Fisica I, *a.a.* 2014–2015 – Secondo compitino

7 Maggio 2015, Ore 11:30 Aula delle lezioni

Anna M. Nobili

1 Oscillatore armonico con due masse nel piano

Considerate un sistema isolato composto da due corpi di uguale massa m collegati da una molla (di lunghezza a riposo e massa trascurabili) liberi di muoversi nel piano x, y senza attrito e senza alcune dissipazione di energia. Il moto viene studiato nel sistema di riferimento inerziale Oxy la cui origine O coincide con il centro di massa.

1. Disegnate in questo sistema di riferimento le due masse e la molla in una posizione generica del piano.

2. Sapendo che la parte di molla dal centro di massa ad ognuno dei due corpi ha costante elastica k, calcolate quanto vale la costante elastica della molla complessiva che congiunge i due corpi.

   Rispondete a questa domanda risolvendo il seguente problemino. Considerate una molla fissata ad una estremità e fatta di due parti di costanti elastiche k_1 e k_2. Applicate una forza F alla estremità libera della molla nella direzione della molla stessa. Calcolate l'allungamento $\Delta\ell_1$ della prima parte e l'allungamento $\Delta\ell_2$ della seconda parte prodotti dalla forza F. Adesso considerate una singola molla invece delle due precedenti, di costante elastica k ignota. Imponendo che sotto l'azione della stessa forza F questa molla produca un allungamento $\Delta\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2$ otterrete il valore della costante elastica k di una singola molla equivalente alle due date. Nel caso particolare in cui $k_1 = k_2$ avrete la risposta cercata.

3. Scrivete le equazioni del moto di ciascuna massa nel sistema di riferimento Oxy definito al punto 1. Indicate con $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ le variabili posizione delle due masse e con $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ il vettore posizione relativa cha va dalla prima massa alla seconda. Indicate nel disegno fatto al punto 1 i vettori $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ ed $\vec{r}$.

4. Dalle due equazioni del moto per le variabili $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ passate ad una sola equazione del moto nella variabile $\vec{r}$. In un riferimento $O'xy$ con origine fissa nella prima massa la variabile $\vec{r}$ che soddisfa questa equazione descrive il moto del sistema. Fate un nuovo disegno che mostri il piano $O'xy$ e un vettore posizione $\vec{r}$ coerente con il primo disegno. Scrivete le due equazioni del moto per le due componenti del vettore $\vec{r} = (x, y)$. Scrivete la soluzione $x(t), y(t)$ (cioè la legge oraria) sapendo che le condizioni iniziali sono: $x(0){=}A$, $y(0){=}0$; $\dot{x}(0){=}0$, $\dot{y}(0){=}B\sqrt{k/m}$.

5. Eliminate il tempo dalle equazioni $x(t), y(t)$ in modo da scrivere l'equazione della traiettoria. Dite di che tipo di curva si tratta e tracciatela nel disegno precedente (nel caso che sia $A > B$).

6. Considerate adesso il caso $A{=}B$. Invece di scrivere separatamente le due soluzioni $x(t), y(t)$ immaginate di essere nel piano complesso e scrivete la soluzione come $z(t) = x(t) + iy(t)$ nella forma $z(t) = \varrho e^{i\vartheta(t)}$. Come fareste a rappresentare la soluzione nel piano complesso se fosse $A \neq B$ (ad esempio: $A > B$)?

2 Soluzione

1. Vedi Fig. 1

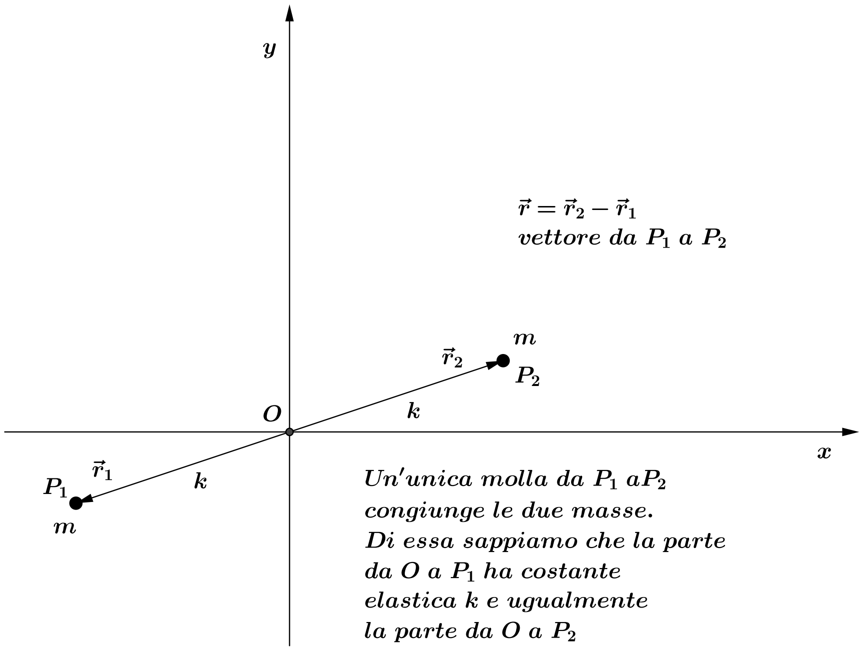

Figure 1: Il sistema di due masse uguali collegate da una molla di lunghezza a riposo e massa trascurabili. Al tempo generico t cui si riferisce il disegno la molla (non mostrata in figura) è allungata da P_1 a P_2 quindi per tutto il vettore $\vec{r}$. Dalla risposta al punto 2 sappiamo che se ciascuna metà della molla ha costante elastica k, tutta la molla ha costante elastica $k/2$

2. Tutto si svolge in una dimensione definita dalla molla, quindi posso evitare di usare i vettori (e infatti il testo indica la forza F senza il segno di vettore).

   Data una molla a riposo, una forza esterna applicata nella direzione della molla ha per detto di allungarla fino ad un nuovo punto di equilibrio in cui la forza applicata è bilanciata esattamente dalla forza elastica di richiamo della molla, che è proporzionale alla sua costante elastica. L'allungamento prodotto dalla forza applicata si ottiene quindi dividendo tale forza per la costante elastica.

   Se si applica la forza F ad una molla fatta da due parti di costanti elastiche k_1 e k_2, la forza, trasmettendosi ad entrambe le molle, produrrà gli allungamenti:

$$\Delta\ell_1 = \frac{F}{k_1} \qquad \Delta\ell_2 = \frac{F}{k_2} \tag{1}$$

   e quindi un allungamento totale dato dalla loro somma: $\Delta\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2$.

   Vogliamo sapere la costante elastica k di una molla che sotto l'azione della stessa forza produce $F/k = \Delta\ell$ con $\Delta\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2$. Quindi deve essere:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \tag{2}$$

da cui notiamo che se le due parti di molla hanno la stessa costante elastica, la singola molla equivalente ad esse ha costante elastica pari alla metà di ciascuna di esse. Nel caso di Fig. 1 la costante elastica della molla che congiunge le due masse è $k/2$. Notiamo en passant che se $k_1 \gg k_2$, si ha $k = k_2$.

3. Le due equazioni del moto per le due masse di Fig. 1 sono:

$$m\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{k}{2}\vec{r} \tag{3}$$

$$m\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{k}{2}\vec{r} \tag{4}$$

4. Dalle equazioni precedenti, sottraendo la prima dalla seconda, otteniamo una sola equazione:

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} \tag{5}$$

che è equivalente alla due precedenti e che è stata ottenuta senza fare alcuna approssimazione o ipotesi, e quindi descrive il moto delle due masse. Poiché sappiamo dal punto 2 che la molla che congiunge le due masse deve avere costante elastica $k/2$, riscriviamo questa equazione nella forma che segue:

$$\frac{m}{2}\ddot{\vec{r}} = -\frac{k}{2}\vec{r} \quad . \tag{6}$$

Si tratta ovviamente della stessa equazione. In questa forma ci dice che il sistema da cui siamo partiti, di due masse uguali collegate da una molla di costante elastica $k/2$, è equivalente a quello di una sola massa di massa pari alla massa ridotta del sistema (che in questo caso vale $m/2$ perché le due masse sono uguali) che si muove intorno ad una origine O' con raggio vettore $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (e quindi O' coincide con il punto P_1 di Fig. 1) alla quale è collegata da una molla con costante elastica $k/2$. Questo sistema ridotto ad un solo corpo è rappresentato in Fig. 2.

Nel caso generale di due masse diverse m_1, m_2 collegate da una molla di costante elastica totale $k/2$ le eq. del moto sono:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{k}{2}\vec{r} \qquad m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{k}{2}\vec{r} \tag{7}$$

Moltiplicando la seconda per m_1, la prima per m_2 e sottraendo la prima dalla seconda, ci si riduce ad una sola equazione:

$$\mathcal{M}\ddot{\vec{r}} = -\frac{k}{2}\vec{r} \tag{8}$$

dove $\mathcal{M}$ è la massa ridotta:

$$\mathcal{M} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{9}$$

che è del tutto analoga alla (2) la quale fornisce la costante elastica equivalente di due molle disposte in serie. Anche per le masse, se $m_1 = m_2$, la massa ridotta è $\mathcal{M} = m/2$. Notiamo che in questo caso nell'origine O' non c'è nessuna massa, è solo un punto fisso al quale la massa ridotta (in questo caso $m/2$) è collegata da una molla di costante elastica $k/2$ con un raggio vettore $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_2$.

L'equazione vettoriale del moto del problema ridotto scritta nelle due componenti $\vec{r} = (x, y)$ è:

$$\ddot{x} = -\omega_\circ^2 x \tag{10}$$

$$\ddot{y} = -\omega_\circ^2 y \tag{11}$$

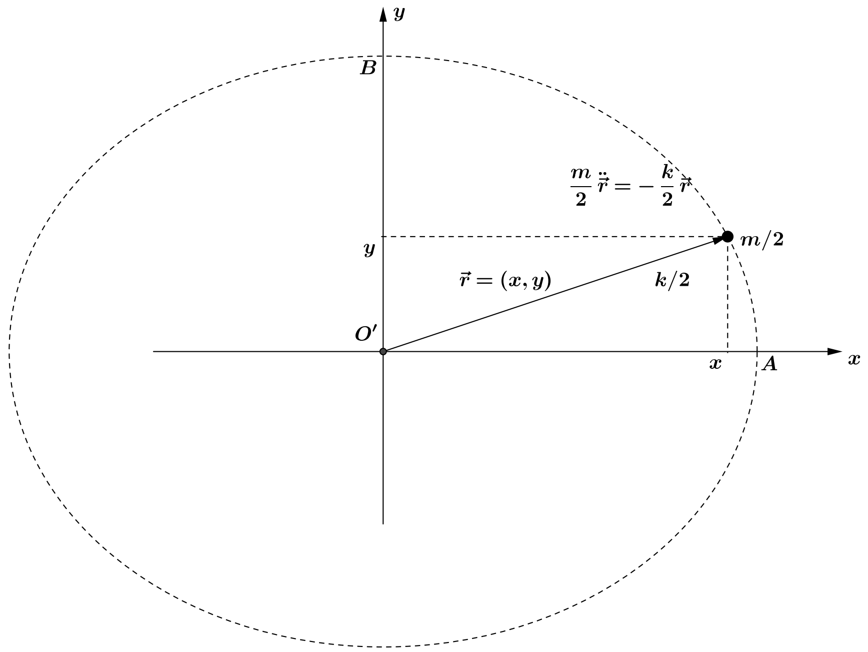

Figure 2: Il sistema di due masse dato e mostrato in Fig. 1 è stato ridotto ad un solo corpo di massa pari alla massa ridotta e raggio vettore della posizione istantanea $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. La molla di costante elastica $k/2$ (non disegnata in figura) va dall'origine O' alla massa ridotta. La traiettoria è una ellisse. Con le condizioni iniziali date gli assi maggiore e minore dell'ellisse sono gli assi coordinati.

dove $\omega_\circ = \sqrt{k/m}$ è la frequenza naturale dell'oscillatore armonico del problema ridotto mostrato in Fig. 2. Le soluzioni di queste equazioni sono del tipo coseno e seno, e con le condizioni iniziali date nel testo le possiamo scrivere come:

$$x(t) = A\cos\omega_\circ t \tag{12}$$
$$y(t) = B\sin\omega_\circ t \tag{13}$$

5. Per eliminare il tempo dalle due equazioni precedenti e ottenere l'equazione dell'orbita, isoliamo coseno e seno:

$$\cos\omega_\circ t = \frac{x}{A} \tag{14}$$
$$\sin\omega_\circ t = \frac{y}{B} \tag{15}$$

da cui:

$$1 = \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} \tag{16}$$

che è l'equazione di una ellisse nel piano $O'xy$ di Fig. 2 con semiasse maggiore A e semiasse minore B (dato che è $A > B$).

6. Se $A = B$, nel piano complesso x, iy possiamo scrivere le soluzioni (12) nelle due direzioni x, y nella forma complessa:

$$z = A(\cos\omega_\circ t + i\sin\omega_\circ t) = Ae^{i\omega_\circ t} \tag{17}$$

che rappresenta un punto che si muove sulla circonferenza di raggio A con velocità angolare $\omega_\circ$ in senso antiorario.

Se $A \neq B$ e vogliamo soltanto esponenziali complessi limando totalmente seni e coseni (visto il vantaggio degli esponenziali) dobbiamo per forza combinare un moto in senso orario e uno in senso antiorario, entrambi con la stessa frequenza naturale $\omega_\circ$. Scriviamo:

$$z = \varrho_1 e^{i\omega_\circ t} + \varrho_2 e^{-i\omega_\circ t} \tag{18}$$

e imponendo che si devono ottenere le soluzioni (12) troviamo:

$$\varrho_1 = \frac{A+B}{2} \qquad \varrho_2 = \frac{A-B}{2} \tag{19}$$

In conclusione, la traiettoria è una ellisse nel piano e ogni coordinata è un moto oscillatorio alla frequenza naturale. Questa soluzione generale può essere ottenuta dalla somma di due moti circolari uniformi alla frequenza naturale, di verso opposto e raggi che sono legati ai semiassi dell'ellisse (e quindi alle condizioni iniziali) dalle relazioni (19).