laboratorio. La traiettoria percorsa è il segmento che che unisce il centro di massa del laboratorio al punto che nel riferimento O_axyz (il riferimento solidale con il laboratorio) ha coordinate $\left(\frac{L_x}{2}, 0, \frac{L_z}{2}\right)$.

3. Se si applica una forza $\vec{f} = (0, +ma_Y, 0)$ sulla massa m questa non si muove rispetto al laboratorio. L'osservatore O vede il laboratorio muoversi con accelerazione $\vec{a}_Y = (0, a_Y, 0)$ e la massa m sta fermo rispetto al laboratorio e quindi si muove anch'esso rispetto ad O con accelerazione costante $\vec{a}_Y = (0, a_Y, 0)$. Se per $t \geq 0$, quando il laboratorio si muove con accelerazione $\vec{a} = (0, a_Y, 0)$, si applica su di esso laboratorio una forza $\vec{F} = (0, -Ma_Y, 0)$ il laboratorio resterà fermo, e quindi anche la massa m posta nel suo centro di massa. L'osservatore O vedrà tutto fermo, laboratorio e massa m. Con i valori dati la forza da applicare sul laboratorio è 10^6 volte più grande di quella da applicare alla massa m.

4. Scrivo e integro le equazioni del moto con le condizioni iniziali date. Il moto si svolge in un piano parallelo al piano y, z e passante per la retta di equazione $x = \frac{L_x}{2}$. Vale:

$$\ddot{z}(t) = -g \tag{1}$$
$$\ddot{y}(t) = -a_Y \tag{2}$$

$$\dot{z}(t) = -gt \tag{3}$$
$$\dot{y}(t) = -a_Y t \tag{4}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{L_z}{2} \tag{5}$$
$$y(t) = -\frac{1}{2}a_Y t^2 + \frac{L_y}{2} \tag{6}$$

5. La differenza è la presenza della accelerazione locale di gravità $\vec{g} = (0.0, -g)$ dovuta alla attrazione gravitazionale della Terra (che sulla sua superficie approssimiamo come uniforme). La forza gravitazionale è proporzionale alla massa gravitazionale; quella inerziale alla massa inerziale. Siccome vale il principio di equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale le equazioni del moto che abbiamo scritto per la massa m valgono per qualsiasi corpo indipendentemente dalla sua massa e/o composizione.

6. Dalle equazioni (5), che sono le leggi orarie per le due coordinate della massa m nel piano del moto, si vede che le posizioni variano quadraticamente col tempo, quindi se le rappresentassi graficamente otterrei per ciascuna di esse un ramo di parabola. Per ottenere la traiettoria percorsa dalla massa m nel piano individuato, che è ciò che chiede il testo, devo eliminare

il tempo da queste due equazioni e scrivere $z(t)$ in funzione di $y(t)$. E' evidente che otterrò l'equazione di una retta:

$$z(t) = \frac{g}{a_Y} y(t) + \frac{L_z}{2} - \frac{g}{a_Y}\frac{L_y}{2} \quad . \tag{7}$$

Nel piano del moto la retta ha pendenza $\frac{g}{a_Y}$. Per disegnarla mi bastano due punti. So che all'istante iniziale deve essere:

$$z(0) = \frac{L_z}{2} \quad y(0) = \frac{L_y}{2} \quad . \tag{8}$$

Dalla (7) vedo che se:

$$\frac{L_z}{2} - \frac{g}{a}\frac{L_y}{2} \geq 0 \quad , \quad a \geq g\frac{L_y}{L_z} \tag{9}$$

allora il moto finisce quando $y(t_f) = 0$ con $t_f = \sqrt{\frac{L_y}{a_Y}}$, e vale $z(t_f) = \frac{L_z}{2} - \frac{g}{a}\frac{L_y}{2} \geq 0$.

Se invece vale

$$\frac{L_y}{2} - \frac{a}{g}\frac{L_z}{2} \geq 0 \quad , \quad a \leq g\frac{L_y}{L_z} \tag{10}$$

allora il moto finisce quando $z(t_f) = 0$ con $t_f = \sqrt{\frac{L_z}{g}}$, e vale $y(t_f) = \frac{L_y}{2} - \frac{a}{g}\frac{L_z}{2} \geq 0$.