Fisica I, *a.a.* 2014–2015 – Quarto Appello

18 Settembre 2015, Ore 14:30 Aula PN1 Polo Porta Nuova

Anna M. Nobili

1 Effetti della attrazione gravitazionale del Sole

[1] La Terra, che assumiamo essere sferica, di raggio r, densità uniforme e non rotante, si muove attorno al Sole lungo un'orbita –che approssimiamo come circolare di raggio R– sotto l'azione della sola forza gravitazionale. Il Sole, di massa M viene considerato puntiforme. I valori numerici sono $r \simeq 6400\,\mathrm{km}$, $R \simeq 150 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$, $M \simeq 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$.

1. Conoscete dalle lezioni la velocità angolare orbitale ω della Terra intorno al Sole in caso di orbita circolare. Riscrivete ω con i simboli dati e calcolate il valore numerico di ω e del periodo orbitale P. Considerate il sistema di riferimento Oxy con origine nel centro di massa della Terra e coincidente con il piano della sua orbita circolare attorno al Sole. Dite come è diretto il vettore $\vec{\omega}$. Dite se il riferimento Oxy è inerziale o no. Se non lo è, scrivete l'accelerazione inerziale a_i che agisce sul centro di massa della Terra. Dite come è diretto il vettore $\vec{a}_i$ per una generica posizione del Sole.

2. Ad un tempo generico t^* nel sistema di riferimento Oxy il Sole si trova sull'asse positivo delle x. Disegnate, per tale istante, il sistema Oxy e l'intersezione della superficie della Terra con il piano $x.y$. Su tale intersezione indicate i punti A, B, C, D rispettivamente lungo l'asse delle $x > 0$, delle $y > 0$, delle $x < 0$ e delle $y < 0$. Disegnate infine la posizione occupata dal Sole (sempre all'istante t^*) e chiamatela S. Indicate il disegno fatto come Figura 1. Dite se la posizione di S è in scala con quelle di A, B, C, D; se non lo è, dite dove si troverebbe S se il disegno fosse in scala.

3. In Figura 1 disegnate il vettore $\vec{a}_i$ agente sul centro di massa della Terra. Avendo assunto che la Terra non ha rotazione propria, dite come è fatta l'accelerazione inerziale che agisce sui punti A, B, C, D e disegnate in ognuno di essi i vettori di tali accelerazioni inerziali che indicherete con i nomi: $\vec{a}_{i_A}, \vec{a}_{i_B}, \vec{a}_{i_C}, \vec{a}_{i_D}$

4. Scrivete l'accelerazione $a_\odot$ con la quale il Sole attrae la Terra. In Figura 1 (quindi al tempo t^*) disegnate il vettore $\vec{a}_\odot$ applicato al centro di massa della Terra e dite quanto vale l'accelerazione totale in quel punto.

5. Scrivete le accelerazioni $a_{\odot_A}, a_{\odot_B}, a_{\odot_C}, a_{\odot_D}$ esercitate dal Sole nei punti A, B, C, D di Figura 1 tenendo conto che $\frac{r}{R} \ll 1$ e che siete autorizzati a trascurare termini in $\frac{r^2}{R^2}$ o più piccoli. Disegnate in Figura 1 i vettori $\vec{a}_{\odot_A}, \vec{a}_{\odot_B}, \vec{a}_{\odot_C}, \vec{a}_{\odot_D}$ tenendo conto dei rispettivi moduli.

6. Fate una nuova Figura 1 in cui nell'origine e in ognuno dei punti A, B, C, D disegnate l'accelerazione totale agente in quel punto, scrivendone per ciascuna la formula. Chiamatela Figura 2.

7. Immaginate di scavare un tunnel tubolare che va da B ad O fino ad A, e di riempirlo di acqua. Dite come si distribuisce l'acqua in presenza delle accelerazioni totali di cui al punto 6.

[1] **Le risposte ai quesiti devono essere numerate come i quesiti stessi. Le grandezze cui il testo ha assegnato uno specifico simbolo devono conservare nelle risposte lo stesso simbolo. Ogni simbolo deve essere definito.**

2 Soluzione

1. La velocità angolare della Terra nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole in orbita circolare è (terza legge di Keplero):

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \simeq \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} 2 \cdot 10^{30}}{(1.5 \cdot 10^{11})^3}} \sqrt{\frac{6.67 \cdot 2}{1.5^3}} \cdot 10^{-7}\,\mathrm{rad/s} \simeq 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{rad/s} \tag{1}$$

con un periodo orbitale:

$$P = \frac{2\pi}{\omega} \simeq 3.14 \cdot 10^7\,\mathrm{s} \simeq 365\,\mathrm{d} \simeq 1\,\mathrm{yr} \quad . \tag{2}$$

Il vettore $\vec{\omega}$ è perpendicolare al piano x, y in verso uscente perché il moto orbitale della Terra (che è lo stesso del suo moto di rotazione propria) avviene in senso antiorario, che in Fisica è quello positivo. Il sistema di riferimento Oxy essendo solidale con la Terra, la quale per ipotesi non ruota su se stessa ma orbita attorno al Sole, non è inerziale a causa della velocità angolare di rivoluzione $\vec{\omega}$. L'accelerazione inerziale che agisce sul centro di massa della Terra O è quella centrifuga, ha modulo

$$a_i = \omega^2 R = \frac{GM}{R^2} \tag{3}$$

ed è diretta lungo la congiungente Sole-Terra verso l'esterno (Figura 1).

2. Configurazione al tempo t^*.

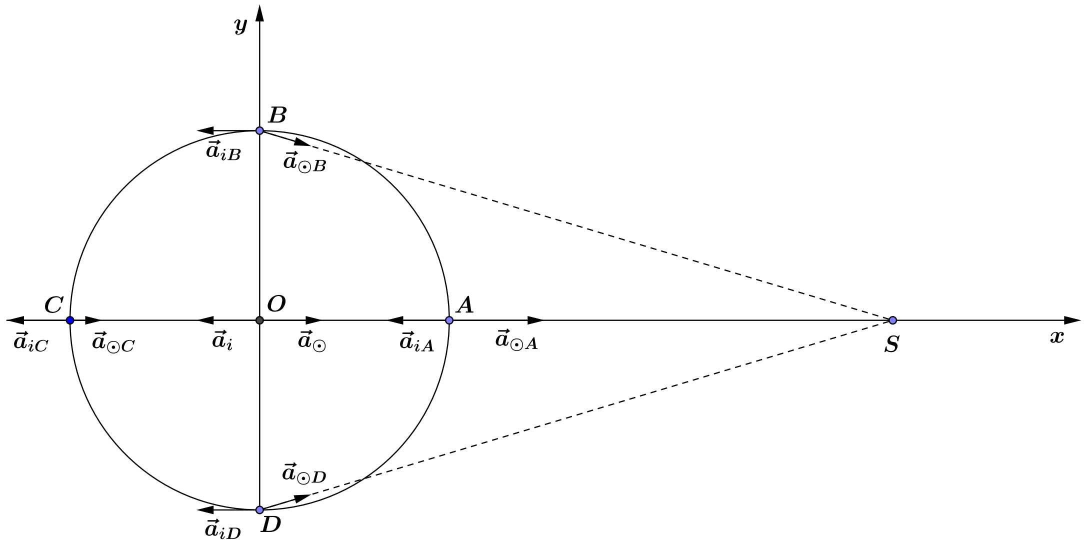
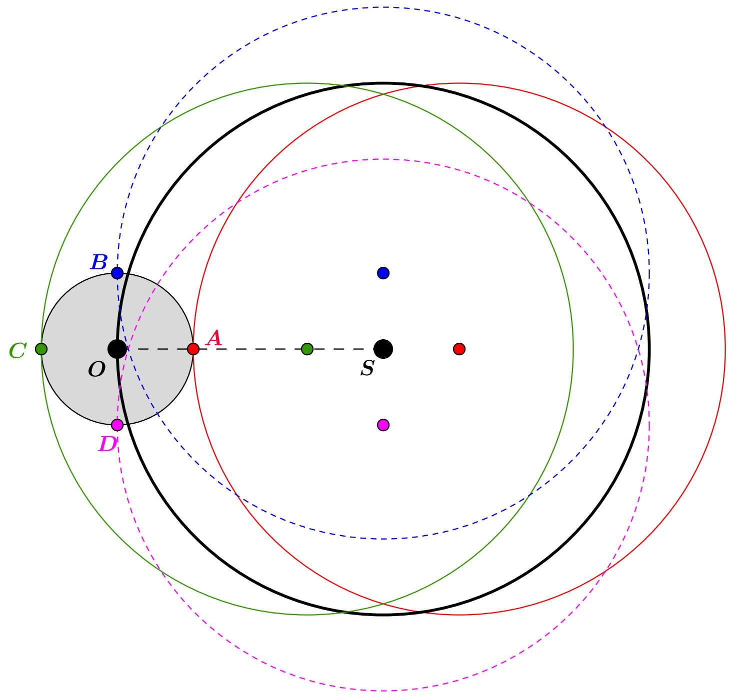


Figura 1: Terra e Sole (puntiforme) nel piano dell'orbita al tempo t^* come richiesto nel testo. Il sistema di riferimento Oxy è centrato nel centro di massa della Terra (che per ipotesi è sferica e non ha rotazione propria) e solidale con essa nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole. La figura è fortemente non in scala. Il fatto che non sia in scala rende tuttavia più evidenti le differenti direzioni dei vettori $\vec{a}_{\odot_B}, \vec{a}_{\odot_D}$ rispetto a quelle (rispettivamente) di $\vec{a}_{i_B}, \vec{a}_{i_D}$. Sono riportate in figura tutte le accelerazioni richieste dal testo. Le diverse lunghezze di questi vettori mostrano le differenze di modulo (quale è più grande e quale è più piccola) in modo consistente; tuttavia in ogni punto le differenze di modulo appaiono molto maggiori di quanto non siano in realtà, come si evince dalle rispettive formule (altrimenti non si noterebbero neppure).

La Figura 1 mostra la configurazione al tempo t^* descritta nel testo, con i punti S e A, B, C, D come richiesto. La distanza del Sole dall'origine, coincidente con il centro di massa della Terra, in unità di raggi terrestri è pari a $\frac{R}{r} \simeq \frac{150 \cdot 10^6}{6400} \simeq \frac{1.5 \cdot 10^5}{6.4} \simeq 2.3 \cdot 10^4$. Quindi, se prendiamo come unità di misura il raggio terrestre disegnato in figura, per fare un disegno in scala dovrei disegnare il Sole sull'asse delle $x > 0$ ad una distanza dall'origine $2.3 \cdot 10^4$ volte maggiore di quella del punto A, che è ovviamente impossibile. Quindi la figura è per forza fuori scala.

3. La figura che segue mostra le orbite percorse dai punti O, A, B, C, D durante una rivoluzione completa intorno al Sole nell'ipotesi che la Terra non abbia rotazione propria.



Se la Terra non ha rotazione propria vuole dire che è fissa nello spazio inerziale, cioè si muove attorno al Sole restando sempre parallela a se stessa. In questo caso le orbite dei punti di nostro interesse sono mostrate in figura con i relativi diversi colori. Ad esempio, il punto A, ruota attorno al punto indicato in rosso alla destra del Sole lungo l'orbita mostrata dalla curva rossa, quindi l'accelerazione inerziale centrifuga in A è diretta lungo la congiungente questi due punti verso l'esterno. Tutte le orbite hanno lo stesso raggio R e ovviante la stessa velocità angolare dell'orbita del centro di massa della Terra O attorno al Sole S. Quindi in ognuno dei punti considerati l'accelerazione inerziale è la stessa che agisce sul centro di massa della Terra, che abbiamo calcolato al punto 1, e quindi in Figura 1 abbiamo disegnato quattro vettori $\vec{a}_{i_A}, \vec{a}_{i_B}, \vec{a}_{i_C}, \vec{a}_{i_D}$ identici. Si noti che il ragionamento vale anche per qualsiasi punto all'interno della Terra, non solo sulla sua superficie.

4.
$$\vec{a}_{\odot} = \left(\frac{GM}{R^2}, 0\right) \tag{4}$$

5.
$$a_{\odot A} = \frac{GM}{(R-r)^2} = \frac{GM}{R^2(1-\frac{r}{R})^2} \simeq \frac{GM}{R^2}\left(1 + 2\frac{r}{R}\right) \tag{5}$$
$$a_{\odot C} = \frac{GM}{(R+r)^2} = \frac{GM}{R^2(1+\frac{r}{R})^2} \simeq \frac{GM}{R^2}\left(1 - 2\frac{r}{R}\right) \tag{6}$$

$$a_{\odot_B} = \frac{GM}{R^2+r^2} = \frac{GM}{R^2(1+\frac{r^2}{R^2})} \simeq \frac{GM}{R^2} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{\odot_B} &= \Big(\frac{GM}{R^2+r^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2+r^2}}, -\frac{GM}{R^2+r^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{R^2+r^2}}\Big) \\
&\simeq \Big(\frac{GM}{(R^2+r^2)^{3/2}}\cdot R, -\frac{GM}{(R^2+r^2)^{3/2}}\cdot r\Big) \\
&\simeq \Big(\frac{GM}{R^2}, -\frac{GM}{R^2}\frac{r}{R}\Big)
\end{aligned}$$

$$a_{\odot_D} = \frac{GM}{R^2+r^2} = \frac{GM}{R^2(1+\frac{r^2}{R^2})} \simeq \frac{GM}{R^2} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{\odot_D} &= \Big(\frac{GM}{R^2+r^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2+r^2}}, \frac{GM}{R^2+r^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{R^2+r^2}}\Big) \\
&\simeq \Big(\frac{GM}{(R^2+r^2)^{3/2}}\cdot R, \frac{GM}{(R^2+r^2)^{3/2}}\cdot r\Big) \\
&\simeq \Big(\frac{GM}{R^2}, \frac{GM}{R^2}\frac{r}{R}\Big)
\end{aligned}$$

Dalle (7) e (8) si vede che nei punti B e D l'accelerazione da parte del Sole ha lo stesso modulo che nel centro di massa della Terra (se si trascurano, come indicato dal testo termini dell'ordine di r^2/R^2). Per questo in Figura 1 la lunghezza delle rispettive frecce che rappresentano queste accelerazioni è la stessa. Tuttavia, le direzioni sono diverse e per questo scriviamo anche le componenti dei vettori $\vec{a}_{\odot_B}$ e $\vec{a}_{\odot_D}$ lungo l'asse y

6. In Figura 2 si riporta, in ciascuno dei punti O, A, B, C, D la somma vettoriale della accelerazione da parte del Sole e dell'accelerazione inerziale, che risulta essere esattamente nulla solo nel centro di massa O. Si noti che in A e C le piccole accelerazioni residue hanno lo stesso modulo e versi opposti, e che il loro modulo è il doppio di quello delle accelerazioni residue in B e in D.

   Queste accelerazioni residue non nulle si chiamano "accelerazioni mareali" perché sono responsabili del fenomeno delle maree: Per i punti che si trovano sulla superficie della Terra non si riporta l'accelerazione locale di gravità ($g \simeq 9.8\,\mathrm{ms^{-2}}$), che non è mai menzionata nel testo, in quanto in ogni punto è diretta verso il centro di massa della Terra e con lo stesso modulo, e quindi non contribuisce alle differenze di accelerazione residua, ad esempio tra A e B, che sono quelle rilevanti per le maree.

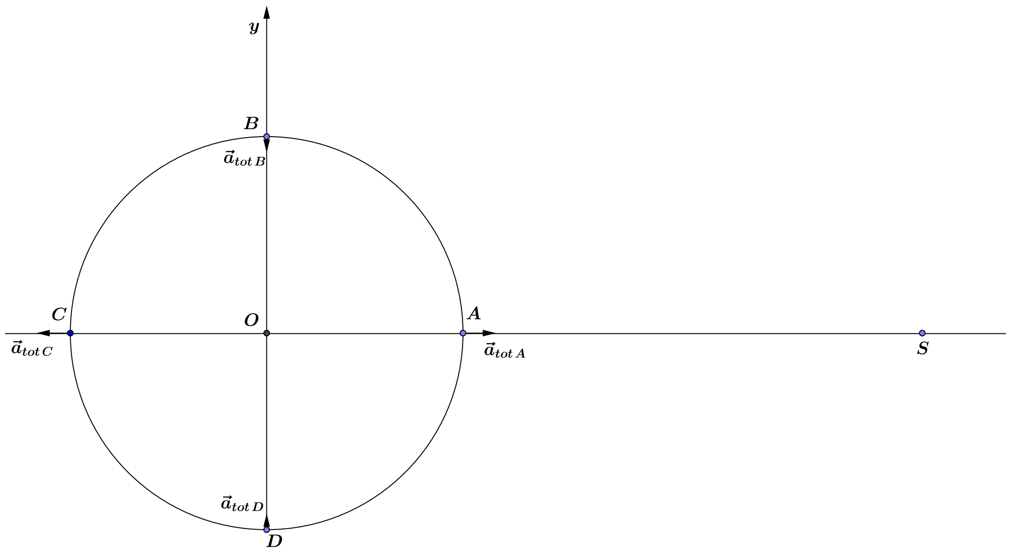


Figura 2: Nel centro di massa della Terra in orbita attorno al Sole l'accelerazione totale (attrazione del Sole più accelerazione inerziale) è nulla. Si dice che esso è un punto a forza zero, o anche che esso si trova in "assenza di peso", in quanto l'attrazione gravitazionale del Sole ("peso") è bilanciata esattamente dalla accelerazione inerziale (centrifuga). Questo bilanciamento esatto si verifica solo nel centro di massa della Terra. In particolare, nei punti A, B, C, D la somma totale non è nulla e ci sono piccole accelerazioni residue, come date dalle formule (9), (10), (11), (12) e rappresentate in figura.

$$\vec{a}_{tot\,A} \simeq \left(\frac{2GMr}{R^3}, 0\right) \tag{9}$$

$$\vec{a}_{tot\,B} \simeq \left(0, -\frac{GMr}{R^3}\right) \tag{10}$$

$$\vec{a}_{tot\,C} \simeq \left(-\frac{2GMr}{R^3}, 0\right) \tag{11}$$

$$\vec{a}_{tot\,D} \simeq \left(0, \frac{GMr}{R^3}\right) \tag{12}$$

7. Questa domanda aveva lo scopo di mostrare come le accelerazioni residue non nulle calcolate al punto precedente e mostrate in Figura 2 sono responsabili di differente altezze delle acque all'equilibrio in diversi punti della superficie terrestre, in particolare bei punti A e B. Poiché nessuno studente è arrivato a rispondere a questa domanda non la si considera parte di questo compito.

Nota: Tutte le figure riportate sopra sono state fatte con il software *geogebra* che è molto ben fatto, facile da usare, gratuito e disponibile all'indirizzo https://www.geogebra.org/. Si consiglia di imparare ad usarlo, non solo per grafici ma anche per figure e disegni. I files originali nel linguaggio geogebra sono esportabili come immagini e in PDF.