Fisica I, *a.a.* 2014–2015 – Terzo Appello

7 Settembre 2015, Ore 15 Aula PN1 Polo Porta Nuova

Anna M. Nobili

1 Moto di un corpo in un mezzo resistente

[1] Un corpo di forma regolare che si muove in un mezzo resistente subisce una accelerazione che, per piccole velocità, risulta essere proporzionale alla velocità stessa. Nel caso semplice di un moto unidimensionale lungo l'asse x per $x \geqslant 0$ vale l'equazione:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\lambda\dot{x}(t) \quad \lambda > 0 \tag{1}$$

1. Dite quali sono le dimensioni fisiche della costante λ. Nel seguito invece di λ usate una nuova costante che abbia le dimensioni di un tempo, chiamatela τ e scrivete l'equazione che la lega a λ in modo che, dato λ si ottenga univocamente τ.
2. Integrate la (1) in modo da scrivere la funzione $\dot{x}(t)$, cioè l'andamento della velocità nel tempo, sapendo che all'istante iniziale $t = 0$ vale $\dot{x}(0) = v_\circ > 0$ (dovete separare le variabili).
3. Disegnate il grafico della funzione $\dot{x}(t)$ che avete trovato al punto precedente per $t \geqslant 0$
4. Dite per quale valore del tempo t (scritto in unità della costante τ) la velocità iniziale $v_\circ$ ha perso, a causa della resistenza del mezzo, circa il 95% del proprio valore
5. Integrate la funzione $\dot{x}(t)$ che avete scritto al punto 2, in modo da ottenere la funzione $x(t)$, cioè l'andamento nel tempo della posizione del corpo, sapendo che al tempo iniziale vale $x(t = 0) = 0$. Disegnate il grafico della funzione $x(t)$ per $t \geqslant 0$. Vedrete che la posizione del corpo tende ad un certo valore asintotico. Scrivete questo valore asintotico e dite dopo quanto tempo il corpo avrà raggiunto il 95% di esso.

Quando la velocità del corpo è grande il mezzo esercita su di esso un forza frenante proporzionale al quadrato della sua velocità. Assumendo un corpo sferico omogeneo di massa m, raggio r e velocità $\dot{x}(t)$, la forza esercitata su di esso da un mezzo di densità uniforme ϱ_{mezzo} è della forma:

$$F_x(t) = -\pi r^2 \varrho_{mezzo}\dot{x}(t)^2 \tag{2}$$

6. Verificate che F_x abbia le dimensioni di una forza. A parità di velocità del corpo e di densità del mezzo, la forza frenante aumenta (in modulo) con la sezione πr^2 del corpo. Perché? Riscrivete la (2) per l'accelerazione $\ddot{x}(t)$ e sapendo che il corpo ha densità uniforme ϱ_{corpo} dite cosa bisogna fare per minimizzare l'accelerazione frenante agente su di esso (data la sua velocità e il mezzo in cui si muove).
7. Nell'equazione differenziale del punto 6 scrivete l'accelerazione come $d\dot{x}(t)/dt$ e integratela per ottenere la funzione $\dot{x}(t)$ sapendo che al tempo iniziale vale $\dot{x}(t = 0) = v_\circ$ (procedete in modo analogo al punto 2).

[1] **Le risposte ai quesiti devono essere numerate come i quesiti stessi. Le grandezze cui il testo ha assegnato uno specifico simbolo devono conservare nelle risposte lo stesso simbolo. Ogni simbolo deve essere definito.**

2 Soluzione

1. $[\lambda] = \frac{[\mathrm{m}][\mathrm{s}]^{-2}}{[\mathrm{m}][\mathrm{s}]^{-1}} = [\mathrm{s}]^{-1} \quad \tau = \frac{1}{\lambda} \quad [\tau] = [s] \;\; , \;\; \tau > 0 \qquad \frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{1}{\tau}\dot{x}(t)$

2.
$$\frac{d\dot{x}(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\dot{x}(t) \qquad \frac{d\dot{x}(t)}{\dot{x}(t)} = -\frac{1}{\tau}dt \tag{3}$$
$$\int_{v_\circ}^{\dot{x}(t)} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\frac{1}{\tau}\int_o^t dt \qquad \ln \dot{x}(t) - \ln v_\circ = -\frac{t}{\tau} \tag{4}$$
$$\ln \frac{\dot{x}}{v_\circ} = -\frac{t}{\tau} \qquad e^{\ln \frac{\dot{x}(t)}{v_\circ}} = e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \frac{\dot{x}(t)}{v_\circ} = e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{5}$$
$$\dot{x}(t) = v_\circ e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{6}$$

3. Grafico della funzione (6)

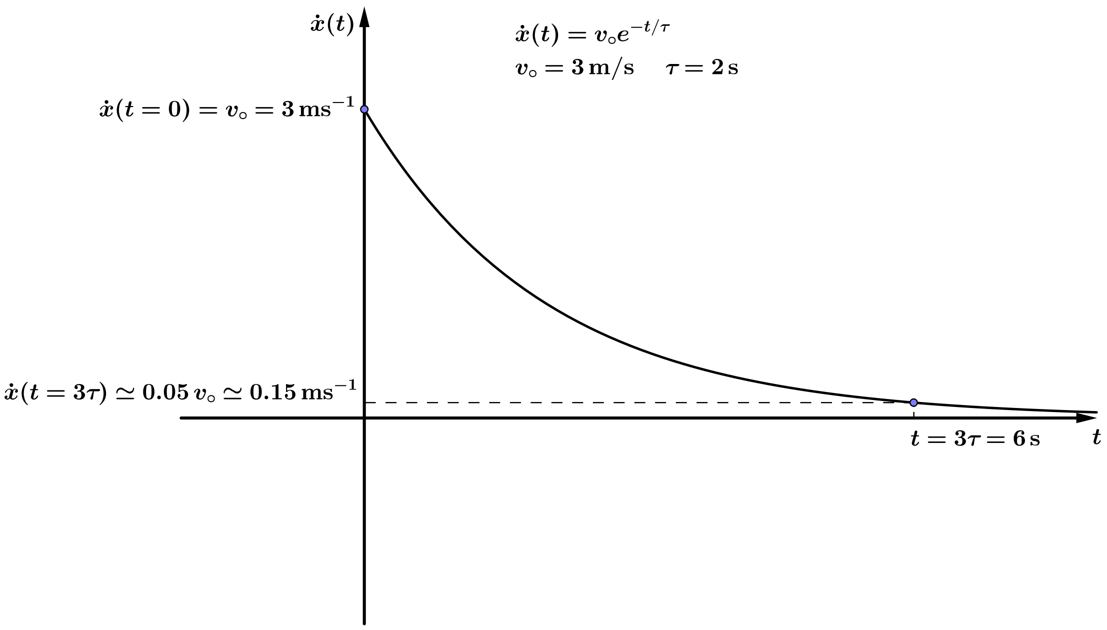

Figure 1: Decadimento esponenziale della velocità $\dot{x}(t)$ del corpo rispetto al mezzo a partire dal valore $\dot{x}(0) = v_\circ$ al tempo iniziale $t = 0$. Il grafico è fatto per $v_\circ = 3\,\mathrm{ms}^{-1}$ e $\tau = 2\,\mathrm{s}$

4. Quando il corpo ha perso il 95% del suo valore iniziale vuol dire che la sua velocità vale il 5% del suo valore iniziale. Impongo che questo succeda quando $t = n\tau$ con n costante positiva, e trovo il valore di n:

$$\dot{x}(t = n\tau) = v_\circ e^{-n} \simeq 0.05 v_\circ \Rightarrow e^{-n} \simeq 0.05 \qquad e^n \simeq 20 \Rightarrow n \simeq 3 \;\; . \tag{7}$$

Quindi, dopo un tempo pari a 3 volte la costante τ, la velocità ha già perso il 95% del suo valore iniziale. Si vede bene che il decadimento esponenziale è molto rapido, e quale ruolo gioca la costante di tempo τ: ad ogni passaggio di un intervallo di tempo pari a τ il valore della velocità si riduce di $1/e = 1/271828 \simeq 0.37$, cioè del 37%.

5. Per ottenere la distanza $x(t)$ percorsa al tempo t partendo da $x(0) = 0$ al tempo iniziale $t = 0$ integriamo la (6):

$$\dot{x}(t) = v_\circ e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad x(t) = v_\circ \int_\circ^t e^{-\frac{t}{\tau}} dt = -v_\circ \tau \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right) \quad \Rightarrow \quad x(t=0) = 0 \tag{8}$$

Come si vede anche dal grafico riportato in Fig. 2, la distanza percorsa dal corpo tende al valore asintotico $v_\circ \tau$.

Cerco il valore della costante $n > 0$ tale che per $t = n\tau$ il corpo sia arrivato ad una distanza pari al 95% del suo valore asintotico. Quindi impongo:

$$x(t = n\tau) = v_\circ \tau \left(1 - e^{-n} \right) = \frac{95}{100} v_\circ \tau \quad \Rightarrow \quad e^{-n} = 1 - \frac{95}{100} = 0.05 \quad \Rightarrow \quad n \simeq 3 \tag{9}$$

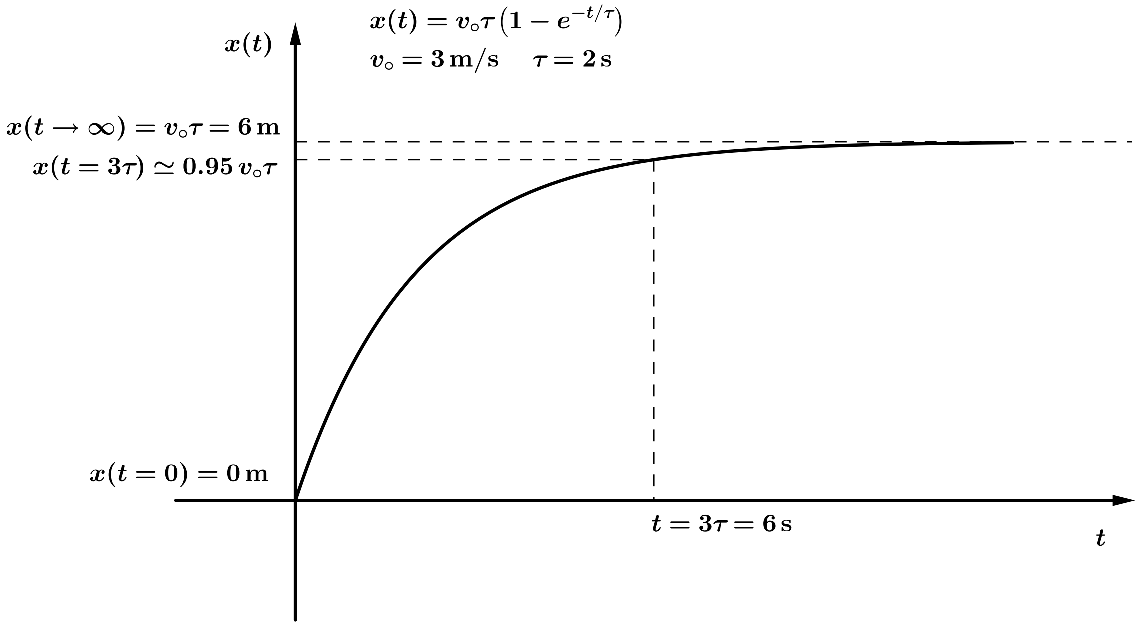

Figure 2: Il corpo parte dall'origine dell'asse delle x e tende e cresce rapidamente fino al valore asintotico $x \to v_\circ \tau$. Dopo un tempo pari a 3τ avrà raggiunto il 95% di questo valore asintotico. Il grafico è fatto per $v_\circ = 3\,\mathrm{ms}^{-1}$ e $\tau = 2\,\mathrm{s}$ come nel caso della velocità.

6. $[F_x] = [\mathrm{m^2 kg\, m^{-3} m^2 s^{-2}}] = [\mathrm{kg\, m\, s^{-2}}] = [\mathrm{N}]$

La forza frenante è proporzionale alla sezione πr^2 del corpo perché più grande è la sua sezione più particelle del mezzo la colpiscono nel suo moto e quindi maggiore è la forza di frenamento che subisce.

L'accelerazione di frenamento che agisce su di un corpo sferico di massa m, raggio r e densità uniforme ϱ_{corpo} che si muove a velocità $\dot{x}$ in un mezzo di densità uniforme ϱ_{mezzo} è:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{\pi r^2 \varrho_{mezzo}}{m} \dot{x}(t)^2 = -\frac{\pi r^2 \varrho_{mezzo}}{\frac{4}{3}\pi \varrho_{corpo} r^3} \dot{x}(t)^2 = -\frac{3}{4} \frac{\varrho_{mezzo}}{\varrho_{corpo} r} \dot{x}(t)^2 \tag{10}$$

quindi per minimizzarla occorre aumentare il prodotto $\varrho_{corpo} r$ della sua densità per il suo raggio: corpi più densi e/o di densità maggiore subiscono una minore accelerazione di frenamento.

7.
$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}^2} = -\frac{3}{4}\frac{\varrho_{mezzo}}{\varrho_{corpo} r}dt \qquad \int_{v_\circ}^{\dot{x}(t)} \dot{x}^{-2} d\dot{x} = -\frac{3}{4}\frac{\varrho_{mezzo}}{\varrho_{corpo} r}\int_0^t dt \tag{11}$$

$$-\dot{x}(t)^{-1} + v_\circ^{-1} = -\frac{3}{4}\frac{\varrho_{mezzo}}{\varrho_{corpo} r}t \qquad \dot{x}(t)^{-1} = \frac{1 + v_\circ kt}{v_\circ} \qquad k = \frac{3}{4}\frac{\varrho_{mezzo}}{\varrho_{corpo} r} \qquad [k] = [m^{-1}] \tag{12}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{v_\circ}{1 + v_\circ kt} \tag{13}$$

In questo caso quindi la velocità non decade esponenzialmente ma lungo un tratto di iperbole e la velocità del decadimento dipende dal valore di $k = \frac{3}{4}\frac{\varrho_{mezzo}}{\varrho_{corpo} r}$, cioè –per un mezzo resistente dato– dal prodotto $\varrho_{corpo} r$: più grandi sono densità e/o raggio del corpo, minore è l'effetto del mezzo su di esso, più lentamente decade la sua velocità iniziale, come avevamo visto al punto 6.

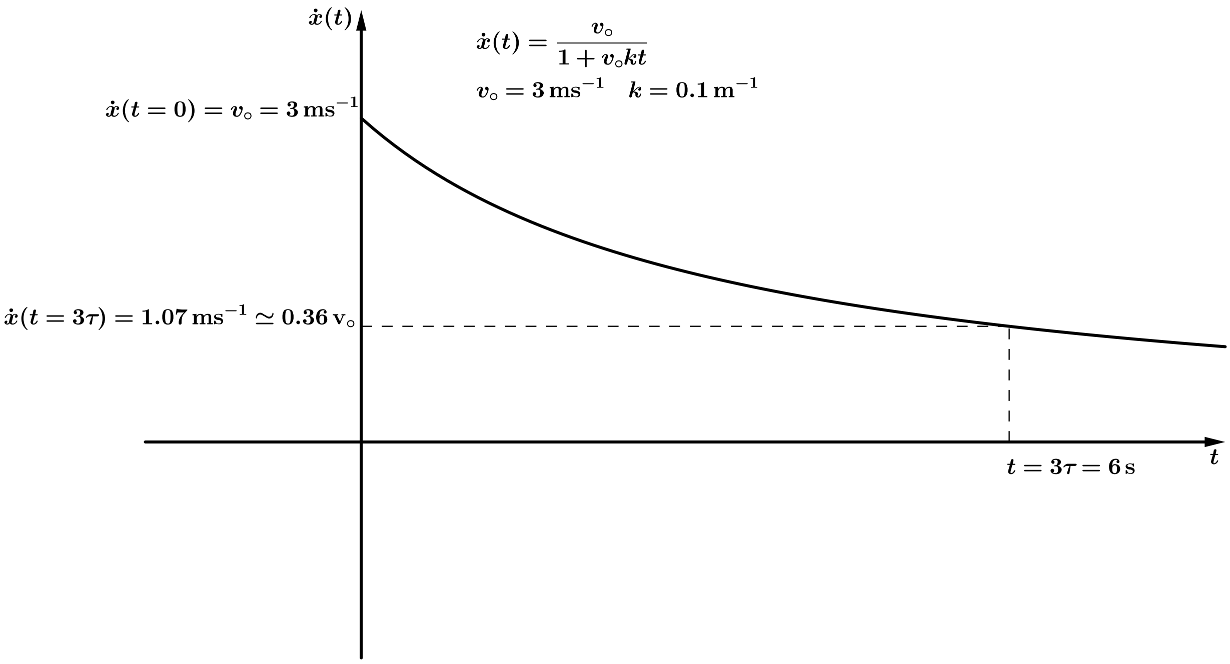

Figure 3: Decadimento della velocità di un corpo che si muove in un mezzo che lo frena con una forza proporzionale al quadrato delle sua velocità rispetto ad esso.

Nota: Tutte le figure riportate sopra sono state fatte con il software *geogebra* che è molto ben fatto, facile da usare, gratuito e disponibile all'indirizzo https://www.geogebra.org/. Si consiglia di imparare ad usarlo, non solo per grafici ma anche per figure e disegni. I files originali nel linguaggio geogebra sono esportabili come immagini e in PDF.